Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Vladimír Majerník; Lukáš Richterek; Martin Vlček

Entropické relace neurčitosti

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 44 (1999), No. 4, 315--334

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141010

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1999

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Entropické relace neurčitosti

Vladimír Majerník, Lukáš Richterek a Martin Vlček, Olomouc

V kvantové fyzice lze princip neurčitosti pro nekomutující veličiny vyjádřit různými vztahy, z nichž nejznámější jsou bezesporu Heisenbergovy relace neurčitosti. Jejich alternativou mohou být tzv. entropické relace neurčitosti, jež využívají součet entropií nekomutujících veličin. Cílem tohoto článku je ukázat, že entropické relace neurčitosti vykazují několik z matematického hlediska zajímavých vlastností a mohou být použity jako adekvátní formulace principu neurčitosti. V závěru provedeme srovnání relací neurčitosti na některých jednoduchých kvantových systémech se dvěma nekomutujícími veličinami.

1. Princip neurčitosti

Formulaci principu neurčitosti pomocí entropických relací neurčitosti se v posledních letech věnuje značná pozornost. Nabízí se otázka, proč je důležité hledat jiné vyjádření vztahů neurčitosti, formulovaných Wernerem Heisenbergem již v roce 1927 [14]. Než se pokusíme na tuto otázku odpovědět, připomeňme známá fakta z kvantové fyziky a teorie pravděpodobnosti. Nejprve si musíme uvědomit rozdíl mezi principem neurčitosti a jeho možným vyjádřením ve formě relací neurčitosti [8, 15, 28, 34]. Vlastnosti kvantových systémů se v kvantové mechanice popisují prostřednictvím *vlnové funkce* nebo *stavového vektoru*. Vlnová funkce $\psi(\xi, t)$ popisující stav systému je obecně komplexní, jednoznačná a spojitá funkce určité veličiny ξ a času t. V nerelativistickém případě je řešením *Schrödingerovy rovnice*, která hraje v kvantové mechanice podobnou úlohu jako Newtonovy rovnice v klasické mechanice [3, 19, 26].

V kvantové mechanice každé veličině A přiřazujeme lineární hermitovský operátor $\hat{A}$. Pro střední hodnotu veličiny A ve stavu popsaném vlnovou funkcí ψ pak platí

$$\langle A \rangle = \int \psi^* \hat{A} \psi \, \mathrm{d}\xi \tag{1}$$

a pro disperzi veličiny A platí

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle = \int \psi^* \big(\Delta \hat{A}\big)^2 \psi \, \mathrm{d}\xi, \tag{2}$$

kde $\Delta \hat{A} = \hat{A} - \langle A \rangle$.

Prof. RNDr. Vladimír Majerník, DrSc. (1934), a Mgr. Lukáš Richterek (1969) pracují na katedře teoretické fyziky PřF UP, Mgr. Martin Vlček (1976) je absolventem oboru aplikovaná fyzika PřF UP, tř. Svobody 26, 771 46, Olomouc; e-mail: majerv@risc.upol.cz, richter@risc.upol.cz

Lze ukázat, že jestliže vlnová funkce ψ splňuje rovnici

$$\hat{A}\psi = A\psi, \tag{3}$$

pak je střední kvadratická odchylka veličiny A rovna nule, tzn. veličina A má ve stavu určeném takovou vlnovou funkcí jedinou, přesně určenou hodnotu. V obecném případě má rovnice (3) řešení jen pro některé hodnoty veličiny A; ty se pak nazývají *vlastními* (*charakteristickými*) *hodnotami* operátoru $\hat{A}$ a jim odpovídající řešení rovnice (3) se nazývají *vlastními* (*charakteristickými*) *funkcemi* operátoru $\hat{A}$. Množina všech vlastních hodnot operátoru se nazývá jeho *spektrem* a může být diskrétní nebo spojitá.

Fyzikální veličina A tedy ve stavu popsaném vlastní funkcí ψ_A operátoru $\hat{A}$ nabývá pouze jediné hodnoty, která je rovna vlastní hodnotě tohoto operátoru, a naměříme ji s jistotou. Je-li stav systému popsán vlnovou funkcí ψ, která není rovna vlastní funkci operátoru $\hat{A}$, pak při opakovaném měření veličiny A dostaneme různé hodnoty, z nichž každá bude rovna jedné z vlastních hodnot operátoru $\hat{A}$. Množina vlastních hodnot operátoru $\hat{A}$ tak představuje všechny hodnoty, které můžeme získat jako výsledek měření veličiny A v různých stavech. Představuje-li veličina ξ polohu částice x, potom bude kvantový systém popsán komplexní funkcí $\psi(x,t)$, určující hustotu pravděpodobnosti nalezení částice v poloze x v čase t pomocí rovnice $\varrho_x(x,t) = |\psi(x,t)|^2$. Příslušnou Fourierovou transformací získáme funkci $\varphi(p,t)$, jež je potom spojena s hustotou pravděpodobnosti nalezení částice s hybností p v čase t rovnicí $\varrho_p(p,t) = |\varphi(p,t)|^2$. Podle typu experimentu může být kvantový systém popsán pomocí různých vlnových funkcí a jim odpovídajících různých hustot pravděpodobnosti. Platí zde jednoduché pravidlo, populárně vyjadřující hlavní obsah principu neurčitosti: součin „šířek“ hustot pravděpodobnosti bude vždy větší nebo roven určité konstantě. Názorně zde vidíme rozdíl mezi klasickým a kvantově-mechanickým přístupem k měření fyzikálních veličin — zatímco v klasické fyzice neexistuje žádné zásadní omezení a fyzikální veličiny lze teoreticky měřit s libovolnou přesností, v kvantové mechanice je přesnost měření některých veličin principiálně omezena. Samozřejmě, v praxi nelze dosáhnout absolutní přesnosti ani v klasické fyzice kvůli šumu v přístrojích a dalším rušivým vlivům, nejde však o limity vyplývající přímo „z podstaty“ a teoretického formalismu. Také „kvantová“ měření jsou ovlivněna šumem měřicí aparatury, ale měření prováděné na kvantovém systému by nemohlo být absolutně přesné ani tehdy, pokud bychom použili ideální, dokonalé měřicí přístroje. Právě nepřesnostmi vyplývajícími ze samotného formalismu kvantové mechaniky se budeme dále zabývat.[1])

Existují určitá pravidla, podle nichž je možné jakékoliv kvantové veličině A přiřadit náhodnou proměnnou $\tilde{x}_A$ charakterizovanou pravděpodobnostním schématem

S	S_1	S_2	$\ldots$	S_n
P	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$\ldots$	$P(x_n)$
X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n

,

[1]) Existují snahy zahrnout do relací neurčitosti i působení měřicích přístrojů formou tzv. operativních relací neurčitosti [2].

kde symboly v prvním řádku představují vlastní kvantové stavy operátoru $\hat{A}$, ve druhém jejich pravděpodobnosti a ve třetím vlastní hodnoty odpovídající těmto kvantovým stavům [7].

V teorii pravděpodobnosti a v matematické statistice se používají různé míry pro vyjádření neurčitosti náhodné proměnné. Popis kvantové veličiny jako náhodné proměnné umožňuje použít tyto míry také pro vyjádření neurčitosti veličiny v kvantové fyzice. Nejznámější mírou je střední kvadratická odchylka definovaná jako druhý centrální statistický moment, který obecně vyjadřuje přesnost měření v experimentální fyzice. Právě střední kvadratickou odchylku polohy a hybnosti použil v roce 1927 Heisenberg k formulaci slavných relací neurčitosti. Tato volba byla zcela přirozená, neboť ve zmíněné době střední kvadratická odchylka měřené veličiny představovala obvyklou míru nepřesnosti měření. Od té doby byla problematika Heisenbergových relací neurčitosti využívajících střední kvadratickou odchylku různých nekomutujících veličin rozpracována v nepřeberném množství prací [27]. Matematicky nejpřesněji jsou vyjádřeny v podobě tzv. *Robertsonova vztahu* [8]

$$\Delta A \, \Delta B \geqq \tfrac{1}{2} \left| \langle \Psi | \left[\hat{A}, \hat{B} \right] | \Psi \rangle \right|, \tag{4}$$

kde ΔA a ΔB jsou střední kvadratické odchylky veličin A, B a $\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$ značí jejich komutátor.

