J. Borwein; P. Borwein; R. Girgensohn; S. Parnes
Experimentální matematika se hlásí o slovo

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 44 (1999), No. 1, 50--61

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/140981`

Experimentální matematika se hlásí o slovo

J. Borwein, P. Borwein, R. Girgensohn, S. Parnes

Překladatelův úvod

Nedávno publikoval časopis *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* zajímavý článek o čísle π (viz [15]). V pasáži o rostoucí úloze tzv. experimentální matematiky citovali autoři i článek, jehož překlad právě začínáte číst. Přestože některé pasáže tohoto článku mohou být považovány za diskutabilní či mohou být přijímány s rozpaky, zejména tou částí matematické komunity, která chápe matematiku jako vědu výhradně rigorózní, některé problémy v článku diskutované se mohou v nepříliš vzdálené budoucnosti ukázat jako velmi aktuální. Tento článek, alespoň podle překladatelova názoru, jistě stojí za povšimnutí.

Překladatel chce touto cestou poděkovat prof. O. Kowalskému (MFF UK Praha) za jeho pomoc při závěrečných úpravách českého překladu.

Mirko Rokyta

Úvod

Objev a jeho ověřování. Filozofové často přisuzovali matematice specifické postavení mezi ostatními přírodními vědami. Zatímco přírodní vědy byly vždy neoddělitelně svázány s reálně existujícím vnějším světem prostřednictvím experimentů, matematikům bylo víceméně dovoleno pohybovat se v abstraktních světech, které si sami vymysleli. Tato charakteristika vystihovala poměrně dobře matematiku uplynulých tisíciletí; nástup výpočetní techniky však začal tento náhled pozvolna měnit. Výpočetní technika umožnila člověku proniknout do nových matematických světů, které by technikou nevyzbrojená mysl nemohla nikdy odhalit. Cenou za tuto výhodu je však skutečnost, že velké množství nových poznatků je nám sdělováno pouze ve formě výsledků počítačových experimentů. Počítače nám umožnily navštívit neznámé kouty hyperbolických prostorů a nalézt víc než miliardu platných cifer čísla π[1]), více než kdy jindy nás však také upozornily na podstatný rozdíl, skrytý ve významu slov „zážitek“ a „porozumění“.

[1]) Koncem roku 1997 již bylo známo více než 50 miliard cifer čísla π, viz [15]. (*Pozn. překl.*)

Making Sense of Experimental Mathematics. The Mathematical Intelligencer, vol. *18,* no. 4 (1996), pp. 12–18.

Přeložil Mirko Rokyta.

Velká většina výletů do exotických končin matematiky však končí pouze izolovanými názornými příklady. Heuristické postupy, obrázky či diagramy získané v rámci jednoho oboru matematiky jsou většinou nepoužitelné v jiné matematické disciplíně. Přitom množství nedokázaných tvrzení stále roste, ať už jde o hypotézy, v jejichž pravdivost se silně věří, nebo pouhou lidovou tvořivost, šířící se po Internetu.

Autoři tohoto článku věří, že pozornost, kterou dnes věnujeme experimentální matematice, může zítra přinést ovoce v podobě jednotné metodologie matematiky.

Naše východiska. Za vznikem tohoto článku stojí jednoduchá otázka: „Jakým způsobem lze využít výpočetní techniku k řešení matematických problémů, které »reagují vstřícně« při použití počítače, ale vzdorují všem jiným postupům?" Naše výzkumy v *experimentální matematice* jsme zahájili tím, že jsme prozkoumali několik velmi starých hypotéz a všeobecně přijímaných „pravd" týkajících se desetinných rozvojů jistých elementárních konstant a jejich rozvojů v nekonečné řetězové zlomky. Tyto problémy jsou vesměs pokládány za zcela neřešitelné současnými matematickými metodami. Sjednocená teorie pole nebo kouzelný lék na rakovinu se v porovnání s nimi zdají být dosažitelné. Přitom formulace oněch matematických hypotéz jsou ošidně jednoduché.

