Bernard Korte; Jaroslav Nešetřil
Práce Vojtěcha Jarníka v kombinatorické optimalizaci

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 44 (1999), No. 3, 187--200

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/140996`

Práce Vojtěcha Jarníka v kombinatorické optimalizaci

Bernard Korte a Jaroslav Nešetřil

Abstrakt. V článku diskutujeme dva příspěvky Vojtěcha Jarníka. První, z roku 1930, se týká problému minimální kostry grafu a druhý, z roku 1934, je věnován problému euklidovského Steinerova stromu. Bez nadsázky můžeme tvrdit, že tyto práce patří k historickým milníkům kombinatorické optimalizace.

Úvod

Věhlas Vojtěcha Jarníka jakožto významného a slavného matematika je doložen na mnoha místech v tomto článku.

Cílem celého pojednání je seznámit čtenáře s méně známými články [J] a [JK], zasahujícími do oblasti odlišné od té, které se Jarník věnoval nejvíce (tj. teorie čísel, analýza a její základy), totiž do části matematiky známé dnes pod názvem kombinatorická nebo též diskrétní optimalizace. Ve srovnání s dlouhodobými úspěchy Jarníka v teorii čísel se může tento cíl zdát nepatrný. Poznamenejme však, že právě a pouze v těchto příspěvcích se Jarník uvedenými problémy zabýval. Domníváme se, že už jen tento fakt stojí za krátkou zmínku.

Navíc práce [J], [JK] byly dlouhou dobu přehlíženy, nepovšimnuty a dokonce i nyní jsou méně známé. Jsou však důležité a Vojtěch Jarník si za napsání těchto vpravdě průkopnických prací zaslouží naši úctu a uznání. V obou pracích Jarník řešil problémy, které, jak se později ukázalo, patří k základním kamenům kombinatorické optimalizace, oblasti, která se začala plně rozvíjet až v padesátých a šedesátých letech v souvislosti s rozvojem lineárního programování a počítačové vědy.

Obsah:

Děkujeme dr. R. von Randow za jeho pomoc s přípravou tohoto příspěvku.

Vojtěch Jarník's Work in Combinatorial Optimization. KAM Series No. 96-315, March 1996.

Přeložila Eva Milková.

1. Minimální problém

Jarníkův článek [J] je velmi krátký. Minimální problém je formulován a řešen s typickou jarníkovskou přesností a průzračností. Považujeme proto za vhodné připomenout Jarníkův článek téměř celý v původním znění — pouze místo kompletních důkazů tvrzení uvedeme jen jejich kratší shrnutí.

Práce má zvláštní zajímavou formu. Je psána v 1. osobě, ve formě dopisu. Důvod je patrný z podtitulu jejího názvu.

Protože za článkem [J] následuje delší komentář, doplňujeme původní verzi jen několika poznámkami. Pro původní text volíme kurzívu, naše poznámky dáváme do hranatých závorek.

Vojtěch Jarník

O jistém problému minimálním

(Z dopisu panu O. Borůvkovi)

Zajímavou otázku, kterou jste řešil ve své práci „O jistém problému minimálním" (Práce moravské přírodovědecké společnosti, svazek III., spis 3), lze řešiti ještě jiným a — jak se mi zdá — jednodušším způsobem. Dovoluji si sděliti Vám v následujícím své řešení.

[Jarník se tedy rozhodl použít stejný název pro svůj článek jako Borůvka [B1]. Připomeňme, že problém minimální kostry byl poprvé formulován a řešen právě Otakarem Borůvkou, viz [GH] a poznámky níže.]

Budiž dáno n ($n \geqq 2$) prvků, jež označím čísly $1, 2, \ldots, n$. Z těchto prvků sestrojím $\frac{1}{2}n(n-1)$ dvojic $[i,k]$, kdež $i \neq k$; $i, k = 1, 2, \ldots, n$; dvojici $[k,i]$ považuji za totožnou s $[i,k]$. Každé dvojici $[i,k]$ budiž přiřazeno číslo kladné $r_{i,k}$ ($r_{i,k} = r_{k,i}$). Tato čísla $r_{i,k}$ ($1 \leqq i < k \leqq n$) v počtu $\frac{1}{2}n(n-1)$ buďte navzájem různá.

[Je zajímavé poznamenat, že Jarník značil neuspořádanou dvojici symbolem $[i,k]$, který se dnes v teorii grafů standardně pro její označení používá. To je zároveň odchylka od Borůvkova článku [B1], kde $[i,k]$ značí čísla $r_{i,k}$. Skutečnost, že se o číslech $r_{i,k}$, tj. v pozdější terminologii o ohodnocení hran, předpokládalo, že jsou navzájem různá, nebyla ani diskutována, ani ospravedlňována. Zdá se, že si oba, Borůvka i Jarník, jako klasičtí matematici byli vědomi spojitosti problému. Oba však tento případ považovali za důležitý, což je ostatně patrné z aplikací, které uvažovali, viz [B3], [B4] a poznámku uvedenou na konci této části.]

Množství všech dvojic $[i,k]$ označme M. Jsou-li p, q dvě přirozená čísla $\leqq n$, $p \neq q$, nazvu každou skupinu dvojic z M tvaru

$$[p, c_1],\ [c_1, c_2],\ \ldots,\ [c_{s-1}, c_s],\ [c_s, q] \tag{1}$$

řetězcem (p,q). Také jedinou dvojici $[p,q]$ nazývám řetězcem (p,q).

[Terminologie v oblasti teorie grafů není ani dnes ještě zcela jednotná — množinu tvaru (1) nazýváme cestou, tahem, sledem; Jarník uvažuje (1) jako soubor — opakování prvků je dovoleno.]

Částečné množství H z množství M nazvu k o m p l e t n í č á s t í (značka kč), jestliže ke každé dvojici přirozených čísel p, q, jež jsou $\leqq n$ a od sebe různá, existuje v H řetězec (p, q) (tj. řetězec tvaru (1), jehož všechny dvojice patří k H). Existují kč; neboť M samo je kč.

[Jarníkův čistý matematický styl se stal proslulým a standardním; možná zde použil i slovní hříčky: *kč* bylo tehdy, právě tak jako je dnes, blízké zkratce Kč.]