Relace neurčitosti (4) mají dva základní nedostatky (viz např. [30] a [34]):

(i) Jestliže A a B jsou dvě nekomutující veličiny v konečném n-rozměrném Hilbertově prostoru, pak pravá strana rovnice (4) nemá v některých případech kladnou spodní hranici. Odpovídá-li totiž stav ψ některému z vlastních vektorů $\hat{A}$ nebo $\hat{B}$, pak je pravá strana (4) rovna nule. Pro součin $\Delta A \, \Delta B$ na levé straně pak jako dolní hranici dostáváme rovněž nulu, jež nepředstavuje žádné omezení pro přesnost měření uvažovaných veličin A, B.

(ii) Jsou-li Q a P komplementární veličiny se spojitou hustotou pravděpodobnosti, potom střední kvadratická odchylka nemusí představovat vhodnou míru pro neurčitost těchto veličin, zejména pokud má jejich hustota pravděpodobnosti několik výrazných lokálních maxim.

Uvedené nedostatky jsou významnou motivací pro hledání jiných typů relací neurčitosti. Roku 1948 C. E. Shannon publikoval stěžejní práci v oblasti teorie informace [32], kterou položil základy celé nové vědecké disciplíny. Zavedl dvě z našeho hlediska důležité veličiny: *informační entropii* jako míru neurčitosti jisté náhodné proměnné a *informaci* jako míru statistické závislosti dvou náhodných proměnných [11]. Později se ukázalo, že použijeme-li místo střední kvadratické odchylky informační entropii jako míru neurčitosti, pak odpovídající relace neurčitosti zmíněné nedostatky nemají a představují tak novou, alternativní formulaci principů neurčitosti v kvantové mechanice.

2. Trocha historie

Pojem „relace neurčitosti“ bývá nejčastěji spojován se známým Heisenbergovým vztahem pro neurčitost polohy a hybnosti částice v kvantové mechanice. Podobné vztahy však byly ve fyzice známy již mnohem dříve. Všechny v podstatě vyjadřovaly fakt, že součin délky vlnového procesu a „šířky“ jeho Fourierova obrazu nemůže být libovolně malý, a platily pro jakékoli děje *vlnové* povahy. Prvním oborem, kde byly použity, byla proto akustika. Slavný barokní hudební skladatel J. S. Bach nedoporučoval svým studentům hrát na varhany krátce („staccato“) hluboké tóny, protože tyto tóny potom znějí jako šum a ne jako tóny. Lidské ucho představuje z fyzikálního hlediska jistý typ frekvenčního analyzátoru, jehož činnost je vázána tzv. *akustickou relací neurčitosti* [21] $\Delta f\,\Delta t > 1$, kde Δf je šířka pásma akustického signálu a Δt doba jeho trvání. Krátce trvající akustické signály mají tudíž větší šířku frekvenčního pásma, zatímco dlouhotrvající signály mají šířku pásma menší. V roce 1947 dva američtí psychofyzikové J. M. Dougty a W. R. Gardner [4] zkoumali účinek délky tónu na jeho vnímání a došli k závěru, že jestliže délka tónu vzroste z malé hodnoty (okolo 2–3 ms) na 500 ms, tak vnímání tohoto tónu projde třemi stupni (etapami):

(i) vnímaný tónový signál má vysloveně charakter šumu,

(ii) vnímaný tónový signál má stále charakter šumu, ale s tónovou složkou,

(iii) vnímaný tónový signál má čistý tónový charakter, který se již dále nemění s prodlužováním doby trvání signálu.

Změny v charakteru vnímání krátkých tónů jsou způsobeny změnami šířek jejich frekvenčního pásma a jsou v plném souladu s akustickou relací neurčitosti. V roce 1924 Küpfmüller [18] odvodil své „relace neurčitosti“ pro všechny lineární frekvenční analyzátory (obecně řečeno pro všechny lineární obvody) $\Delta f\,\Delta t > 1$, kde Δf je šířka pásma lineárního filtru a Δt je jeho transientní čas; tento vztah připomíná relaci neurčitosti pro energii a čas známou z kvantové mechaniky. Roku 1927 Heisenberg formuloval své relace neurčitosti, které mají v podstatě podobný tvar, dostaly však jiný význam v důsledku de Broglieho vztahu pro vlnovou délku a hybnost kvantové částice a statistické interpretace kvantové mechaniky. Po vzniku teorie komunikace v padesátých letech Gabor [9] formuloval tzv. *Gaborovy relace neurčitosti* prostřednictvím „efektivní šířky pásma signálu“ a „efektivního trvání signálu“. Předpokládal přitom, že podobně jako v kvantové mechanice může být signál popsán komplexní funkcí $g(t)$; odpovídající spektrální funkce $G(\omega)$ je potom také obecně komplexní. Efektivní trvání signálu Δt (neurčitost v délce trvání signálu) a jeho efektivní šířku $\Delta\omega$ (neurčitost ve frekvenci signálu) definoval vztahy

$$\Delta t = 2\sqrt{\pi\left\langle (t-\langle t\rangle)^2\right\rangle}, \qquad \Delta\omega = 2\sqrt{\pi\left\langle (\omega-\langle\omega\rangle)^2\right\rangle}, \tag{5}$$

kde

$$\langle t\rangle = \frac{\displaystyle\int g^*(t)tg(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int g^*(t)g(t)\,\mathrm{d}t}, \qquad \langle\omega\rangle = \frac{\displaystyle\int G^*(\omega)\omega G(\omega)\,\mathrm{d}\omega}{\displaystyle\int G^*(\omega)G(\omega)\,\mathrm{d}\omega} \tag{6}$$

a výrazy v $\langle\ \rangle$ značí středování příslušných veličin. Spektrální funkci pak získáme Fourierovou transformací

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int g(t) \exp(-\mathrm{i}\omega t)\, \mathrm{d}t.$$

Gabor ukázal, že pro lineární komunikační kanál platí

$$\Delta t\, \Delta\omega \geqq 1.$$

Je zajímavé, že Gaborova relace neurčitosti byla již v roce 1951 francouzským fyzikem R. Valéem [25] převedena na tvar, v němž vystupují jenom informační entropie a který představuje prototyp entropických relací neurčitosti v kvantové mechanice. O šest let později navrhl Hirschmann entropickou relaci neurčitosti pro polohu a hybnost. Ve své disertační práci z roku 1971 *Entropická formulace principu neurčitosti* B. Mamojka [24] formuloval obecně princip neurčitosti pro dvě nekomutující veličiny pomocí Shannonových entropií a jiných entropických měr neurčitosti. Kvůli své osobní tragédii (mezitím úplně oslepl) publikoval své výsledky až roku 1974 [25], o jeden rok později než Everett [6]. Od té doby se entropickými relacemi neurčitosti zabývali mnozí autoři (viz např. [10] a odkazy tam uvedené) a staly se uznávanou alternativou slavných Heisenbergových relací neurčitosti.

3. Míry neurčitosti

Jak již bylo řečeno, v kvantové fyzice lze každé pozorovatelné veličině A přiřadit jistou náhodnou proměnnou $\tilde{x}_A$. Na vyjádření neurčitosti proto můžeme aplikovat teorii pravděpodobnosti. Nejdůležitější veličinou vystupující v jakékoliv relaci neurčitosti je tzv. „neurčitost“ náhodné proměnné $\tilde{x}_A$ přiřazená určité měřitelné veličině A. Udává, jak „neurčité“ jsou v průměru výsledky náhodného experimentu, resp. měření veličiny A. V teorii pravděpodobnosti se setkáváme s několika mírami neurčitosti. Abychom je popsali, uvažujme náhodnou proměnnou charakterizovanou pravděpodobnostním schématem na str. 316. Míry neurčitosti náhodné proměnné dělíme do dvou různých tříd:

(i) *Momentové míry*, udávající neurčitost náhodné proměnné prostřednictvím jejích centrálních statistických momentů. Ve svých definicích zahrnují jak hodnoty náhodné proměnné, tak i jejich pravděpodobnosti.

(ii) *Pravděpodobnostní* nebo *entropické* míry neurčitosti, jež obsahují pouze pravděpodobnosti náhodné proměnné odpovídající jejím hodnotám.