Myslíme si, že metoda, kterou zde uvádíme, nám neposkytne ani rigorózní důkazy, ani protipříklady, které dané tvrzení vyvracejí; naším cílem je především systematizace experimentální matematiky, a také zlepšení komunikace v rámci matematické komunity.

Protože jedním z našich cílů je pokus systematizovat *experimentální matematiku*, chtěli jsme mít k dispozici dostatečně velký soubor experimentálně získaných, „zcela spolehlivých" dat, a také určitých vhledů, které by se daly kodifikovat a účinným způsobem sdělit. Byli jsme přitom vedeni analogií s experimentální fyzikou. Zajímalo nás především, jakým způsobem ověřují experimentální fyzici své výsledky a jak se snaží ukázat spolehlivost svých dat. Rozdíl mezi experimentální fyzikou a experimentální matematikou, na který jsme přitom narazili, lze popsat asi těmito slovy: Zatímco od přírody nelze očekávat, že by nám poskytla dokonalá experimentální data, v matematice se spolehlivých údajů dočkat můžeme.

Nejsložitějším se ukázal problém sdělování intuitivně získaných náhledů. Na rozdíl od experimentálních věd nemá matematika dosud vytvořen slovník, pomocí kterého by byla schopna sdělovat údaje a vhledy ve zhuštěné formě. Přitom množství dat poskytnutých matematickým experimentem bude stejně jako ve většině fyzikálních experimentů obecně příliš velké na to, aby se dalo nějak jednoduše popsat nebo zachytit. Získané údaje budou muset být nějakým způsobem zestručněny a roztříděny.

Abychom odstranili zmíněný nedostatek matematického slovníku, interpretujeme obvykle naše výsledky v termínech známých spíše ze statistiky či datové analýzy. V tomto článku se můžeme pouze pokusit sdělit naše výsledky intuitivním, populárním a přesvědčivým způsobem. Doufáme však, že konečným cílem bude takový [víceúrovňový a hypertextový] způsob prezentace matematiky, že i matematici z velmi od sebe vzdálených oborů budou moci kriticky prozkoumat a interpretovat výsledky svých kolegů — bez ohledu na jazykové bariéry, které odlišují jednotlivé matematické disciplíny. Tyto otázky jsou diskutovány podrobněji v publikacích [4] a [3].

Ve zbytku článku se budeme věnovat různým modelům experimentální matematiky a otázkám, jak je možno je začlenit do „pravé“, rigorózní matematiky.

Experimentální matematika

… **a její časopis.** Současná experimentální matematika je soustředěna kolem časopisu *Experimental Mathematics.* Usiluje však tento časopis skutečně o změnu samotného způsobu, jakým se matematika dělá, či o změnu stylu, jakým se mají dosažené výsledky prezentovat? Začněme tím, že se pokusíme specifikovat význam pojmu „experimentální“ citátem z úvodního článku časopisu, *About this journal* ([6]), který napsali David Epstein, Silvio Levy a Rafael de la Llave:

> *Experiment vždycky byl a čím dál tím více je jednou z důležitých metod vedoucích k matematickému objevu. (Gauss prohlásil, že on vždy hledal matematické pravdy „skrze systematické experimentování“.) To však zůstává stále více skryto vzhledem k ustálené tradici předkládat veřejnosti pouze rigorózní, elegantní a učesané výsledky.* ([6], str. 1)

Hodlají tradiční matematici znevažovat experimentálně dosažené výsledky tím, že je označí za neelegantní, nevyvážené a nedbalé? Autoři nevidí tato negativa jako podstatné vlastnosti experimentální matematiky, ale spíše jako léčky, kterým je třeba se vyhnout.