Je-li

$$[i_1, k_1],\ [i_2, k_2],\ \ldots,\ [i_t, k_t] \tag{2}$$

nějaké částečné množství K z množství M, označme

$$\sum_{j=1}^{t} r_{i_j, k_j} = R(K).$$

Jestliže pro nějakou kompletní část K má $R(K)$ hodnotu menší nebo rovnou než pro kteroukoliv jinou kompletní část, nazvu K m i n i m á l n í k o m p l e t n í č á s t í množství M (značka mkč).

Ježto existuje aspoň jedna kč a pouze konečný počet kč, existuje patrně aspoň jedna mkč.

Úkol, který jste řešil ve své práci, lze pak formulovati takto.

***Úkol:** Dokázati, že existuje jen jedna mkč, a udati předpis* [tj. algoritmus] *pro její konstrukci.*

[Pochopitelně *mkč* představuje jedinou minimální kostru. V celé práci není zmínka o pojmu „strom“.]

***1. pomocná věta.** Budiž a_1 přirozené číslo $\leqq n$;*

$$r_{a_1, a_2} = \min r_{a_1, k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n,\ k \neq a_1). \tag{3}$$

Potom každá mkč obsahuje dvojici $[a_1, a_2]$.

[Důkaz 1. pomocné věty probíhá zcela učebnicově: jestliže K je nějaká *kč* neobsahující $[a_1, a_2]$, pak uvažujeme řetězec $(a_1, a_2) = [a_1, c_1], [c_1, c_2], \ldots, [c_t, a_2]$ a utvoříme novou množinu K' tak, že $[a_1, c_1]$ z množiny K odebereme, zatímco $[a_1, a_2]$ k ní přidáme. Pak K' je opět *kč* a $R(K') < R(K)$.]

Zaveďme ještě tyto definice:

Budiž

$$K \equiv [i_1, k_1],\ [i_2, k_2],\ \ldots,\ [i_t, k_t]$$

částečné množství z množství M. I n d e x e m m n o ž s t v í K nazvu každé přirozené číslo, jež se rovná některému z čísel $i_1, k_1, i_2, k_2, \ldots, i_t, k_t$.

Částečné množství K z množství M nazvu s o u v i s l o u č á s t í, jestliže ke dvěma libovolným navzájem různým indexům p, q množství K lze nalézti v K řetězec (p, q) (tj. řetězec (p, q), složený výhradně z dvojic množství K).

2. pomocná věta. *Budiž S souvislá část; $h_1, h_2, \ldots, h_s$ buďte všechny indexy množství S; budiž $s < n$. Buďte $l_1, l_2, \ldots, l_t$ ona z čísel $1, 2, \ldots, n$, jež nejsou indexy množství S; budiž*

$$r_{a,b} = \min r_{h_i,l_j} \quad (i = 1, 2, \ldots, s,\ j = 1, 2, \ldots, t). \tag{4}$$

Tvrdím: Každá mkč, jež obsahuje S, obsahuje i dvojici $[a, b]$.

[Důkaz 2. pomocné věty probíhá opět zcela učebnicově: nechť K je libovolná *kč* obsahující S a neobsahující $[a, b]$. Nechť a je index množství S. Pak v K existuje řetězec $(a, b) = [c_0, c_1], [c_1, c_2], \ldots, [c_v, c_{v+1}]$, kde $c_0 = a$, $c_{v+1} = b$, $v \geqq 1$. Nechť c_w je poslední z čísel $c_0, c_1, \ldots, c_v$, které je indexem množství S. Pak definujeme podmnožinu K' odebráním $[c_w, c_{w+1}]$, a přidáním $[a, b]$. K' je opět *kč*. Zde Jarník uvažuje dva případy: $c_w = a$ a $c_w \neq a$. V obou případech dostává $R(K') < R(K)$, což znamená, že K není *mkč*.

Jarník nezmiňuje, že 1. pomocná věta je speciální případ 2. pomocné věty. V jeho podání skutečně 1. pomocná věta není speciální případ 2. pomocné věty, protože samostatný vrchol neodpovídá indexu žádné *kč*.]

Zavedeme nyní jisté částečné množství J z množství M takto:

Definice množství *J. Jest*

$$J \equiv [a_1, a_2],\ [a_3, a_4],\ \ldots,\ [a_{2n-3}, a_{2n-2}],$$

kde $a_1, a_2, \ldots$ jsou definována takto:

1. k r o k. Za a_1 zvolme kterýkoliv z prvků $1, 2, \ldots, n$; a_2 budiž definováno vztahem

$$r_{a_1,a_2} = \min r_{a_l,l} \quad (l = 1, 2, \ldots, n;\ l \neq a_1).$$

k-t ý k r o k. Je-li již definováno

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2k-3}, a_{2k-2} \quad (2 \leqq k < n), \tag{5}$$

definujeme a_{2k-1}, a_{2k} vztahem

$$r_{a_{2k-1},a_{2k}} = \min r_{i,j},$$

kde i probíhá všechna čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{2k-2}$; j všechna ostatní z čísel $1, 2, \ldots, n$. Při tom budiž a_{2k-1} jedno z čísel (5), takže a_{2k} není obsaženo mezi čísly (5).

Je patrno, že při tomto postupu je mezi čísly (5) právě k čísel různých, takže pro $k < n$ lze k-tý krok provésti.

Řešení naší úlohy je nyní dáno tímto ***tvrzením:***

1. *J jest mkč*
2. *Neexistuje žádná jiná mkč.*
3. *J se skládá z $n-1$ dvojic.*

[Důkaz je proveden indukcí podle n. Podle 1. pomocné věty Jarník nejprve definuje $J_2 \equiv [a_1, a_2]$. Nechť je pak dána souvislá množina J_k s k indexy, $2 \leqq k < n$. Jarník používá 2. pomocnou větu k definování J_{k+1}. Pečlivě dokazuje, že J_{k+1} je souvislá. Nakonec položí $J = J_n$.]

Poznámka. *Řešený problém je možno názorně interpretovati takto:*

Je dáno n kuliček, jež jsou očíslovány čísly $1, 2, \ldots, n$, a jež jsou po dvou spojeny tyčemi v počtu $\frac{1}{2}n(n-1)$. Hmota tyče, jež spojuje kuličku a s kuličkou b, budiž $r_{a,b}$. Ty tyče buďte event. tak prohnuty, aby se navzájem nestýkaly. Jest odstraniti z tohoto systému tyčí některé tak, aby těch n kuliček drželo pohromadě a aby hmota zbylých tyčí byla co nejmenší.