Alespoň intuitivně je nyní zřejmé, že neurčitost U může být připsána jakékoliv měřené veličině a závisí na počtu n možných výsledků měření. Při výběru správné míry pro neurčitost U měřené veličiny předpokládáme, že čím více alternativ pro výsledek měření existuje, tím bude neurčitost větší.[2]) Závislost $U = F(n)$ musí být proto nutně

[2]) Jestliže můžeme při měření dostat pouze jeden možný výsledek, pak je neurčitost pochopitelně rovna nule, tj. $U = 0$.

rostoucí funkcí n. Vykonáme-li současně dvě různá náhodná měření s počtem možných výsledků n a m, potom celková neurčitost obou měření je dána součtem neurčitostí jednotlivých nezávislých měření. Na druhé straně se počet výsledků realizovaných v obou měřeních rovná součinu $q = n \cdot m$, a neurčitost by tedy měla vyhovovat funkcionální rovnici

$$U(q = nm) = U(n) + U(m),$$

kde $U(n)$ a $U(m)$ jsou neurčitosti pro první a druhé měření. Její jednoduché řešení [11]

$$U(n) = k \ln n \tag{7}$$

představuje historicky první míru neurčitosti, kterou roku 1928 americký inženýr Hartley nazval „informací“ [13]. Jako míra neurčitosti však může být použita pouze v případě, kdy pravděpodobnosti jednotlivých výsledků měření jsou *a priori* stejné. Pokud není tato podmínka splněna, musíme přejít k zobecněnému tvaru odvozenému Shannonem

$$U = k \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \ln\bigl[1/P(x_i)\bigr]. \tag{8}$$

Pro $k = 1$ vztah (8) definuje Shannonovu (nebo informační) entropii S, jež představuje nejdůležitější entropickou míru neurčitosti náhodné proměnné [11]. Pro diskrétní náhodnou proměnnou $\tilde{x}$ charakterizovanou uvedeným pravděpodobnostním schématem lze entropii vyjádřit ve tvaru

$$S = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i) \ln\bigl[P(x_i)\bigr]. \tag{9}$$

Ve fyzice však častěji pracujeme se spojitými veličinami. Z matematického hlediska je entropie spojité náhodné proměnné dána obecným Kolgomorovovým integrálem [17], ale abychom nalezli vyhovující tvar Shannonovy entropie pro spojitou náhodnou proměnnou $\tilde{x_i}$ s hustotou pravděpodobnosti $p(x)$, rozdělíme x-ovou osu na n ekvidistantních intervalů. Pravděpodobnost, že $\tilde{x_i} \in \langle x_i, x_i + \Delta x_i \rangle$, je přibližně $P(x_i) \approx p(\langle x_i \rangle)\Delta x$, kde $\langle x_i \rangle$ náleží i-tému intervalu. Dosazením $P(x_i)$ do Shannonovy entropie dostaneme

$$\begin{aligned} S(\tilde{x_i}) &\approx -\sum_{i=1}^{n} p(\langle x_i \rangle)\Delta x \ln\bigl[p(\langle x_i \rangle)\Delta x\bigr] = \\ &= -\sum_{i=1}^{n} p(\langle x_i \rangle) \ln\bigl[p(\langle x_i \rangle)\bigr]\Delta x - \sum_{i=1}^{n}\bigl[(p(\langle x_i \rangle)\Delta x\bigr] \ln(\Delta x). \end{aligned}$$

Přechodem k infinitezimálním intervalům obdržíme

$$S(\tilde{x_i}) = S_1 + S_2,$$

kde

$$S_1 = -\int p(x) \ln\bigl[p(x)\bigr]\, \mathrm{d}x, \qquad S_2 = -\lim_{\Delta x \to 0} \ln(\Delta x) = \infty.$$

S_1 je nazývána *diferenciální entropií* a je obecně chápána jako entropie spojité náhodné proměnné $\tilde{x}_i$

$$S_{\tilde{x}_i} = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln\big[p(x)\big]\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Míry neurčitosti náhodné proměnné se většinou udávají prostřednictvím statistických momentů k-tého řádu (viz např. [7]). Pro náhodnou veličinu $\tilde{x}$ se spojitým, popř. diskrétním spektrem přípustných hodnot se zavádějí standardním způsobem[3])

$$m(\tilde{x}-c)^{(k)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x\rangle)^k\, p(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{pro spojitou náhodnou veličinu,}$$

$$m(\tilde{x}-c)^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - c)^k p_i, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{pro diskrétní náhodnou veličinu.}$$

Speciálně pro $c = 0$ se momenty $m(\tilde{x})^{(k)}$ nazývají *počáteční* a pro $c = m(\tilde{x})^{(1)} = \langle x\rangle$ *centrální*. Konkrétně druhý centrální statistický moment $m(\tilde{x} - \langle x\rangle)^{(2)}$ potom určuje *rozptyl* (disperzi) náhodné proměnné $\tilde{x}$

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x\rangle)^2\, p(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{resp.} \qquad \sigma = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \langle x\rangle)^k\, p_i,$$

který se často používá jako míra (ne)přesnosti fyzikálního měření. Jak již bylo řečeno, právě disperze hraje klíčovou úlohu ve standardních Heisenbergových relacích neurčitosti.

4. Formulace entropických relací neurčitosti

Dříve než přistoupíme k formulaci entropických relací neurčitosti, připomeňme rozdíl mezi termodynamickou (Clausiusovou) a informačně-teoretickou (Shannonovou) entropií. Termodynamická entropie je v klasické fyzice jednoznačně definována a má známý rozměr. Při statistickém popisu termodynamického systému Clausiusově entropii odpovídá výraz obsahující pouze statistické veličiny termodynamického systému; nazývá se Boltzmannovou-Gibbsovou entropií a určuje také fyzikální rozměr Clausiusovy entropie. Naproti tomu Shannonova entropie je vždy *bezrozměrná*.

Když Shannon nalezl výraz pro neurčitost náhodné veličiny, hledal pro něj i vhodné pojmenování. Vzhledem k tomu, že je *formálně* podobný výrazu pro Boltzmannovu-Gibbsovu entropii, na radu známého matematika Jánose von Neumanna jej nazval entropií. Von Neumann k tomu poznamenal, že stejně nikdo přesně neví, co entropie je. Přes stejný název je potřeba zdůraznit, že termodynamická a informačně-teoretická entropie představují dva různé pojmy. Dále budeme pod pojmem entropie

[3]) Přesné definice najde český čtenář také např. ve známé knize Bartsch, H. J.: *Matematické vzorce*, SNTL, Praha 1987, s. 738.

vždy rozumět informačně-teoretickou (Shannonovu) entropii.[4]) Informačně-teoretická entropie představuje *bezrozměrnou* veličinu jak pro diskrétní, tak pro spojité náhodné veličiny. Zatímco v případě diskrétních náhodných veličin je informační entropie z matematického hlediska jednoznačně definována, její modifikace pro spojité náhodné veličiny je ještě stále nevyřešený problém [25]. Jak jsme již ukázali, informační entropie $S(\tilde{x}_c)$ v případě spojitých náhodných veličin vždy diverguje; snadno to lze zdůvodnit skutečností, že hodnota informační entropie je v podstatě dána logaritmem počtu přípustných stavů náhodné veličiny, jichž u diskrétních veličin obvykle bývá konečný počet, zatímco u spojitých náhodných veličin jich může být nekonečně mnoho. Divergující informační entropie spojité náhodné veličiny by pochopitelně stěží mohla být využitelná ve fyzice i v jiných vědních oborech. Proto se v současné době divergence $S(\tilde{x}_c)$ obchází „renormalizací“ (podobně jako v kvantové elektrodynamice renormalizujeme některé divergující veličiny). V tomto případě jednoduše neuvažujeme člen S_2 a jako „diferenciální entropii“ pro spojité náhodné veličiny vezmeme pouze S_1. Tak se ale u integrálu (10) v argumentu logaritmu nutně objeví veličiny, které mají fyzikální rozměr, což je fyzikálně nepřípustné. Pomineme-li však tento nedostatek, z čistě *matematického* hlediska nám S_1 dává cenné informace o neurčitosti spojité náhodné veličiny $\tilde{x}_c$ [22]. K interpretaci S_1 lze přistupovat dvěma způsoby. Buď funkci hustoty pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny $p(x)$ pokládáme za čistě matematickou veličinu *nemající* fyzikální rozměr a vztah (10) pro $S_1(\tilde{x}_c)$ chápeme jako formu funkcionálu, který $p(x)$ přiřazuje jistou reálnou hodnotu S_1; tento funkcionál se nazývá Shannonovým entropickým funkcionálem a má velký význam také v teorii pravděpodobnosti a matematické statistice [29]. Druhou možností je předpokládat, že hustotu pravděpodobnosti v argumentu logaritmu dělíme jednotkovou veličinou stejného rozměru. Ukázalo se, že hodnota přiřazená funkcionálem S_1 hustotě pravděpodobnosti $p(x)$ má jednu význačnou vlastnost: čím je funkce $p(x)$ „ostřejší“ (tzn. neurčitost spojité náhodné veličiny menší), tím je S_1 menší. S_1 je tudíž monotónně klesající funkcí „ostrosti“ funkce $p(x)$.