Co časopis *Experimental Mathematics* publikuje? Editoři časopisu stále oceňují přednosti tradiční matematiky a nebrání se publikování přesně dokázaných výsledků, které byly objeveny experimentálně. Poznamenávají však: „Považujeme za anomální, je-li nějaká důležitá část matematické úvahy veřejnosti nějakým způsobem zatajena. Je jistě ke škodě věci, když většina matematické komunity téměř nikdy neví, jakým způsobem byly nové výsledky objeveny.“ ([6], str. 1) Zdá se tedy, že editorům časopisu jde především o změnu stylu psaní matematických článků a že kladou důraz na tvořivý či syntetický moment matematických úvah na rozdíl od stylu deduktivního či analytického. Editoři časopisu věří, že „diskuse o názorech na věc a pracovních hypotézách, a to od samotného počátku práce na daném problému, zvětšuje možnost, že celý proces vyvrcholí matematickou větou — zajímavá hypotéza je často formulována někým, kdo nevládne v dostatečné míře příslušným formálním aparátem, zatímco ti, kteří danou techniku dokonale ovládají, se o problému vůbec nedozvědí“ ([6], str. 1).

Jak tedy vypadá typický článek publikovaný v tomto časopise? Jako příklad nám může sloužit nedávno publikovaný článek *Experimental Evaluation of Euler Sums*, jehož autory jsou D. H. Bailey, J. Borwein a R. Girgensohn [2]. Autoři uvádějí, že jejich zájem o Eulerovy součty vzrostl po následujícím překvapivém experimentálně získaném výsledku:

V dubnu 1993 upozornil Enrico Au-Yeung, student University of Waterloo, jednoho z nás na zajímavou skutečnost, a sice že[2])

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)^2\frac{1}{k^2}=4{,}59987\ldots\approx\frac{17}{4}\,\zeta(4)=\frac{17\pi^4}{360}$$

([2], str. 17).

Zajímavé identity, podobné té, kterou jsme právě uvedli, se určitě objevují neustále. Bez širšího matematického kontextu však zůstanou pouhou kuriozitou. Autoři zmíněného článku se takovýto kontext pokusili najít. Na poměrně širokou třídu součtů výše uvedeného typu systematicky aplikovali speciální algoritmy, které zkoumají, zda mezi danými veličinami neexistuje vztah, jehož koeficienty by byly celočíselné, resp. racionální.[3]) Cílem bylo nalézt vyjádření těchto součtů pomocí Riemannovy zeta funkce. Obecnou strategii takového přístupu je možno shrnout do bodů uvedených v tabulce 1. Některé z experimentálně objevených vztahů byly poté dokázány i rigorózně, jiné nadále zůstávají [experimentálně předpovězenými] hypotézami — viz tabulku 2. Všimněme si rozdílu: zatímco Au-Yeungův objev nás může naplnit údivem, přístup experimentátora je systematický a zcela přirozený.

Tabulka 1.

Experimentální přístup k Eulerovým součtům
(Převzato z přednášky Davida Baileyho.)

(1) Pomocí speciálních vyčíslovacích algoritmů spočti numerické hodnoty různých konstant z dané třídy s vysokou přesností (na 100 a více platných cifer).
(2) Zformuluj hypotézy o tvaru členů obsažených v případném výsledném vzorci.
(3) Použij algoritmus pro vyhledávání identit s celočíselnými koeficienty ke zjištění, zdali hodnota zkoumaného Eulerova součtu je lineární kombinací s racionálními koeficienty členů zkoumaných v předchozím bodě.
(4) Zkus najít rigorózní důkazy takto experimentálně předpovězených výsledků.
(5) Pokus se zobecnit tyto důkazy na obecné třídy Eulerových součtů.

Deduktivistický styl. Editoři časopisu *Experimental Mathematics* usilují především o změnu stylu při tvorbě matematických textů tak, aby byl více zdůrazněn vlastní matematický proces. Imre Lakatos ve své zajímavé, i když poněkud diskutabilní knize *Proofs and Refutations* [9] podobnou změnu stylu podporuje.