V Praze, 12. února 1929.

[Je zajímavé poznamenat, jak lákavé bylo pro oba, jak Borůvku, tak Jarníka, formulovat aplikaci uvedeného problému. Borůvka byl k problému přiveden svým přítelem, zaměstnancem Západomoravských elektráren v Brně, viz [B3], a zmínil se o něm v elektrotechnickém časopise [B2]. Jarník připojil geometrickou interpretaci — v R_3.]

2. Jarníkova práce z historického pohledu

„Nespecialisté“ by se mohli divit, proč jsme Jarníkovu práci [J] rozebírali tak detailně. Důvod je jednoduchý. Následující problém je patrně ústředním problémem kombinatorické optimalizace a kolébkou mnoha klíčových pojmů.

Problém minimální kostry (PMK):

Nechť je dána množina V a ohodnocení $w : \binom{V}{2} \to R$. Najdi strom (V, E) tak, že $\sum_{e \in E} w(e)$ je minimální.

PMK byl poprvé formulován a řešen Otakarem Borůvkou [B1]. Vojtěch Jarník si okamžitě uvědomil „originalitu“ tohoto problému a přispěl svým elegantním řešením [J]. Borůvka se k uvedenému problému vrátil pouze jednou, v době svého pobytu v Paříži, kde o svém řešení přednášel v semináři profesora Coolidge [B3].

Vynikající byly i další rané příspěvky: G. Choquet [CH], K. Florek, J. Lukasiewicz, J. Perkal, H. Steinhaus, S. Zubrzycki [FLPSZ]. A po roce 1955 rozvoj v tomto směru začal nabývat neobyčejných rozměrů. Byla formulována řada obecných metod a speciálních algoritmů. Historii problému minimální kostry a detailní přehled výsledků jeho řešení můžeme nalézt v práci R. L. Grahama a P. Hella [GH]. Poznamenejme jen, že O. Borůvka je citován v obou standardních referencích — J. Kruskal [K] a R. C. Prim [P], avšak článek Vojtěcha Jarníka začal být citován až později, viz např. K. Čulík,

V. Doležal, M. Fiedler [CDF], i přes skutečnost, že jeho zpracování bylo precizní (jako všechna jeho matematická díla) a moderní. To by ostatně mohlo být zřejmé z předchozí části této práce. Jarníkův algoritmus je stejný jako Primův algoritmus a Jarníkův důkaz se používá dokonce i nyní, po 65 letech. Nastal snad čas k tomu, aby uvedená elegantní procedura byla nazývána Jarníkovým-Primovým algoritmem.

Jarník se k danému tématu vrátil pouze jednou, a to ve svém druhém příspěvku [JK], který diskutujeme dále. Geometrická interpretace problému, uvedená v posledních řádcích práce [J], poskytuje určitou nerovinnou představu problému řešeného v [JK].

3. O minimálních grafech, obsahujících n daných bodů

I v této kapitole postupujeme jako v první části.

Nejprve předložíme původní verzi práce [JK], tentokrát však pouze prvních dvou kapitol. Ty jsou věnovány obecným vlastnostem „Steinerova stromu". Zdá se, že skutečně všechny obecné vlastnosti Steinerova stromu byly explicitně stanoveny již v práci [JK]. Přesto i dnes jsou stále ještě přisuzovány jiným autorům a dokonce i dnes můžeme v [JK] najít důkazy lepší než ty, které se nyní běžně používají (jako např. lokální rovinnost Steinerova stromu dimenze k; srovnej větu 3(c) v [JK] a stranu 77 v [HRW]).

Pak podáme stručnou diskusi k probíranému tématu a přiblížíme jeho pozdější vývoj. Upozorníme též na některé z hlavních nesprávných citací. Je nutné poznamenat, že ani autoři článků a knih vydaných v poslední době (jako např. [HRW]) si nebyli vědomi bohatých zdrojů myšlenek poskytnutých v [JK].

Práce [JK] má 13 stran, my zde uvádíme původní verzi prvních šesti stran.

O minimálních grafech, obsahujících n daných bodů

Vojtěch Jarník a Miloš Kössler

(Došlo 10. února 1934)

V tomto článku zabýváme se touto úlohou: je dáno n bodů $C_1, C_2, \ldots, C_n$; hledáme souvislé množství, složené z konečného počtu úseček a obsahující body $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tak, aby „celková délka" tohoto množství byla co nejmenší (pro $n = 2$ jest ovšem touto „nejkratší spojnicí" úsečka, spojující body C_1, C_2). V §2 dokazujeme existenci takového „minimálního grafu", v §3 zabýváme se případem, kdy body $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka.

Charakter tohoto článku je zcela elementární; mimo to některé body důkazu jsou zcela běžné úvahy, a proto je provádíme stručně.

[Čtenář by měl brát v úvahu, že tato práce byla publikována např. před knihou Königa [Ko]. Článek [JK] neobsahuje žádné odkazy.]

§1.

Budiž R_k ($k \geqq 1$) k-rozměrný euklidovský prostor.

[Již tento první řádek porušuje obecně platnou domněnku, že Jarník s Kösslerem zkoumali euklidovský Steinerův problém pouze v rovině a že k-dimenzionální případ byl uvažován až Gilbertem a Pollackem v práci [GP]. Ve skutečnosti celý článek [JK] je psán pro dimenzi k.]

Neprázdné bodové množství $G \subset R_k$ nazveme grafem v R_k, má-li tyto vlastnosti:

1. *G je souvislé*
2. *buď se G skládá z jediného bodu, nebo je G součtem konečného počtu uzavřených úseček.*

[Nechť si čtenář nadále pod pojmem součet úseček představí sjednocení úseček. V článku [JK] nyní následuje poznámka pod čarou, ve které Jarník svým charakteristickým stylem jasně definuje všechny používané symboly, symbolem $A \subset B$ počínaje a symboly ${}_0(\overline{MN})$, $(\overline{MN})_0$, ${}_0(\overline{MN})_0$ pro polootevřené a otevřené úsečky konče. Symbol $\overline{MN}$ označuje jak úsečku, tak orientovanou úsečku a také délku úsečky; význam je patrný z kontextu.]