Abychom demonstrovali vlastnosti Shannonova funkcionálu, uvažujme spojitou náhodnou veličinu $\tilde{x}_c$ s jednoduchou funkcí hustoty pravděpodobnosti

$$f_l(x) = \begin{cases} 1/l & \text{pro } x \in \langle 0, l \rangle, \\ 0 & \text{pro } x < 0 \text{ a } x > l. \end{cases}$$

Dosadíme-li $f_l(x)$ do Shannonova funkcionálu, dostaneme $S_1 = \ln l$. V tomto případě „šířka“ l funkce $f_l(x)$ udává její „ostrost“ (anglicky „peakedness“); čím je l větší, tím je větší i neurčitost $\tilde{x}_c$. Vidíme, že pokud lze přesně definovat ostrost funkce $f_l(x)$, získáme jednoznačný vztah mezi ní a mírou neurčitosti S_1 veličiny $\tilde{x}_c$.

Na tomto místě si čtenář právem může položit otázku, proč se vůbec snažíme zformulovat relace neurčitosti pomocí informační entropie spojitých kvantových ve-

[4]) Jednoznačný vztah mezi těmito veličinami zjistil v roce 1957 Jaynes v rámci tzv. principu maximální entropie, který se stal velmi účinným nástrojem ve statistické mechanice [16].

ličin, narážíme-li na právě uvedené problémy. Vždyť součin středních kvadratických odchylek těchto veličin je z matematického hlediska jednodušší a rozměrově správný. Důvody jsou tyto:

(i) střední kvadratická odchylka někdy není vhodnou mírou neurčitosti (nepřesnosti) měření kvantových veličin (např. pro částici v nekonečně hluboké jednorozměrné potenciálové jámě, jak bude ukázáno dále);

(ii) v některých případech diskrétních nekomutujících veličin je součin středních kvadratických odchylek roven nule a odpovídající relace neurčitosti neklade žádné omezení na neurčitost současného měření těchto veličin v rozporu s formalismem kvantové mechaniky; takové chování budeme demonstrovat na kvantovém systému částice se spinem $\frac{1}{2}$.

Naproti tomu měříme-li neurčitost nekomutujících kvantových veličin informačně-teoretickou entropií, je součet těchto entropií *vždy* větší než nula. Je to tím, že relace neurčitosti dává do funkčního vztahu neurčitosti kanonicky sdružených kvantových veličin. Jestliže tyto neurčitosti vyjádříme prostřednictvím informační entropie, jejich suma bude vždy kladná. Platí to i v případě spojitých kvantových veličin: když je „ostrost“ funkce hustoty pravděpodobnosti jedné z nich velmi malá, potom je „ostrost“ kvantově sdružené veličiny velmi velká. Součet příslušných diferenciálních entropií charakterizujících ostrosti hustot pravděpodobnosti je pokaždé kladný, a to i když jedna z entropií vychází záporná; přitom pro všechny fyzikální veličiny samozřejmě používáme stejnou soustavu jednotek. Je třeba zdůraznit, že diferenciální entropie „sama o sobě“ je pouze relativní veličina a skutečný význam získá až ve spojení s entropiemi jiných veličin. V případě dvou komutujících kvantových veličin nejsou ostrosti jejich hustoty pravděpodobnosti nijak vázané; proto součet odpovídajících entropií může mít libovolnou (i zápornou) hodnotu. Relace neurčitosti vyjádřená jako součet entropií tedy vystihuje *princip* neurčitosti dvou nekomutujících veličin v kvantové fyzice lépe než součin středních kvadratických odchylek, jenž za určitých okolností může být nulový nebo dokonce nekonečný.

V dalších úvahách musíme mít na zřeteli fakt, že rozličné míry neurčitosti představují pouze jisté číslo, jež přiřazujeme celé funkci, abychom vhodně charakterizovali její tvar. S podobným problémem se nesetkáváme zdaleka jenom v souvislosti s relacemi neurčitosti v kvantové fyzice, ale i v jiných vědních disciplínách.[5]) Toto číslo je pochopitelně třeba volit tak, aby skutečně vhodně vystihovalo vlastnost, kterou chceme vyjádřit. Pro použití entropie jako míry neurčitosti hovoří skutečnost, že střední kvadratická odchylka kvantové veličiny nemusí být vždy nejvhodnější, obzvláště v případech, kdy hustota pravděpodobnosti uvažované kvantové veličiny má několik vzdálených ostrých maxim. Momentové míry neurčitosti pak závisí na vzdálenostech těchto maxim a nevyjadřují adekvátně rozložení hustoty pravděpodobnosti.

[5]) Např. v teorii komunikace komplikovanému signálu přiřazujeme efektivní délku trvání a efektivní šířku frekvenčního pásma.

Uveďme jednoduchý příklad. Nechť náhodná proměnná $\tilde{x_c}$ má diskrétní hustotu pravděpodobnosti

$$p(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < a, \\ 1/N, & a \leqq x \leqq b, \\ 0, & b < x < c, \\ 1/N, & c \leqq x \leqq d, \\ 0, & d < x < +\infty, \end{cases} \tag{11}$$

kde $N = d - c + b - a$. Zaveďme veličiny $L_1 = b - a$ a $L_2 = d - c$ udávající šířku intervalů, na nichž je hustota pravděpodobnosti různá od nuly, veličinu $T = \frac{1}{2}(d+c-b-a)$, jež charakterizuje symetrii pravděpodobnostní funkce, a střední vzdálenost intervalů s nenulovou pravděpodobností od počátku $L = \frac{1}{4}(a + c - b - d)$. Střední kvadratická odchylka Δx proměnné $\tilde{x_c}$ vychází

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = L^2 \frac{L_1 L_2}{(L_1 + L_2)^2} + \frac{1}{12} \left(L_1^2 - L_1 L_2 + L_2^2 \right).$$

Vidíme, že $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ závisí explicitně na parametru L. Ačkoliv pravděpodobnost je nenulová pouze ve dvou oblastech, momentová míra neurčitosti je funkcí jejich vzdálenosti.

Poměrně snadno lze ukázat, že použijeme-li pro neurčitost $\tilde{x_c}$ Shannonovu entropii, závislost na L vymizí. Dosazením za rozdělení $p(x)$ z (11) do (10) zjistíme, že

$$S_x = \ln(L_1 + L_2).$$

Vidíme, že entropie $S(x)$ nezávisí na L, ale jen na šířce oblastí s nenulovou pravděpodobností. V tomto smyslu je proto vhodnějším vyjádřením neurčitosti náhodné proměnné $\tilde{x_c}$.

Ilustrujme rozdíl mezi oběma typy měr neurčitosti ještě na příkladu difrakce svazku částic procházejících štěrbinou [34]. Nechť monochromatická rovinná vlna reprezentující svazek částic s hybností p_0 dopadá na štěrbinu o šířce $2a$. Svazek může být popsán vlnovými funkcemi $\psi = \psi(x)$ a $\varphi = \varphi(p)$, jež lze vzájemně převádět jednu na druhou pomocí Fourierovy analýzy.[6]) Protože v průřezu je hustota částic stejná, dostáváme pro vlnovou funkci vztah

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2a}} & \text{pro } |x| < a, \\ 0 & \text{pro } |x| > a. \end{cases}$$

Pro Fourierův obraz této funkce dostáváme

$$\varphi(p) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{\sin(ap)}{ap}.$$

[6]) Z hlediska kvantové mechaniky jde o dvě různé reprezentace stavu $|\psi\rangle$.

Hustoty pravděpodobnosti pro polohu a hybnost jsou dány obvyklými vztahy $p(x) = |\psi(x)|^2$, $q(p) = |\psi(p)|^2|$ a pro střední kvadratické odchylky vychází $\langle(\Delta x)^2\rangle = a/\sqrt{3}$, $\langle(\Delta p)^2\rangle = +\infty$. Pokud bychom $\langle(\Delta p)^2\rangle$ vzali jako míru neurčitosti hybnosti, vidíme, že jednak by hybnost byla zcela neurčitá a jednak navíc *nezávislá* na šířce štěrbiny $2a$, což je v rozporu s principem neurčitosti. Situace se změní, použijeme-li jako míru neurčitosti pro hybnost entropii. V daném případě je dána vztahem

$$S_p = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\pi}\,\frac{(\sin ap)^2}{(ap)^2}\,\ln\left[\frac{a}{\pi}\,\frac{(\sin ap)^2}{(ap)^2}\right]\,\mathrm{d}p = \ln\left(\frac{\pi}{a}\right) + \frac{I}{\pi},$$

přičemž [31]

$$I = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sin y)^2}{y^2}\ln\left[\frac{(\sin y)^2}{y^2}\right]\,\mathrm{d}y = 2\pi(1-\gamma) \approx 2{,}656,$$

kde γ značí Eulerovu konstantu. Hodnota S_p je tedy konečná a závisí na parametru šířky štěrbiny a.