Lakatos začíná svou úvahu o eukleidovské metodologii v podobném duchu, jakým je psán úvodní článek časopisu *Experimental Mathematics*:

---

[2]) Připomínáme, že $\zeta(4)=\pi^4/90$ je definována jako hodnota součtu $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^4$. (*Pozn. překl.*)

[3]) Tzv. „integer-relation-detection algorithms“. Algoritmů z této třídy je dnes známa celá řada, namátkou uveďme LLL algoritmus nebo PSLQ algoritmus. Více o nich viz například [16]. Problémy nalezení celočíselných, respektive racionálních koeficientů v daném vztahu jsou pochopitelně ekvivalentní s ohledem na možnost vynásobit celý vztah vhodnou konstantou. (*Pozn. překl.*)

S eukleidovskou metodologií je spjat dnes už víceméně závazný styl prezentace matematických výsledků. Budu jej nazývat „deduktivistickým stylem“. Tento styl vyžaduje, aby matematický text začínal úzkostlivě přesným seznamem axiomů, definic a lemmat. Axiomy a definice přitom často vypadají velmi uměle a matoucím způsobem komplikovaně. Přitom se nikdy neřekne, jak se k takto komplikované formulaci dospělo. Následují pečlivě formulované věty, které začínají úplným seznamem všech předpokladů; někdy se zdá téměř neuvěřitelné, že někdo byl s to předpoklady dané věty uhodnout předem. Za každou větou je uveden její důkaz. ([9], str. 142)

TABULKA 2.

Některé experimentální výsledky

Definice:

$$\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, \qquad s > 1,$$

$$s_h(m,n) := \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right)^m \frac{1}{(k+1)^n}, \qquad m \geqq 1, \quad n \geqq 2.$$

Některé experimentálně získané hypotézy:

$$s_h(3,2) = \frac{15}{2}\,\zeta(5) + \zeta(2)\zeta(3),$$

$$s_h(3,6) = \frac{197}{24}\,\zeta(9) - \frac{33}{4}\,\zeta(4)\zeta(5) - \frac{37}{8}\,\zeta(3)\zeta(6) + \zeta^3(3) + 3\,\zeta(2)\zeta(7).$$

Hypotézy jsou záměrně zapsány ve tvaru, který umožňuje alespoň letmý pohled na myšlenkové pochody experimentátora. Například ve vzorci pro $s_h(3,2)$ hraje význačnou roli rovnost $2+3=5$ (ve vzorci pro $s_h(3,6)$ rovnosti $4+5=3+6=3\times 3=2+7=9$ (*pozn. překl.*)). To napovídá, jakého tvaru mohou být členy na pravých stranách formulí pro další Eulerovy součty.

Některé rigorózně dokázané vzorce pro Eulerovy součty:

$$s_h(2,2) = \frac{3}{2}\,\zeta(4) + \frac{1}{2}\,\zeta^2(2) = \frac{11\pi^4}{360},$$

$$s_h(2,4) = \frac{2}{3}\,\zeta(6) - \frac{1}{3}\,\zeta(2)\zeta(4) + \frac{1}{3}\,\zeta^3(2) - \zeta^2(3) = \frac{37\pi^6}{22680} - \zeta^2(3).$$

Výše dokázaný vzorec pro $s_h(2,2)$ implikuje pravdivost Au-Yeungovy hypotézy.

Předchozí odstavec výstižně charakterizuje to, co by se mohlo označit termínem „formální porozumění“: Jsme přesvědčeni o tom, že výsledek je v pořádku, protože jsme krok za krokem prošli předkládanou formální úvahu; výsledkem tedy musí být pravda sama. Co však zůstalo zcela skryto díky deduktivistickému stylu, je „zápas o hledání pravdy a dobrodružství poznání. Celý tento proces se vytrácí, postupné předběžné formulace věty objevující se během jejího dokazování jsou odsouzeny k zapomenutí, zatímco finální verze je pozvednuta do výšin posvátné neomylnosti.“ ([9], str. 142)

Snad nejextrémnějšími příklady deduktivistického stylu jsou počítačem generované důkazy, jejichž pravdivost zaručuje Wilfova a Zeilbergerova teorie algoritmických důkazů. Tato teorie nám skutečně poskytuje metaodpovědi na mnohé otázky spojené s tzv. „hypergeometrickými“ identitami. Přesto jsou důkazy generované počítačem, i když jsou pro mnoho matematiků pochopitelné, myšlenkově nezajímavé. Nebudeme se zde touto teorií detailně zabývat, odkazujeme čtenáře na vynikající elementární úvod do této problematiky od Dorona Zeilbergera [14]. Nás především zajímá, jak takové důkazy mohou přispět k naší intuitivní představě o matematice jako takové.