Je-li $P \varepsilon G$ [rozuměj $P \in G$] *a existuje-li právě n (nikoli však $n+1$) úseček, ležících v grafu G, majících P za bod koncový, z nichž žádné dvě nemají kromě bodu P společných bodů, budeme říkati, že P je bodem n-tého řádu [nebo stupně] grafu G. Body prvního řádu nazývají se koncovými body, body vyššího než druhého řádu nazývají se rozvětvovacími body grafu (obojích je v každém grafu nejvýše konečný počet). Je-li P bodem n-tého řádu grafu G, položme $V(P) = n - 2$ a klaďme dále $V(G) = \sum V(P)$, kdež vpravo se sčítá přes všechny body grafu, jejichž řád není roven 2 (můžeme ovšem do součtu pojmouti i sčítance, příslušné k některým bodům druhého řádu). $V(P)$ budeme nazývati vahou bodu P.*

Graf, jenž je současně uzavřenou, jednoduchou spojitou křivkou, nazýváme cyklem. Graf, jehož žádná část není cyklem, nazveme stromem. Platí pak známá

Věta 1. *Je-li G stromem, jest $V(G) = -2$.*

[Připojena je poznámka se sdělením, že každý strom s nejméně dvěma body má nejméně dva koncové vrcholy. Autoři pečlivě definují vrcholy grafu G — viz dále. Důkaz věty 1 je proveden indukcí podle počtu vrcholů.]

§2.

Budiž dáno n ($n \geqq 2$) bodů $C_1, C_2, \ldots, C_n$ prostoru R_k ($k \geqq 1$); body ty budeme nazývati základními body. Budiž G nějaký graf v R_k, obsahující body $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

[Připomínáme, že graf je definován jako topologická realizace „grafu“ a je souvislý — viz definice v §1.]

Slovy „vrcholy grafu G“ budeme označovati předně všechny body základní, za druhé všechny body grafu G, jejichž řád není roven 2, za třetí ony body druhého řádu grafu G, v nichž se stýkají dvě úsečky grafu, neležící v jedné přímce.

Úsečku $\overline{MN} \subset G$ budeme nazývati „stranou grafu G“ [tj. hranou], *jestliže žádný bod úsečky ${}_0(\overline{MN})_0$ není vrcholem a jsou-li oba body M, N vrcholy grafu G. Graf G jest pak součtem* [sjednocením] *svých stran. Vrcholů i stran je zřejmě jen konečný počet; mají-li dvě různé strany grafu G společný bod, je tento bod nutně koncovým* *bodem obou těchto stran. Součet délek všech stran grafu G nazveme délkou grafu G, značka $l(G)$.*

Budiž $\mathfrak{M}$ množství všech grafů v R_k, jež obsahují body $C_1, C_2, \dots, C_n$; budiž v dalším d dolní hranice délek všech grafů $G \in \mathfrak{M}$; existuje-li $G \in \mathfrak{M}$ tak, že $l(G) = d$, budeme graf G nazývati „minimálním grafem v R_k vzhledem k bodům $C_1, C_2, \dots, C_n$“. Dokážeme pak především tuto větu:

***Věta 2.** Buďtež $C_1, C_2, \dots, C_n$ body prostoru R_k ($k \geqq 1$, $n \geqq 2$); potom existuje aspoň jeden minimální graf v R_k vzhledem k bodům $C_1, C_2, \dots, C_n$.*

Zavedeme napřed některá označení. Budiž $G \in \mathfrak{M}$; volným koncem grafu G nazveme každý koncový bod grafu G, jenž není základním bodem; volným rohem grafu G nazveme každý vrchol druhého řádu, který není základním bodem. Budiž $\mathfrak{N}$ množství oněch grafů $G \in \mathfrak{M}$, jež jsou stromy a nemají volných konců; budiž $\mathfrak{P}$ množství oněch grafů $G \in \mathfrak{N}$, jež nemají volných rohů. Dokážeme napřed tato tvrzení:

***Tvrzení 1.** Budiž $G \in \mathfrak{M} - \mathfrak{N}$; potom existuje $G_1 \in \mathfrak{N}$ tak, že $l(G_1) < l(G)$.*

***Tvrzení 2.** Budiž $k \geqq 3$, $G \in \mathfrak{N} - \mathfrak{P}$; potom existuje $G_1 \in \mathfrak{P}$ tak, že $l(G_1) < l(G)$.*

***Tvrzení 3.** Budiž d_1 dolní hranice délek všech grafů $G \in \mathfrak{P}$; potom existuje aspoň jeden graf $G_0 \in \mathfrak{M}$ takový, že $l(G_0) \leqq d_1$.*

***Tvrzení 4.** Je-li G minimální graf v R_k vzhledem k bodům $C_1, C_2, \dots, C_n$ a je-li K nejmenší konvexní bodové množství v R_k, obsahující body $C_1, C_2, \dots, C_n$, platí $G \subset K$* [tj. konvexní obal obsahuje všechny Steinerovy body].

Z tvrzení 1–4 plyne věta 2. Neboť:

A) Je-li $k \geqq 3$, platí podle tvrzení 1 a 2 rovnice $d_1 = d$ a věta 2 plyne z tvrzení 3.

B) Je-li $k \leqq 2$, vnořme R_k do prostoru R_3; podle případu A) existuje minimální graf G v R_3 vzhledem k bodům $C_1, C_2, \dots, C_n$. Podle tvrzení 4 jest však $G \subset R_k$.

Stačí tedy dokázat tvrzení 1–4.

[Opět poznamenejme, že pro Jarníka je k-rozměrný případ podstatný.

Důkaz tvrzení 1 probíhá pomocí odebrání koncových bodů spolu s odpovídajícími stranami. Důkazy zbývajících tvrzení jsou elegantní a zajímavější. Naznačíme je zde v hlavních rysech:]

Důkaz tvrzení 2: Budiž $k \geqq 3$, $G \in \mathfrak{N} - \mathfrak{P}$; tj. graf $G \in \mathfrak{M}$ je strom, nemá volných konců, má však aspoň jeden volný roh M_1, v němž se tedy stýkají dvě strany $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$, neležící v jedné přímce; M_1 není bodem základním. Dokážeme: existuje graf $G' \in \mathfrak{N}$, jenž má méně volných rohů než G a pro nějž $l(G') < l(G)$.