Názorně zde vidíme rozdíl mezi momentovou a entropickou mírou neurčitosti. Entropická relace neurčitosti potom představuje sumu entropií nekomutujících veličin. Obecně k ní dojdeme následovně: nechť $|\psi\rangle$ je normalizovaný vektor v n-rozměrném Hilbertově prostoru a veličiny A, B mají nedegenerovaná spektra vlastních vektorů $\{|a_i\rangle\}$, $\{|b_i\rangle\}$ pro $i = 1, \ldots, n$. Entropická relace neurčitosti má tvar nerovnosti [33]

$$S_A + S_B \geqq S_{AB}, \tag{12}$$

kde pro diskrétní veličiny

$$S_A = -\sum_i |\langle\psi|a_i\rangle|^2 \ln|\langle\psi|a_i\rangle|^2, \quad S_B = -\sum_j |\langle\psi|b_j\rangle|^2 \ln|\langle\psi|b_j\rangle|^2$$

a S_{AB} je kladná veličina, která představuje netriviální dolní hranici pravé strany nerovnosti (12), tj. infimum součtu entropie dvou nekomutujících spojitých veličin; součet provádíme přes všechny přípustné kvantové stavy systému. Analogicky pro spojité veličiny X a P popsané vlnovými funkcemi $\psi(x)$ a $\varphi(p)$ má (12) podobu

$$S_x + S_p \geqq S_{xp},$$

kde

$$S_x = -\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 \ln|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x, \qquad S_p = -\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(p)|^2 \ln|\varphi(p)|^2\,\mathrm{d}p$$

představují diferenciální entropie kvantových veličin X a P, S_{xp} představuje netriviální dolní hranici uvedené nerovnosti.

Entropická relace neurčitosti pro polohu a hybnost kvantového systému popsaného vlnovou funkcí $\psi(x)$ má tvar [5]

$$S_x + S_p \geqq 1 + \log\pi,$$

kde S_x a S_p jsou diferenciální entropie pro polohu a hybnost

$$S_x = -\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \log|\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x \qquad \text{a} \qquad S_p = -\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(k)|^2 \log|\varphi(k)|^2 \,\mathrm{d}k,$$

přičemž

$$\varphi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mathrm{i}kx)\psi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad k = \frac{p}{\hbar}.$$

Otevřenou otázkou zůstává hodnota spodní hranice S_{AB}, resp. S_{xp} [10]. Maasen a Uffink [5, 20] ukázali, že skutečně *existuje* netriviální spodní hranice pro jakékoliv dvě nekomutující veličiny [1, 30]. Byly také vypočteny hodnoty S_{AB} a S_{xp} pro vyšší kvantové stavy některých kvantových systémů, např. pro harmonický oscilátor [23] a atom vodíku [36]. Entropické relace neurčitosti se staly důležitou součástí kvantové teorie. Podrobnější rozbor jejich využití však přesahuje rozsah tohoto článku; zájemce lze odkázat např. na [12].

5. Příklady

Jak standardní, tak entropické relace neurčitosti byly nalezeny pro mnoho důležitých kvantových systémů [23, 27, 30, 33, 36]. Zde se budeme nejprve věnovat jednomu z nejjednodušších modelů — nekonečně hluboké, jednorozměrné potenciálové jámě. Také tento elementární příklad nám umožňuje vyzdvihnout výhody entropických relací neurčitosti (zde konkrétně pro polohu a hybnost částice) proti standardní Heisenbergově formulaci. Důvodem je analytický průběh hustoty pravděpodobnosti pro hybnost p, pro který jsou charakteristická dvě výrazná lokální maxima, jež se od sebe vzdalují úměrně kvantovému číslu n studovaného stavu částice. Průběh hustot pravděpodobnosti polohy x, resp. hybnosti p částice pro stavy $n = 1, 5$ a 10 je znázorněn na obr. 1 a, c, e, resp. na obr. 1 b, d, f.

Pro nekonečně hlubokou jednorozměrnou potenciálovou jámu je charakteristický průběh potenciálu $V(x)$

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } |x| \leqq a, \\ +\infty & \text{pro } |x| > a. \end{cases}$$

Řešení příslušné Schrödingerovy rovnice dělíme na sudá a lichá. Sudá normovaná řešení (sudé stavy) lze popsat vlnovými funkcemi [5, 7]

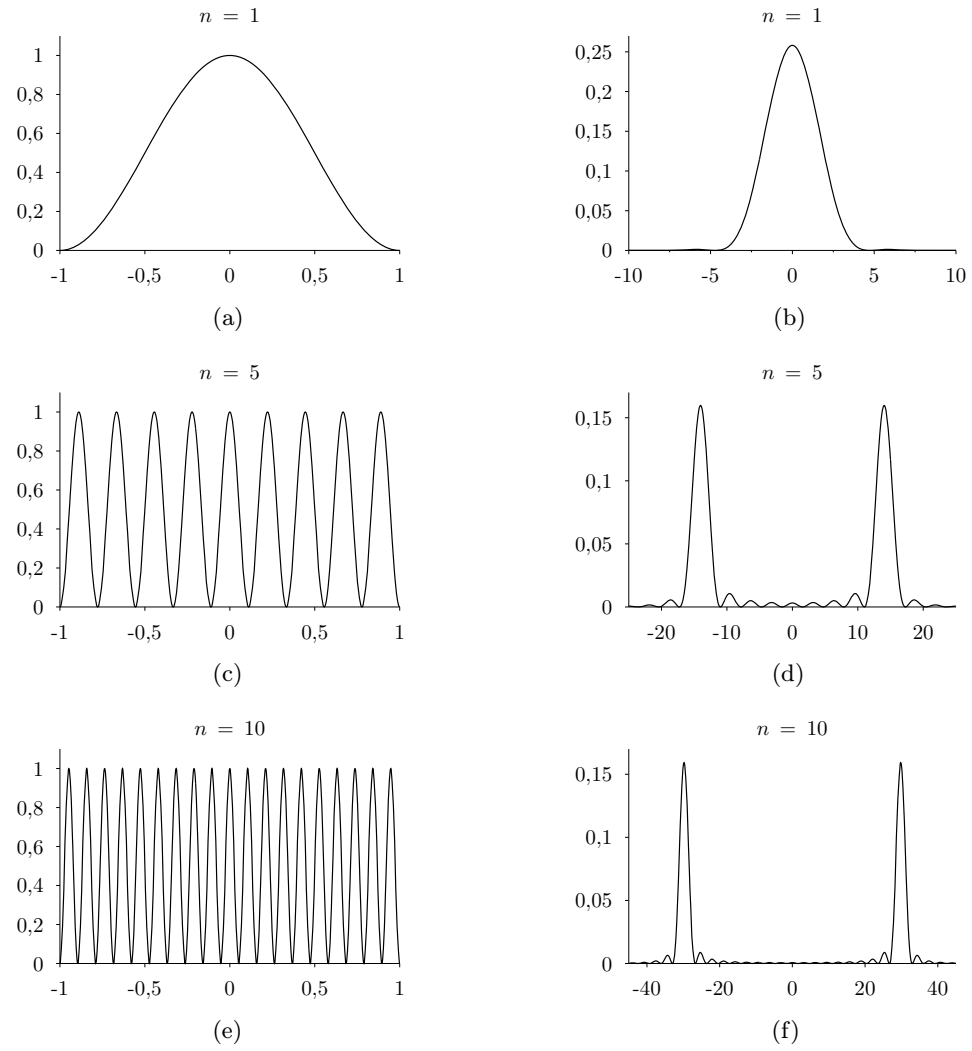
$$\psi_n^+(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left[\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{a}\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots;$$

lichá normovaná řešení (liché stavy) potom

$$\psi_n^-(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left[\frac{n\pi x}{a}\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots \ .$$

Pro jednoduchost budeme dále pracovat se sudými funkcemi $\psi_n^+(x) = \psi_n(x)$, jimž odpovídají vlastní hodnoty energie

$$E_n = \frac{\hbar^2(2n-1)^2\pi^2}{8ma^2}\,.$$



Obr. 1. Hustota pravděpodobnosti pro polohu x (a, c, e) a hybnost p (b, d, f) částice v nekonečně hluboké jednorozměrné potenciálové jámě pro tři různé hodnoty kvantového čísla n.