Zeilberger a jeho „uzamčené“ identity[4])

Cena za spolehlivost. Znalost Wilfova-Zeilbergerova (WZ) důkazu nějaké identity znamená v současné době stěží více než pouhé vědomí, že daná identita platí. Doron Zeilberger [13] prosazoval, aby skutečnost, že všechny výpočty potřebné k důkazu dané identity byly provedeny autorem pomocí počítače, byla vyjádřena symbolem QED napsaným ihned za posledním slovem samotného tvrzení. Výhoda tohoto přístupu spočívá v tom, že dokázaný výsledek se tak stává samostatnou jednotkou, „uzamčenou“ identitou. Stejně jako se člověk většinou nestará o to, jak počítač násobí dvě obrovská přirozená čísla či jakým způsobem invertoval matici, má teď k ruce výsledky, jejichž důkazy není z technického hlediska třeba ověřovat.

Pokud by matematiky nezajímalo nic jiného než fakta, nebylo by dál o čem diskutovat. Naštěstí je matematika mnohem více než pouhý souhrn faktů. V této sekci budeme diskutovat o některých důsledcích plynoucích ze Zeilbergerovy teorie a jeho přístupu k matematice, tak jak je obsažen v práci *Theorems for a Price: Tomorrow's Semi-Rigorous Mathematical Culture* [14].

Jako zajímavou perličku uveďme, že dva autoři, kteří ve svých pracích nejvíce obhajují čistě experimentální matematiku, také nejvíce používají nadsázku jako prostředek svého vyjadřování. V tomto příspěvku se soustředíme především na jednoho z nich, Dorona Zeilbergera, ale neměli bychom (a nebudeme) zapomínat ani na G. J. Chaitina.

Začneme citací Zeilbergerova „abstraktu matematického článku budoucnosti“:

> *V tomto článku dokážeme v jistém přesném slova smyslu, že Goldbachova hypotéza je pravdivá s pravděpodobností větší než* 0,99999 *a že její stoprocentní pravdivost lze prokázat za cenu 10 miliard dolarů.* ([14], str. 980)

Jen co se čtenář vzpamatuje ze šoku, který mu přivodí ona pravděpodobnost přisouzená pravdivosti matematického výroku, vysloví obvyklý názor, že těch 10 miliard je nesmysl. I kdyby se ona cena vztahovala k výpočetní technice, počítače jsou přece rok od roku levnější a lepší. Co může tedy znamenat, že „pravdivost lze prokázat za cenu 10 miliard dolarů“? Především to může znamenat, že přiřazená cena je aditivní mírou

[4]) Překladatel nenašel vhodnější český ekvivalent termínu *encapsulated identity*, tedy „zapouzdřená či jinak uzavřená identita“, kterým se v článku označuje identita dokázaná algoritmicky s pomocí Wilfova-Zeilbergerova algoritmu, tady identita tvořící jakousi samostatnou uzavřenou jednotku, nezávislou na dalších tvrzeních. (*Pozn. překl.*)

obtížnosti úplného vyřešení problému. Pokud bychom například věděli, že Riemannova hypotéza bude dokázána tak, že se dokáží lemmata v ceně 10 miliard, 2 miliardy a 2 bilióny dolarů, můžeme ihned říci, nejen kolik by „stál“ úplný důkaz Riemannovy hypotézy, ale i která část důkazu si nejvíce vyžádá zcela nové myšlenky. (Autoři článku přirozeně předpokládají, že 2 bilióny dolarů je spousta peněz.)