[Následuje vysvětlení, že opakováním tohoto postupu bude tvrzení 2 dokázáno.]

Při důkazu rozeznávejme dva případy.

1. případ: body M_2, M_3 jsou body základními. Množství $G - [{}_0(\overline{M_2M_1}) + (\overline{M_1M_3})_0]$ je součtem dvou stromů G_2, G_3, pro něž platí $G_2 \cdot G_3 = 0$ [tj. stromy G_2, G_3 jsou disjunktní], *$M_2 \in G_2$, $M_3 \in G_3$. Úsečka $\overline{M_2M_3}$ obsahuje aspoň jeden bod grafu G_2 (např. M_2) a aspoň jeden bod grafu G_3 (např. M_3). Zřejmě existují tedy dva body P_2, P_3 na úsečce $\overline{M_2M_3}$ takové, že $P_2 \in G_2$, $P_3 \in G_3$ a že žádný bod úsečky ${}_0(\overline{P_2P_3})_0$*

nepatří ani ke G_2 *ani ke* G_3*. Graf* $G' = \{G - [_0(\overline{M_2M_1}) + (\overline{M_1M_3})_0]\} + \overline{P_2P_3}$ *patří zřejmě k* $\mathfrak{N}$ *a má aspoň o jeden volný roh méně než* G*.*

[To je ověřováno detailně.]

Zřejmě jest $l(G') < l(G)$*.*

2. případ: aspoň jeden z bodů M_2*,* M_3 *— třeba bod* M_2 *— není bodem základním. Proložme bodem* M_2 *nadrovinu* S *(*$(k-1)$*-rozměrnou), jež neobsahuje bod* M_3*. Je-li* M'_2 *libovolný bod nadroviny* S*, označme znakem* $G(M'_2)$ *graf, který vznikne z grafu* G *tím, že všechny strany* $\overline{M_iM_2}$ *grafu* G*, vycházející z bodu* M_2*, nahradíme úsečkami* $\overline{M_iM'_2}$*. Položme* $\overline{M_2M_1} + \overline{M_1M_3} - \overline{M_2M_3} = \alpha > 0$*. Je jasné, že existuje číslo* $\delta > 0$ *tak, že každý graf* $G(M'_2)$*, pro nějž platí* $\overline{M_2M'_2} < \delta$*, má tyto vlastnosti:*

1. $l(G(M'_2)) < l(G) + \frac{1}{2}\alpha$*,* $\overline{M'_2M_1} + \overline{M_1M_3} - \overline{M'_2M_3} > \frac{1}{2}\alpha$*.*

2. *Graf* $G(M'_2)$ *má tytéž vrcholy (a téhož řádu) a tytéž strany jako* G*, až na to, že místo vrcholu* M_2 *a stran* $\overline{M_2M_i}$ *nastupuje všude vrchol* M'_2 *a strany* $\overline{M'_2M_i}$*.*

[To můžeme vidět následovně:]

Sestrojme všechny přímky, jež procházejí bodem M_3 *a mimo to ještě aspoň jedním bodem grafu* G*. Tyto přímky protínají nadrovinu* S *v bodovém množství* Σ*, jež se skládá nejvýše z konečného počtu bodů, úseček a polopaprsků. Existuje tedy (ježto je* $k \geqq 3$*, je nadrovina* S *alespoň dvojrozměrná) alespoň jeden bod* $M'_2 \,\varepsilon\, S - \Sigma$ *takový, že* $\overline{M_2M'_2} < \delta$*; pro graf* $G(M'_2)$ *platí pak vlastnosti 1., 2. Nadto má graf* $G(M'_2)$ *ještě tuto vlastnost: žádný bod grafu* $G(M'_2)$ *neleží na úsečce* $_0(\overline{M'_2M_3})_0$*.*

[To je ověřováno detailně v poznámce pod čarou.]

Sestrojme nyní graf $G' = \{G(M'_2 - [\overline{M'_2M_1} + \overline{M_1M_3}]\} + \overline{M'_2M_3}$*; je zřejmě* $G' \,\varepsilon\, \mathfrak{N}$*, dále má graf* G' *aspoň o jeden volný roh méně než graf* G *a konečně z vlastnosti 1. plyne* $l(G') < l(G)$*, jak bylo dokázati.*

D ů k a z   t v r z e n í   3 je běžná limitní úvaha. Budiž $G_1, G_2, \ldots$ *posloupnost grafů z* $\mathfrak{P}$ *a budiž* $\lim\limits_{r=\infty} l(G_r) = d_1$*.*

[I nadále zachováváme všechny symboly uvedené v práci [JK].]

Ježto $C_1 \,\varepsilon\, G_r$*, leží všechny grafy* G_r *v uzavřené kouli o středu* C_1*, jejíž poloměr je roven horní hranici čísel* $l(G_r)$ $(r = 1, 2, \ldots)$*. Jediné vrcholy grafu* G_r *jsou body základní a rozvětvovací. Podle věty 1 je* $V(G_r) = -2$*; ježto body koncové (o váze* -1*) leží vesměs v bodech základních, je jich nejvýše* n*; bodů rozvětvovacích (jejichž váha je tedy nejméně rovna 1) je tedy nejvýše* $n-2$*; tedy graf* G_r *má nejvýše* $2n-2$ *vrcholů. Existuje tedy v posloupnosti* $G_1, G_2, \ldots$ *částečná posloupnost* $G'_1, G'_2, \ldots$ *taková, že všechny grafy* G'_r *mají stejný počet vrcholů. Vrcholy grafu* G'_r *označme v určitém pořádku* $X_1^r, X_2^r, \ldots, X_z^r$*, při čemž budiž* $X_i^r = C_i$ *pro* $1 \leqq i \leqq n$*. Přiřaďme grafu* G'_r *matici*

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12}^r & a_{13}^r & \ldots & a_{1z}^r \\ a_{21}^r & 0 & a_{23}^r & \ldots & a_{2z}^r \\ a_{31}^r & a_{32}^r & 0 & \ldots & a_{3z}^r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{z1}^r & a_{z2}^r & a_{z3}^r & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

kde a^r_{il} se rovná 1 nebo 0, podle toho, je-li $\overline{X^r_i X^r_l}$ stranou grafu G'_r nebo ne.