Vlnovou funkci $\varphi(p)$ v impulsové reprezentaci získáme Fourierovou transformací

$$\varphi_n(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-a}^{+a} \psi_n(x) \exp(-\mathrm{i}px/\hbar)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sqrt{\frac{a}{2\pi\hbar}} \left\{ \frac{\sin[(n-\frac{1}{2})\pi - ap/\hbar]}{[(n-\frac{1}{2})\pi - ap/\hbar]} + \frac{\sin[(n-\frac{1}{2})\pi + ap/\hbar]}{[(n-\frac{1}{2})\pi + ap/\hbar]} \right\}.$$

Protože $\psi_n(x)$ a $\varphi_n(p)$ jsou symetrické funkce, střední kvadratická odchylka polohy a hybnosti $\langle(\Delta x)^2\rangle$ a $\langle(\Delta p)^2\rangle$ jako funkce kvantového čísla n jsou dány integrály

$$\langle(\Delta x)^2\rangle = 2\int_0^a \frac{1}{a}\cos^2\left[\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{a}\right] x^2\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{3}\left[1-\frac{6}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}\right],$$

$$\langle(\Delta p)^2\rangle = \left(\frac{\hbar}{2\pi a}\right)^2 2\int_0^\infty \varphi(\tilde{x})\tilde{x}^2\,\mathrm{d}\tilde{x} = \frac{\hbar^2}{4}\left[\frac{(2n-1)^2\pi^2}{a^2}\right],$$

kde

$$\varphi(\tilde{x}) = \left\{\frac{\sin[(n-\frac{1}{2})\pi-\tilde{x}]}{[(n-\frac{1}{2})\pi-\tilde{x}]} + \frac{\sin[(n-\frac{1}{2})\pi+\tilde{x}]}{[(n-\frac{1}{2})\pi+\tilde{x}]}\right\}^2 \quad \text{a} \quad \tilde{x} = \frac{ap}{\hbar}.$$

Entropie polohy a hybnosti jako funkce kvantového stavu vychází

$$S_x(n) = -\int_{-a}^{+a}\cos^2\left[\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{a}\right]\ln\left\{\cos^2\left[\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{a}\right]\right\}\,\mathrm{d}x,$$

$$S_p(n) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\tilde{x})\ln\left[\varphi(\tilde{x})\right]\,\mathrm{d}\tilde{x}.$$

Abychom porovnali entropické a standardní relace neurčitosti, byly vypočteny entropie polohy a hybnosti pro $n = 1, 2, \ldots, 10$ s použitím programu *Mathematica* (viz též [15]); výsledky jsou vyneseny na obr. 2. Vidíme, že entropie polohy se téměř nemění a entropie hybnosti vzrůstá pro $n > 2$ velmi pomalu, zatímco $\langle(\Delta p)^2\rangle$ roste v závislosti na druhé mocnině výrazu $2n-1$. Použitím rozdílných měr neurčitosti potom získáme odlišné závislosti relací neurčitosti na kvantovém čísle n (obr. 2 c a d).

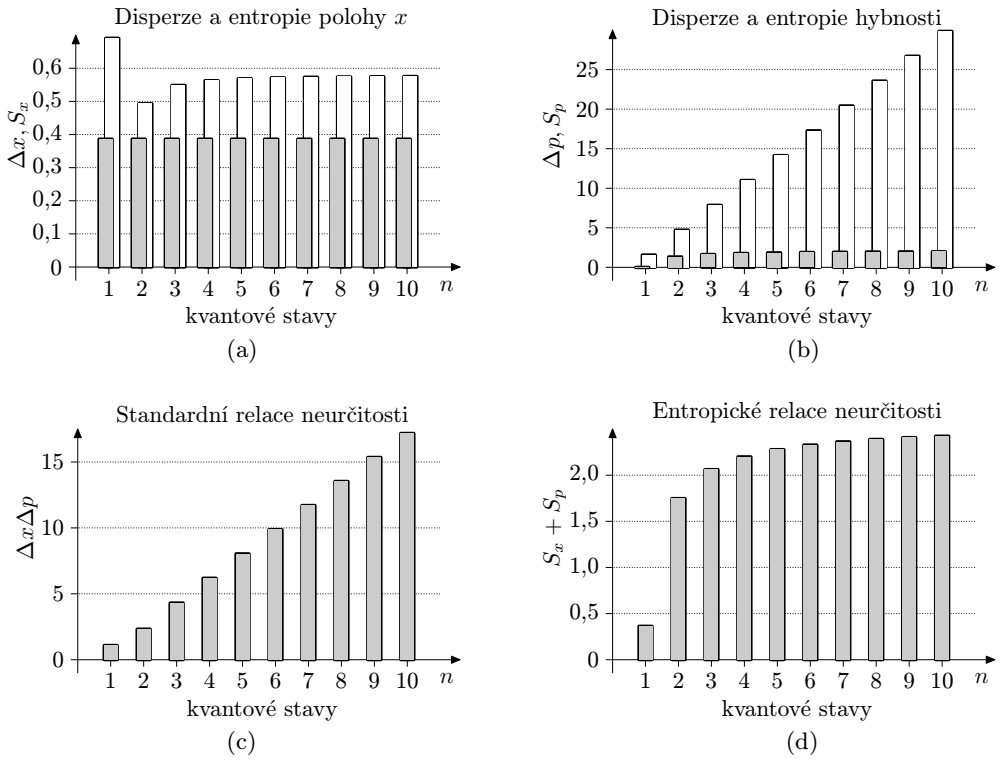
Na obr. 1 a, b vidíme, že pravděpodobnostní rozdělení polohy i hybnosti má v základním stavu $n = 1$ pouze jedno maximum (pro střední hodnoty $x = 0$ a $p = 0$), zatímco pro vyšší stavy $n \geqq 2$ již u hustoty pravděpodobnosti hybnosti nalézáme dvě výrazná maxima (obr. 1 d, f). Můžeme tak očekávat, že součin neurčitostí standardních relací neurčitosti pro $n = 1$ vychází relativně malý ($0{,}6\hbar$ — viz obr. 2 c) a jen mírně se liší od minimálního součinu neurčitostí $\hbar/2$ daného Heisenbergovými relacemi neurčitosti. Pro vyšší stavy se v důsledku existence zmíněných lokálních extrémů střední kvadratická odchylka a entropie hybnosti značně liší. Z toho vyplývá, že použití entropie jako míry neurčitosti odpovídá obecně více požadavkům kladeným na míru neurčitosti.

V druhém příkladu se podíváme na rozdílné vlastnosti standardních a entropických relací neurčitosti diskrétní kvantové veličiny. Uvažujme systém obsahující částici se spinem $\hbar/2$ a najděme standardní i entropické relace neurčitosti pro složky momentu hybnosti J_x, J_y, J_z. Průměty spinu do souřadnicových os x, y, z reprezentují operátory

$$\hat{\sigma}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0, & 1\\ 1, & 0\end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0, & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i}, & 0\end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & -1\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Podle rovnice (4) obdržíme standardní relace neurčitosti pro J_x a J_y

$$U_s = (\Delta J_x)(\Delta J_y) \geqq \frac{\hbar^2}{2}\left|\langle\psi|\hat{J}_z|\psi\rangle\right|.$$



Obr. 2. (a) Disperze (nevyplněné sloupce) a entropie (vyplněné sloupce) polohy, (b) disperze (nevyplněné sloupce) a entropie (vyplněné sloupce) hybnosti, (c) součin neurčitostí polohy a hybnosti (levá strana standardních relací neurčitosti) a (d) součet entropií polohy a hybnosti (levá strana entropických relací neurčitosti) pro různé kvantové stavy částice v nekonečně hluboké jednorozměrné potenciálové jámě ($\hbar = 1$).