Zavedení pojmu „ceny“ matematického výsledku nás bezprostředně přivádí k pojmům, které jsou charakteristické spíše pro svět businessu, které však stále více zasahují i do akademického světa — jde o pojmy jako produktivita a efektivita:

> *Bylo by mrháním prostředky, kdybychom se snažili prokázat, že daná identita platí „s absolutní jistotou“, leda že by tato identita implikovala Riemannovu hypotézu.* ([14], str. 980)

Uvedená poznámka nám odhaluje smýšlení zatím sice malé, ale stále se zvětšující skupiny matematiků, kteří nás žádají, abychom se zamýšleli nejenom nad výhodami, které plynou ze znalosti něčeho s absolutní jistotou, ale také nad otázkami ceny, kterou bude třeba za tuto jistotu zaplatit. Viz např. A. Jaffe a F. Quinn [7] či G. Chaitin [5]. Zatím jsme se však stále nedostali k hlavní otázce. Proč potřebuje Zeilberger zavádět „pravdy“ platící jen s jistou pravděpodobností a jak vysvětlit ortodoxním matematikům, že by to nemusela být tak velká oběť na něco takového přistoupit?

Nejdůležitější je podstata věci. Proč Zeilberger klade takový důraz na to, že absolutní pravda není to nejdůležitější? Nejsmysluplnější odpověď je ta, že mu jde o hlubší pochopení věci. V článku *Identities in Search of Identities* Zeilberger obhajuje strategii zkoumání identit vhodných k odvozování dalších identit. Jak však poznamenává mezi jinými i sám Wilf, je možné vyprodukovat neomezený počet různých identit. Zajímavými je činí až širší kontext či schopnost využít je a zacházet s nimi. Proč bychom si tedy měli myslit, že studium identit pro ně samé by mělo být hlavním cílem našeho snažení?

Zaměřme se v této chvíli na něco, co bychom mohli označit slovním spojením „metamatematické struktury“. Začneme tím, že izolujeme matematiku od jejího vnějšího kontextu. Nyní začneme shromažďovat matematické objekty, jako jsou výroky, věty, statistická data, hypotézy. Přitom uvažujeme jen ty objekty, které se nám zdají něčemu podobné či nějakým způsobem známé. Je pochopitelně prakticky nemožné, že by všechny informace takto shromážděné byly důležité. Proto se poté snažíme zbavit informací irelevantních nebo nepravdivých. Snažíme se tedy provádět jakousi postupnou eliminaci či třídění informací. V této fázi našeho procesu není nerozumné uvažovat i výroky, jejichž pravdivostí si nejsme jisti — všechny výroky by měly být podrobeny stejně pečlivému zkoumání. Může se stát, že ony výroky, o jejichž pravdivosti nevíme nic určitého, budou vyhovovat nějaké nově zformulované hypotéze a že se takto podaří nalézt její rigorózní důkaz v rámci námi vytvořeného nového kontextu matematiky.

WZ algoritmus nám ovšem může místo rigorózního důkazu nějaké identity nabídnout pouze jistou pravděpodobnost (možná velmi vysokou), že daná identita platí. Jak budeme takový výsledek interpretovat? A co si počít, nejsme-li skutečně schopni dokázat onu identitu rigorózně?

Podle Chaitina můžeme takovou identitu přijmout jako nový axiom.

Věřím, že nejen elementární teorie čísel, ale i zbytek matematiky by se měl studovat více v duchu experimentální vědy, že bychom měli být schopni uplatňovat nové principy. Věřím, že Euklidův výrok, že axiomem je pouze evidentní pravda[5]*), je velký omyl. Schrödingerova rovnice jistě není evidentní pravda! A Riemannova hypotéza také ne, je však velmi užitečná. Fyzik by řekl, že zde jsou „více než postačující experimentální podklady, hovořící pro platnost Riemannovy hypotézy“, a šel by dál, přičemž by ji bral jako pracovní předpoklad.* ([5], str. 24)

V tomto případě máme dostatečné experimentální ověření pravdivosti naší hypotézy a můžeme ji chápat jako něco víc než jen pracovní předpoklad. Můžeme ji dokonce formálně začlenit do systému matematiky. Musíme se přitom samozřejmě vyhnout náhodnému a nesystematickému zavádění nových axiomů do naší teorie.

Experiment a „teorie“

Ve své „Radě mladému vědci“ (*Advice to a Young Scientist*) definuje P. B. Medawar čtyři druhy vědeckého experimentu: experiment kantovský, baconovský, aristotelovský a galileovský.[6]) Matematika vždycky využívala myšlenkové pochody charakteristické pro první tři ze čtyř uvedených druhů experimentů, přičemž galileovskému experimentu se snažila víceméně vyhnout. Ve snaze vymezit naše pojetí experimentální matematiky se budeme snažit využít i postupů charakteristických pro galileovský model.