[To je matice sousednosti grafu G'_r.]

Ježto takových matic je jen konečný počet, existuje částečná posloupnost $G'_{s_1}, G'_{s_2}, \ldots$ taková, že všem jejím grafům jest přiřazena táž matice

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1z} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2z} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{z1} & a_{z2} & a_{z3} & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

V této posloupnosti lze konečně — ježto posloupnosti $X^1_i, X^2_i, X^3_i, \ldots$ $(i = 1, 2, \ldots, z)$ jsou ohraničené — nalézti částečnou posloupnost $G'_{t_1}, G'_{t_2}, \ldots$ tak, že existují limity $\lim\limits_{p=\infty} X^{t_p}_i = X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, z)$. Označme znakem G_0 součet oněch úseček $\overline{X_i X_l}$ $(1 \leqq i < l \leqq z)$, pro něž $a_{il} = 1$.

[Poznámka pod čarou: *Některé z těchto „úseček“ ovšem mohou degenerovati v body.*]

Zřejmě jest $G_0 \mathrel{\varepsilon} \mathfrak{M}$ a platí

$$l(G'_{t_p}) = \sum_{1 \leqq i < l \leqq z} a_{il} \overline{X^{t_p}_i X^{t_p}_l},$$

$$l(G_0) \leqq \sum_{1 \leqq i < l \leqq z} a_{il} \overline{X_i X_l} = \lim_{p=\infty} l(G'_{t_p}) = d_1,$$

jak bylo dokázati.

[Toto je, dokonce i dnes, nejelegantnější důkaz!]

D ů k a z t v r z e n í 4. Budiž $G \mathrel{\varepsilon} \mathfrak{M}$ graf takový, že neplatí $G \subset K$. Potom existuje nadrovina S [$(k-1)$-rozměrná] taková, že všechny body základní leží po jedné straně nadroviny S a po druhé straně této nadroviny leží jistá neprázdná část G' grafu G. Sestrojme graf G_1 tím, že v grafu G nahradíme část G' pravoúhlou projekcí množství G' na nadrovinu S; zřejmě je $G_1 \mathrel{\varepsilon} \mathfrak{M}$ a $l(G_1) < l(G)$, jak bylo dokázati.

[Dimenze k je opět podstatná.]

Nyní snadno dokážeme následující větu 3, která podrobněji popisuje strukturu minimálních grafů.

Věta 3. *Budiž G minimální graf v R_k $(k \geqq 1)$ vzhledem k bodům $C_1, C_2, \ldots, C_n$ $(n \geqq 2)$. Potom G má tyto vlastnosti:*

a) *G je částí nejmenšího konvexního množství, obsahujícího body $C_1, C_2, \ldots, C_n$.*

b) *G je strom, nemající ani volných konců ani volných rohů.*

c) *Mají-li dvě strany grafu G společný bod, jest úhel těchto stran nejméně roven $\frac{2}{3}\pi$.*

d) *Každý rozvětvovací bod grafu G je třetího řádu. Tři strany grafu, vycházející z tohoto bodu, leží v jedné rovině (dvojrozměrné) a každé dvě z nich svírají úhel $\frac{2}{3}\pi$.*

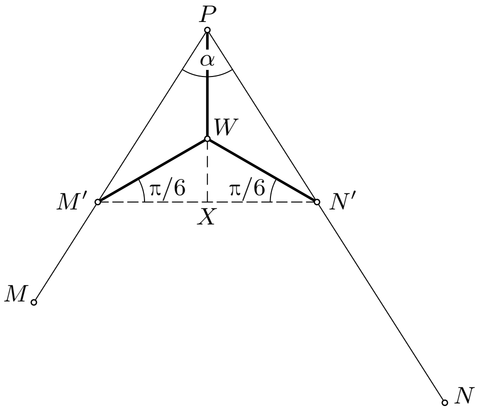
[Stále znovu připomínáme, že dimenze k je i zde, jako kdekoli jinde v článku [JK], podstatná. Bod d) jsme v žádné pozdější literatuře nenašli. Tento bod poskytuje lepší a silnější tvrzení než např. v [HRW] str. 77.]

Důkaz věty 3: Vlastnost a) *plyne z tvrzení 4. K důkazu vlastnosti* b) *můžeme předpokládati* (*následkem vlastnosti* a)), *že* $k \geqq 3$ (*kdyby bylo* $k < 3$, *vnořili bychom* R_k *do prostoru* R_3); *potom však vlastnost* b) *plyne z tvrzení 1 a 2. Vlastnost* c) *dokážeme takto: budiž* $G \varepsilon \mathfrak{M}$ *a buďte* $\overline{PM}$, $\overline{PN}$ *dvě strany grafu* G, *jež svírají úhel* $\alpha < \frac{2}{3}\pi$. *Sestrojme bod* M' *uvnitř strany* $\overline{PM}$ *a bod* N' *uvnitř strany* $\overline{PN}$ *tak, že* $\overline{PM'} = \overline{PN'} = h$. *Potom jest* (*viz obr. 1*)

$$\overline{M'W} = \overline{N'W} = \overline{M'X} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\, h \sin \tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\overline{PW} = \overline{PX} - \overline{WX} = h \cos \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}}\, h \sin \tfrac{1}{2}\alpha;$$

tedy

$$\overline{M'W} + \overline{N'W} + \overline{PW} = h(\sqrt{3} \sin \tfrac{1}{2}\alpha + \cos \tfrac{1}{2}\alpha) < 2h = \overline{PM'} + \overline{PN'}.$$



Obr. 1

[Tento krok je ověřen v poznámce pod čarou:

Jest totiž

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{3} \sin x + \cos x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x =$$
$$= \cos x(\sqrt{3} - \operatorname{tg} x) > 0$$

pro $0 < x < \frac{1}{3}\pi$; *tedy jest* $\sqrt{3} \sin x + \cos x$ *rostoucí funkcí pro* $0 \leqq x \leqq \frac{1}{3}\pi$ *a tedy platí pro* $0 < x < \frac{1}{3}\pi$:

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x < \sqrt{3} \sin \tfrac{1}{3}\pi + \cos \tfrac{1}{3}\pi = 2. \text{]}$$

Pro graf

$$G_1 = [G - (\overline{M'P} + \overline{N'P})] + \overline{M'W} + \overline{N'W} + \overline{PW}$$

platí tedy zřejmě $G_1 \varepsilon \mathfrak{M}$, $l(G_1) < l(G)$, *takže graf* G *není minimální, jak bylo dokázati. Vlastnost* d) *plyne okamžitě z vlastnosti* c), *uvážíme-li, že tři úsečky, vycházející z jednoho bodu a neležící v jedné rovině, svírají úhly, jejichž součet je menší než* 2π.