Stavový vektor uvažovaného kvantového systému je spinor $|\psi\rangle$ o dvou obecně komplexních složkách

$$|\psi\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

jež splňují normovací podmínku

$$a_1 a_1^* + a_2 a_2^* = 1. \tag{15}$$

Součin středních kvadratických odchylek pro složky J_x a J_z obdržíme ve tvaru

$$U_s(J_z, J_x) = \langle(\sigma_x - \langle\sigma_x\rangle)^2\rangle\langle(\sigma_z - \langle\sigma_z\rangle)^2\rangle. \tag{16}$$

Z (13) a (14) plyne, že

$$\langle\sigma_x\rangle = \frac{\hbar}{2}(a_1^* a_2 + a_1 a_2^*), \qquad \langle\sigma_z\rangle = \frac{\hbar}{2}(a_1^* a_1 - a_2 a_2^*), \tag{17}$$

$$\langle\sigma_x^2\rangle = \langle\sigma_z^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4}. \tag{18}$$

Dosazením (17) a (18) do (16) dostaneme

$$U_s(J_z, J_x) = \frac{\hbar^4}{16}\left[1 - (a_1^* a_2 + a_1 a_2^*)^2\right]\left[1 - (a_1^* a_1 - a_2 a_2^*)^2\right]. \tag{19}$$

Vlastnosti $U_s(J_z, J_x)$ lépe vyniknou, jestliže a_1 a a_2 parametrizujeme zavedením nových proměnných r a φ [7])

$$a_1 = r_1 \exp(\mathrm{i}\varphi_1), \qquad a_2 = r_2 \exp(\mathrm{i}\varphi_2), \qquad \varphi = \varphi_2 - \varphi_1. \tag{20}$$

Normovací podmínka (15) bude splněna za předpokladu

$$r_1 = r, \qquad r_2 = \sqrt{1 - r^2}.$$

V nových proměnných pak (19) přejde na tvar

$$U_s(r, \varphi) = \frac{\hbar^4}{16} r^2(1 - r^2)\left[1 - 4r^2(1 - r^2)\cos^2\varphi\right]. \tag{21}$$

K nalezení spodní a horní hranice U_s musíme nalézt lokální extrémy, které jsou kořeny rovnic

$$\frac{\partial U_s}{\partial \varphi} = 2\hbar^4 r^4 (1 - r^2)^2 \cos\varphi \sin\varphi = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial U_s}{\partial r} = \frac{\hbar^4}{2} r\left\{(1 - 2r^2)\left[1 - 8r^2(1 - r^2)\cos^2\varphi\right]\right\} = 0. \tag{23}$$

Snadno ověříme, že pro $r = 0$, 1 má U_s minimální hodnotu rovnou nule. Odpovídající spinory jsou

$$|\psi_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad |\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Naopak pro $r = a/\sqrt{2}$ nabývá U_s maximální hodnoty $\hbar^4/16$. Standardní relace neurčitosti jsou tak ohraničeny následovně:

$$0 \leqq \langle(\sigma_x - \langle\sigma_x\rangle)^2\rangle\langle(\sigma_z - \langle\sigma_z\rangle)^2\rangle \leqq \frac{\hbar^4}{16}.$$

Vidíme, že pro jisté stavy součin neurčitostí může být roven nule a neexistuje tak žádná kladná dolní hranice součinu neurčitostí J_x a J_z.

Obraťme nyní pozornost k entropickým relacím neurčitosti, které jsou dány součtem entropií S_{J_x} a S_{J_z}. Vlnové funkce

$$|\psi_z\rangle = a_1|z_1\rangle + a_2|z_2\rangle,$$
$$|\psi_x\rangle = \frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}}|x_1\rangle + \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{2}}|x_2\rangle,$$

[7]) Úhel φ je přitom pouze pomocným parametrem, jehož prostřednictvím vyjádříme komplexní charakter koeficientů a_1 a a_2; *nejedná se o fázi vlnové funkce*. Koeficienty a_1 a a_2 by bylo samozřejmě možné parametrizovat i jiným způsobem.

kde $|x_1\rangle$, $|x_2\rangle$, $|z_1\rangle$ a $|z_2\rangle$ představují vlastní vektory operátorů $\hat{J}_x$ a $\hat{J}_z$, představují dvě různá vyjádření spinoru $|\psi\rangle$ v z- a x-reprezentaci. Pravděpodobnostní schémata pro tyto reprezentace

J_z	$\|z_1\rangle$	$\|z_2\rangle$
P	$a_1 a_1^*$	$a_2 a_2^*$

a

J_x	$\|x_1\rangle$	$\|x_2\rangle$
P	$(a_1 + a_2)(a_1^* + a_2^*)$	$(a_1 - a_2)(a_1^* - a_2^*)$

podle (9) určují Shannonovy entropie S_{J_z} a S_{J_x}

$$\begin{aligned} S_{J_z} &= -a_1 a_1^* \ln a_1 a_1^* - a_2 a_2^* \ln a_2 a_2^*, \\ S_{J_x} &= -\tfrac{1}{2}(a_1 + a_2)(a_1^* + a_2^*) \ln\left[\tfrac{1}{2}(a_1 + a_2)(a_1^* + a_2^*)\right] - \\ &\quad -\tfrac{1}{2}(a_1 - a_2)(a_1^* - a_2^*) \ln\left[\tfrac{1}{2}(a_1 - a_2)(a_1^* - a_2^*)\right] \end{aligned}$$

a suma entropií

$$\begin{aligned} U_e(J_y, J_x) &= S_{J_z} + S_{J_x} = \\ &= -a_1 a_1^* \ln(a_1 a_1^*)\, a_2 a_2^* \ln(a_2 a_2^*) - \\ &\quad - \tfrac{1}{2}(a_1 + a_2)(a_1^* + a_2^*) \ln\left[\tfrac{1}{2}(a_1 + a_2)(a_1^* + a_2^*)\right] - \\ &\quad - \tfrac{1}{2}(a_1 - a_2)(a_1^* - a_2^*) \ln\left[\tfrac{1}{2}(a_1 - a_2)(a_1^* - a_2^*)\right]. \end{aligned}$$

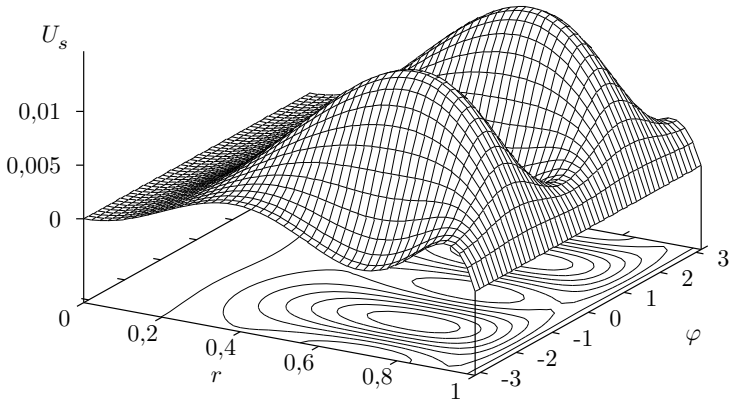
Zavedeme-li opět nové proměnné r, φ podle (20), získáme

$$\begin{aligned} U_e(r, \varphi) &= -r^2 \ln r^2 - (1 - r^2)\ln(1 - r^2) - \\ &\quad - \tfrac{1}{2}(1 + 2r\sqrt{1 - r^2}\cos\varphi) \ln\left[\tfrac{1}{2}(1 + 2r\sqrt{1 - r^2}\cos\varphi)\right] - \\ &\quad - \tfrac{1}{2}(1 - 2r\sqrt{1 - r^2}\cos\varphi) \ln\left[\tfrac{1}{2}(1 - 2r\sqrt{1 - r^2}\cos\varphi)\right]. \end{aligned} \tag{24}$$

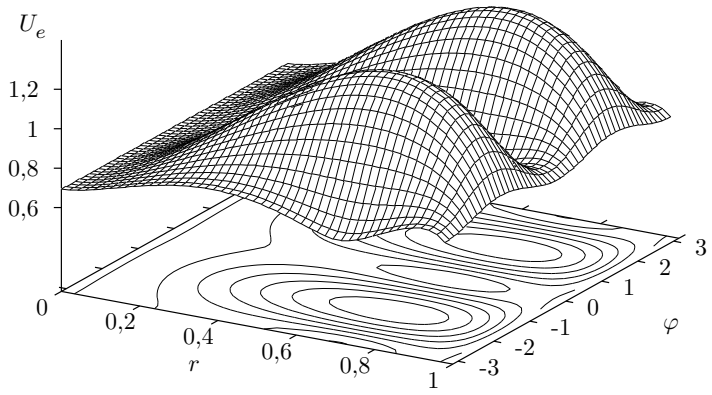
Podobně jako v předcházejícím případě najdeme lokální extrémy funkce $U_e(r, \varphi)$. Minimální hodnoty $\ln 2$ nabývá opět pro $r = 0$, 1 a libovolné φ, zatímco maximální $2 \ln 2$ pro $r = 1/\sqrt{2}$ a $\varphi = \pi/2$. Dostali jsme tak dolní a horní mez pro součet entropií

$$\ln 2 \leqq S(J_x) + S(J_z) \leqq 2 \ln 2.$$

Grafická znázornění závislosti $U_s(r, \varphi)$ a $U_e(r, \varphi)$ jsou vykreslena na obr. 3 a 4. Jak U_s, tak U_e závisí na kvantovém stavu částice. Protože $U_s \in \langle 0,\, 0{,}67\rangle$, pro standardní relace neurčitosti neexistuje kladná dolní mez. Naopak hodnoty funkce U_e k nule nikde neklesají, neboť $U_e \in \langle \ln 2, 2 \ln 2\rangle$.