Začněme kantovským experimentem. Medawar uvádí, že příkladem takového experimentu může být například

proces vzniku klasických neeukleidovských geometrií (hyperbolické a eliptické) náhradou Euklidova axiomu o rovnoběžkách (či jeho ekvivalentů) nějakou alternativní formulací. ([11], str. 73–74)

Zdá se, že filozofie kantovského experimentu [tedy experimentu myšlenkového (*pozn. překl.*)] je matematikům nejbližší. Dokonce i zastánce učení Platonova musí připustit, že matematika je přístupná jedině prostřednictvím lidského myšlení, a proto celou matematiku lze považovat za jeden velký kantovský experiment. Můžeme diskutovat o tom, jestli eukleidovská geometrie je pouze idealizace geometrie vnějšího světa (ve které bod nemá délku ani výšku a přímka pouze délku, ale už ne tloušťku) nebo jestli je okolní svět nedokonalým obrazem našich ideálních čistě geometrických objektů. V obou případech však předměty našeho zájmu leží zcela v myšlenkové oblasti.

---

[5]) Není jasné, jestli Eukleidés něco takového skutečně řekl. Výrok sám však v sobě jistě má něco nevyvratitelného.

[6]) Přesné definice těchto čtyř pojmů autoři v článku nepodávají. Jejich význam je však víceméně patrný z dalšího textu, ve kterém autoři jednotlivé kategorie experimentu přibližují, zejména vhodnými citacemi z Medawarovy práce. (*Pozn. překl.*)

Podobně nelze matematiku oddělit ani od filozofie baconovského experimentu. Řečeno spolu s Medawarem, při baconovském experimentu jde o

spekulativní úvahy, stavěné jako protiklad k přírodním dějům; jde o důsledek snahy „vyzkoušet" si některé postupy nebo jde o pouhé „hraní si" bez předem jasného cíle. ([11], str. 69)

Většina z těch věd, které se nazývají experimentálními, je v podstatě baconovská. Na druhé straně má něco do sebe i názor, že také myšlenkové postupy matematiky zapadají do rámce baconovských experimentů: Člověk zkusí použít tuhle transformaci či využít tamtu identitu, zajímá jej, co se stane, když zeslabí nějakou podmínku či zesílí jinou. Dokonce i použití pravděpodobnostní úvahy například v teorii čísel může být považováno za druh baconovského experimentu. Přesto platí, že rozhodujícím kritériem pro publikování je konečný úspěch nebo neúspěch takového experimentu, byť by jeho průběh byl sebezajímavější. Pokud takové „hraní" vedlo k výsledku (tedy věta je dokázána, nebo je nalezen protipříklad), výsledek se publikuje; v opačném případě se celá práce vyhodí do odpadkového koše.

Aristotelovský experiment je experiment, který má předvést, dokumentovat či potvrdit nějaký fakt; jde tedy o něco, co běžně označujeme slovem „demonstrace":

Přiložte elektrody k nervovým zakončením na těle žáby a hle — její noha sebou cukne; nezapomeňte zazvonit předtím, než dáte psovi jídlo, a vida: samotný zvuk zvonku zanedlouho způsobí, že pes začne slintat. ([11], str. 71)

Aristotelovským experimentem v kontextu matematiky jsou například ony konkrétní příklady, které používáme, abychom přiblížili naše definice a věty; nebo jsou to ilustrativní problémy, které dáváme studentům.