Poznámka. Z věty 3 plyne pro minimální graf G *toto: je-li* P *bod rozvětvovací, je* $V(P) = 1$, *kdežto pro bod koncový je* $V(P) = -1$. *Z rovnice* $V(G) = -2$ *plyne tedy, že počet bodů rozvětvovacích je o dvě menší než počet bodů koncových.*

Toto je konec prvních dvou kapitol článku [JK]. Text je to pozoruhodný jak svou průzračností, tak svým obsahem.

Uvedená část se zabývá obecnými vlastnostmi Steinerova stromu. Tyto vlastnosti jsou všeobecně přisuzovány autorům pozdějších příspěvků, ačkoli jsou explicitně stanoveny již v článku Jarníka a Kösslera. Uveďme nyní několik příkladů takových chybných citací, které jsme většinou převzali z nedávné monografie [HRW] věnované „Problému Steinerova stromu“:

Výsledky týkající se konvexního obalu, počtu bodů větvení, podmínky pro úhel, tvrzení, že pro Steinerův strom jsou všechny body větvení stupně tři, tj. věta 1.1 a věta 1.2 v práci [HRW], jsou přisuzovány Courantovi a Robbinsovi [CR], důsledek 1.1 a důsledek 1.5 v [HRW] jsou přisuzovány Gilbertovi a Pollakovi [GP]. Přitom všechny tyto výsledky jsou explicitně obsaženy v práci [JK], v různých částech prvního až čtvrtého tvrzení a druhé a třetí věty.

Navíc zobecnění pro dimenzi k, zpracované v práci [HRW], část 6.1, je nejen v [JK] zmíněno, ale přímo se zde využívá. Ve skutečnosti je celý článek [JK] psán pro dimenzi k. A komplikovaný důkaz toho, že tři strany incidentní s bodem větvení leží v jedné rovině, uvedený v [HRW], strana 77, je nahrazen pěkným důkazem Jarníka a Kösslera.

Článek Jarníka a Kösslera je příkladem čistého stylu a elegance. I dnes je proto prospěšné věnovat mu pozornost a studovat ho. S průzračností, s jakou je problém uveden, se v mnoha pozdějších textech nesetkáme.

Je jasné, že „Steinerův problém“ patří Jarníkovi a Kösslerovi. Byl jimi zpracován pečlivě, na velmi vysoké úrovni. Porovnáme-li práce [J] a [JK], vidíme, že jde o Jarníkův problém.

Článek Jarníka a Kösslera [JK] pokračuje rozborem případů, kdy body $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka. Přesně, pečlivě a detailně řeší nejprve případ pro $n = 3, 4, 5$. Dále podotýkají, že pro $n = 6$ je situace zcela odlišná: *„kterýkoliv minimální graf dostaneme tak, že vezmeme obvod daného pravidelného šestiúhelníka a vynecháme všechny vnitřní body jedné* (*kterékoliv*) *strany.“* Elegantně pak dokazují, že obdobně se dostane minimální graf i pro každý pravidelný n-úhelník, kde $n \geqq 13$. Nechávají otevřený případ $7 \leqq n \leqq 12$ a poznamenávají, že tento konečný počet případů lze vyřešit s určitou námahou přímým výpočtem. Jarníkova-Kösslerova metoda řešení problému pro $n = 3, 4, 5$ skutečně naznačuje, že si její autoři byli vědomi konečnosti problému (dokázáno mnohem později Melzakem [M]).

4. Jarníkova-Kösslerova práce z historického pohledu

Problém nalezení nejkratšího spojení mezi n danými body v rovině má dlouhou historii. Je vskutku jedním z nejstarších optimalizačních problémů. V celé dlouhé historii tohoto problému však byl většinou uvažován pouze případ $n = 3$. Vzpomeňme otázky položené Fermatem, úvahy Mersennea a řešení Torricelliho a Cavalieriho. Elegantní řešení tohoto problému z oblasti elementární geometrie samozřejmě přitahovalo mnoho badatelů i později, jako např. Simpsona a Steinera. Ti uvažovali různá zobecnění tříbodového problému, např. následující: Pro daných n bodů v rovině najděte jediný vrchol s nejmenším součtem vzdáleností od uvedených bodů.

Historie problému je obsáhlá. Existuje řada dostupných publikací, jako např. [Ku] a [Z], aplikace uvedené v knize [W] a důkladné matematické zpracování v [St].

Nicméně před rokem 1934 nebyl problém nejkratšího spojení n bodů uvažován (Ron Graham nás v [Z] informuje, že Gauss formuloval n-bodový problém v jednom ze svých dopisů). Poprvé byl uvažován Jarníkem a Kösslerem [JK], přesně a jasně formulován a řešen, což je patrné z uvedených prvních dvou kapitol práce [JK].

Je celkem těžké spekulovat o tom, proč autoři tento problém uvažovali. Víme, že v Jarníkově případě tvoří články [J] a [JK] svým obsahem výjimku. Za možné vysvětlení této záhady by se dala považovat skutečnost, že Jarník okamžitě rozpoznal v Borůvkově problému něco zcela nového, co tu ještě nebylo, a nahlédl na tento problém jako na n-bodový minimalizační problém. Jeho interpretace problému minimální kostry, uvedená na konci v článku [J] (konec první části tohoto příspěvku), naznačuje, jak V. Jarník mohl přirozeně dospět k problému uvažovanému v [JK]. Zároveň by také mohla vysvětlit, proč Jarník uvažoval zejména k-dimenzionální problém — nedospěl k němu z geometrie v rovině, ale z prostorové geometrie.

Obdobně jako Borůvka ani Jarník se k tomuto problému nikdy znovu nevrátil.