Obr. 3. Závislost $U_s(r, \varphi)$ pro kvantové stavy systému se spinem $\frac{1}{2}$.



Obr. 4. Závislost $U_e(r, \varphi)$ pro kvantové stavy systému se spinem $\frac{1}{2}$.

6. Shrnutí

Princip neurčitosti bezesporu představuje klíč k pochopení matematického formalismu kvantové mechaniky a k hlubšímu porozumění jeho fyzikálnímu významu. Uvedené nevýhody standardních relací neurčitosti vyvolaly především v minulých dvou desetiletích rostoucí zájem o entropické relace neurčitosti. Jejich význam spočívá především v tom, že umožňují vždy nalézt konečnou kladnou spodní mez pro součet informačních entropií a tím také souvislost mezi nepřesnostmi měření fyzikálních veličin, jejichž operátory spolu nekomutují.

Poděkování. Je milou povinností autorů poděkovat dr. T. Opatrnému za zajímavé diskuse, cenné postřehy a připomínky.

L i t e r a t u r a

[1] Busch, P., Pekka, J. L.: *Minimal Uncertainty and Maximal Information for Quantum Position and Momentum.* J. Phys. *A 20* (1987), 899–901.

[2] Bužek, V., Keitel, C. H., Knight, P. L.: *Sampling entropies and operational phase-space measurement.* Phys. Rev. *A 51* (1995), 2575.

[3] Davydov, A. S.: *Kvantová mechanika.* SPN, Praha 1978, s. 47.

[4] Doughty, M., Gardner, W. R.: *Pitch Characteristic of Short Tones.* Part I and II. J. Exp. Psychol. *37* (1947), 351–372, a *38* (1948), 478–491.

[5] Evans, A. B.: *Uncertainty Principle and Uncertainty Relations: Extension of a Result of Uffink and Hilgevoord.* Found. Phys. *3* (1990), 389–396.

[6] Everett, H.: *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics.* Princeton University Press, Princeton 1973.

[7] Feller, W.: *An Introduction to Probability Theory and its Applications.* Vol. I, Wiley, New York 1968.

[8] Finkel, R. W.: *Generalized Uncertainty Relations.* Phys. Rev. *A 35* (1987), 1488.

[9] Gabor, D.: *Theory of communication.* J. Inst. Eng. *93* (1946), 429–434.

[10] Gonzáles, A. R., Vaccaro, J. A., Barnett, S. M.: *Entropic Uncertainty Relations for Canonically Conjugate Operators.* Phys. Letts. *A 205* (1995), 247–254.

[11] Guiasu, S.: *Information Theory with Applications.* McGraw-Hill, New York 1977.

[12] Halliwell, J. J.: *Quantum-mechanical Histories and the Uncertainty Principle: Information-theoretical inequalities.* Phys. Rev. *D 49* (1993), 2739–2745.

[13] Hartley, R. V.: *Transmission of information.* The Bell Syst. Techn. J. *7* (1928), 535–563.

[14] Heisenberg, W.: *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik.* Z. Phys. *43* (1927), 172.

[15] Ishaki, T.: *Four Mathematical Expressions of the Uncertainty Relation.* Found. Phys. *21* (1991), 1089–1105.

[16] Jaynes, E. T.: Phys. Rev. *106* (1957), 620, a Phys. Rev. *108* (1957).

[17] Kolgomoroff, A. N.: *Theorie der Nachrichtungsübertragung.* D. Verlag d. Wiss., Belin 1957.

[18] Küpfmüller, K.: *Über Einschingvorgänge in Wellenfiltern.* Elektr. Nachrichtentech. *1* (1924), 123–141.

[19] Landau, L. D., Lifšic, J. M.: *Kvantová mechanika.* ALFA, Bratislava 1982, 12.

[20] Maasen, H., Uffink, J. B. M.: *Generalized Entropic Uncertainty Relations.* Phys. Rev. Lett. *60* (1988), 1103–1104.

[21] Majerník, V., Kalužný, J.: *On the Auditory Uncertainty Relations.* Acustica *43* (1979), 172–187.

[22] Majerník, V., Mamojka, B.: *Non-standard Measures for Uncertainty and Organization.* Phys. Scr. *44* (1991), 412–425.

[23] Majerník, V., Opatrný, T.: *Entropic Uncertainty Relations for quantum Oscillator.* J. Phys. *A* (1996), 2187.

[24] Mamojka, B.: *Entropická formulácia relácií neurčitosti.* (Doktorská disertační práce.) UK Bratislava 1971.

[25] Mamojka, B.: *Entropic Formulation of Uncertainty Relations.* Intern. J. Theor. Phys. *11* (1974), 73.

[26] Pišút, J., Gomolčák, L.: *Úvod do kvantovej mechaniky.* ALFA, Bratislava 1975.

[27] Price, W. C., Chissick, S. S. (ed.): *The Uncertainty Principle and Foundations of Quantum Mechanics.* Wiley, New York 1977.

[28] Pulmannova, S., Dvurecemskij, A.: *Uncertainty Principle and Joint Distributions of Observables.* Ann. Inst. Henri Poincaré *42* (1985), 253–265.

[29] Rényi, A: *On the Measures of Entropy and Information.* Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Stat. and Probability *1* (1961), 547.

[30] Sánches-Ruiz, J.: *Maassen-Uffink Entropic Uncertainty Relation for Angular Momentum Observables.* Phys. Letts. *A 181* (1993), 193–199.
[31] Sánches-Ruiz, J.: *Position-momentum entropic uncertainty relation and complementary in single-slit and double-slit experiments.* Phys. Rev. *A 57* (1998), 1519.
[32] Shannon, C. E.: *A Mathematical Theory of Communication.* Bell Syst. Techn. J. *27* (1948), 629–653.
[33] Srinivas, M. D.: *Entropic Formulations of Uncertainty Relations.* Pramana (Indian J. Phys.) *25* (1985), 369–377, a *24* (1985), 673.
[34] Uffink, J. B. M., Hilgevoord, J.: *Uncertainty Principle and Uncertainty Relations.* Found. Phys. *15* (1985), 925–944.
[35] Vallée, M. R.: *Aspects informationnels de certaines relations d'incertitude.* C. R. Acad. Sc. Parris *233* (1951), 1580–1581.
[36] Yanes, R. J., Assche, W. van, Dehesa, J. D.: *Position and Momentum Information Entropies of the D-dimensional Harmonic Oscillator and Hydrogen Atom.* Phys. Rev. *A 50* (1994), 3065–3067, a J. Math. Phys. *35* (1994), 4423.

Středoevropská olympiáda v informatice

Pavel Töpfer, Praha

Studenti středních škol zajímající se hlouběji o informatiku a programování dostávají již řadu let příležitost změřit své síly a schopnosti nejen v národních programátorských soutěžích, ale také v mezinárodním měřítku. Vedle celosvětové mezinárodní olympiády v informatice postupně vzniklo i několik obdobných regionálních soutěží. Studenti z České republiky se od samého počátku účastní středoevropské olympiády, jejíchž prvních pět ročníků se konalo v Rumunsku (Cluj, 1994), v Maďarsku (Szeged, 1995), na Slovensku (Bratislava, 1996), v Polsku (Nowy Sącz, 1997) a v Chorvatsku (Zadar, 1998).

V letošním roce byla uspořádáním v pořadí již šesté Středoevropské olympiády v informatice pověřena Česká republika. Zajištění celé akce se ujali společně pracovníci Fakulty informatiky Masarykovy univerzity v Brně a Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Soutěž se konala ve dnech 2. – 9. 9. 1999 v Brně v prostorách tamní fakulty informatiky. Skupina pracovníků brněnské fakulty v čele s doc. RNDr. Václavem Sedláčkem, CSc., se postarala o organizační a technické zabezpečení soutěže. Při zajišťování doprovodného programu jim pomohli také kolegové z gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně. Pracovní tým pražské Matematicko-fyzikální fakulty UK vedený doc. RNDr. Pavlem Töpferem, CSc., měl na starosti odbornou náplň — přípravu soutěžních úloh, testovacích dat, vyhodnocovacích programů i zajištění samotné soutěže a vyhodnocování a zpracování výsledků.

Doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc. (1960), Kabinet software a výuky informatiky MFF UK, Malostranské náměstí 25, 118 00 Praha 1