Tříbodový problém (tj. Fermat-Torricelli-Cavalieri-Simpson-Steinerův problém) nalezneme v Courantově-Robbinsově knize [CR] pod názvem Steinerův problém a problém nejbližšího bodu k dané množině bodů (tj. problém uvažovaný Steinerem) je zde nazýván „sterilním matematickým zobecněním". Problém nejkratšího vzájemného spojení mezi n body je nazýván zobecněný Steinerův problém [CR]. Je však zřejmé, že je to Jarníkův problém nebo Jarníkův-Kösslerův problém.

Z právě uvedených názvů (a některých stylistických vyjádření) se dá předpokládat, že Courant a Robbins byli motivováni pracemi [St] a [Z]. Vojtěch Jarník byl ve třicátých letech již mezinárodně uznáván a považován za slavného matematika (přednášel na obou kongresech Mezinárodní matematické unie v Zürichu v roce 1932 a v Oslu v roce 1936) a Courant s Robbinsem tedy patrně o Jarníkově práci nesouvisející s teorií čísel a analýzou nevěděli.

„Steinerův" problém pak zůstal bez povšimnutí 20 let. Poté byl znovu „přiveden k životu" Melzakem, Gilbertem a Polackem a dalšími v souvislosti s prudkým rozvojem nové oblasti kombinatorické (diskrétní) optimalizace a teorie algoritmů.

Problém je těžký jak teoreticky, tak prakticky a je pro své přímé aplikace v VLSI a dalších oblastech (viz např. [HRW]) stále ještě intenzivně studován. A je dalek toho, že by byl vyřešen.

Proveďme závěrečné shrnutí.

Vojtěch Jarník měl velké štěstí, že se uvedenými problémy zabýval. Dal jimi impuls k počátku nového důležitého odvětví, v té době ještě zdaleka neznámého.

Jarníkův přesný, čistý, jasný styl má trvalou hodnotu. Uvedené příspěvky jsou však stále ještě mnohým neznámé (např. nedávná Příručka kombinatoriky ani Příručka kombinatorické geometrie se o nich nezmiňují).

Diskutované příspěvky [J] a [JK] nejsou zdaleka okrajovými příspěvky. Jsou to významné práce vynikajícího matematika. Matematika, který svými brilantními příspěvky podstatně zasáhl do oblasti kombinatorické optimalizace, ačkoli jeho hlavním polem působnosti byla teorie čísel.

L i t e r a t u r a

[J] Jarník, V: *O jistém problému minimálním.* Práce Mor. Přírodověd. Spol. v Brně (Acta Societ. Scient. Natur. Moravicae) *6* (1930), 57–63.

[JK] Jarník, V., Kössler, M.: *O minimálních grafech obsahujících n daných bodů.* Časopis Pěst. Mat. *63* (1934), 223–235.

H i s t o r i c k á   l i t e r a t u r a

[B1] Borůvka, O.: *O jistém problému minimálním.* Práce Mor. Přírodověd. Spol. v Brně (Acta Societ. Scient. Natur. Moravicae) *3* (1926), 37–58.

[B2] Borůvka, O.: *Příspěvek k řešení otázky ekonomické stavby elektrovodních sítí.* Elektrotechnický obzor *15* (1926), 153–154.

[B3] Borůvka, O.: *Několik vzpomínek na matematický život v Brně.* Pokroky Mat., Fyz. a Astr. *22* (1977), 91–99.

[B4] Borůvka, O.: *Osobní sdělení druhému z autorů.* 1985.

[Ch] Choquet, G.: *Etude de certains réseaux de routes.* Comptes Rendus Acad. Sci. *206* (1938), 310–313.

[FLPSZ] Florek, K., Lukaszewicz, J., Perkal, J., Steinhaus, H., Zubrycki, S.: *Sur la liaison et la division des points d'un ensemble fini.* Colloq. Math. *2* (1951), 282–285, 319.

[St] Sturm, R.: *Maxima und Minima in der elementaren Geometrie.* Teubner, Leipzig 1910.

[Ko] König, D.: *Graphentheorie.* Teubner, Leipzig 1936.

[CR] Courant, R., Robbins, H.: *What is Mathematics?* Oxford Univ. Press. New York 1941.

[W] Weber, A.: *Über Standort der Industrien.* Tübingen 1909.

[Z] Zacharias, M.: *Elementargeometrie und elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung.* In: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (ed. W. Fr. Meyer, H. Mohrmann). Dritter Band IIIAB9. Geometrie. Teubner, Leipzig 1914–1931.

D a l š í   p u b l i k a c e

[Ku] Kuhn, H. W.: *Steiner's problem revisited.* In: G. B. Dantzig and B. C. Eaves (eds) Studies in Optimization, Studies in Math. *10*, Math. Assoc. Amer. (1975), 53–70.

[M] Melzak, Z. A.: *On the problem of Steiner.* Cand. Math. Bull. *4* (1961), 143–148.

[GP] Gilbert, E. N., Pollack, H. O.: *Steiner minimal trees.* SIAM J. Appl. Math. *16* (1968), 1–29.

[GGJ] Garey, M. R., Graham, R. L., Johnson, D. S.: *The complexity of computing Steiner minimal trees.* SIAM J. Appl. Math. *32* (1977), 835–859.

[CDF] Čulík, K., Doležal, V., Fiedler, M.: *Kombinatorická analýza v praxi.* SNTL, Praha 1967.

[G] Graham, R. L.: *Personal communication.*

[P] Prim, R. C.: *Shortest connection networks and some generalizations.* Bell Syst. Tech. J. *36* (1957), 1389–1401.

[K] Kruskal, J. B.: *On the shortest spanning tree of a graph and the travelling salesman problem.* Proc. Amer. Math. Soc. *7* (1956), 48–50.

[GH] Graham, R. L., Hell, P.: *On the history of the Minimum Spanning Tree Problem.* Ann. History of Computing 7.1 (1985), 43–57.

[BG] Bern, M. W., Graham, R. L.: *The Shortest Network Problem.* Scientific American. Jan 1989, 66–71.

[HRW] Hwang, F. K., Richards, D. S., Winter, P.: *The Steiner Tree Problem.* Ann. Discr. Math. *53,* North Holland 1992.

[KPS] Korte, B., Prömel, H. J., Steger, A.: *Steiner trees in VLSI-Layout.* In: *Paths, Flows, and VLSI-Layout* (Korte, B., Lovász, H., Prömel, H. J., Schrijver, eds.). Springer Verlag 1990, 185–214.