Posledním v řadě je galileovský experiment:

Galileovský experiment je experiment, jehož cílem je volba mezi nabízenými možnostmi. Takový experiment nás buď utvrdí v našem náhledu na věc, nebo nás přinutí začít uvažovat o jeho korekci. ([11], str. 71)

V ideálním případě slouží galileovský experiment k tomu, abychom si vybrali, která ze dvou či více nabízených možností je pravdivá. Nesmíme však zapomenout na tzv. jev Willa Rogerse, který může zkomplikovat odpovědi i na víceméně jasně položené otázky.[7]) Vidíme to například v lékařství: Otázky typu „Je tento lék úspěšný (ať už z hlediska přežívání pacientů, délky a kvality jejich života, nebo z hlediska

[7]) Jde o jev Willa Rogerse či tzv. Simpsonův paradox. Oba termíny se týkají problémů, které vznikají při přeskupování prvků daných množin. Will Rogers jednou komentoval skutečnost, že se jeho známý přestěhoval ze státu Ohio do Kalifornie slovy, že se tímto činem zvýšilo průměrné IQ obou států. Termín „jev Willa Rogerse" se poté stal běžným v lékařských pojednáních: přeskupením onkologických pacientů do skupin charakterizovaných nízkým a vysokým rizikem, kterému jsou pacienti vystavováni, může mít za následek to, že obě skupiny pacientů budou mít lepší výsledky. Jiný příklad: baseballová sezóna má dvě poloviny; přitom hráč, který byl nejlepším odpalovačem v první i ve druhé polovině, nemusí být nejlepším odpalovačem celé sezóny. [Matematicky řečeno, $4/9 > 10/23$ a $2/7 > 3/11$, ale $(4+2)/(9+7) < (10+3)/(23+11)$.] Rozpoznání takovýchto jevů je často přisuzováno E. H. Simpsonovi (1951).

nákladů do léku investovaných)?“ „Je tato terapie lepší než tamta?“ je často velmi těžké zodpovědět právě z důvodů již zmíněného efektu. Co však v již citované pasáži Medawar uvádí, ne zcela souhlasí se současným nazíráním na experiment ve fyzice. Newtonovská fyzika se zdála být bez chyb [včetně mnoha experimentů to potvrzujících (*pozn. překl.*)], a přesto byla nakonec překonána [10]; v současnosti tedy panuje shoda v názoru, že libovolné množství experimentálních podkladů ještě nedokazuje tvrzení o světě kolem nás a že naše modely reálného světa jsou jenom modely. Medawar je si vědom obtíží spojených s experimentálním důkazem tvrzení, na rozdíl od moderních filozofů má však větší důvěru v možnosti experimentálního vyvrácení hypotézy.

Jestliže tedy experiment není schopen jednoznačně ukázat pravdivost jedné z daných možností nebo dokazovat věty, čeho je vlastně schopen?

„Teoretické“ experimenty

I když matematika v poslední době prožívá jakousi krizi, přece jen není tato krize tak vážná jako krize, kterou lze vystopovat ve fyzice. Netestovatelnost některých částí teoretické fyziky (např. teorie strun) vedla k větší důvěře ve schopnost matematiky provést „experimentální ověření“ některých faktů. Je možné, že i taková úvaha mohla vést Arthura Jaffeho a Franka Quinna k zavedení pojmu „teoretická matematika“ (který může překvapit mnoho matematiků domnívajících se, že něco takového už léta dělají).[8])

Není proto překvapující, že tato „teoretická matematika“, beroucí si za svůj vzor teoretickou fyziku, má velmi blízko k některým prvkům galileovského pojetí experimentu. Než se dá provést experiment, musí se zformulovat hypotézy, a v této části procesu může nerigorózní přístup skutečně pomoci.

Arthur Jaffe a Frank Quinn ve své práci „Teoretická matematika: na cestě ke sjednocení matematiky a teoretické fyziky“ (*Theoretical Mathematics: Toward a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics*) volají zejména po zmírnění požadavků kladených na rigoróznost. Mají tím především na mysli onen zdlouhavý postup matematiky, při kterém je třeba všechno nejprve rigorózně ukázat, a teprve pak je možno výsledek publikovat. Na druhé straně jsou si oba autoři vědomi rizika, které by bylo spojeno s nerozvážným etablováním takové „matematiky plné hypotéz“ a které by mohlo vést až k chaosu.

Jejich návrh má dvě části. Navrhují, aby

> *teoretická práce byla jasně a zřetelně označena jako teoretická, a tedy neúplná; za druhé pak aby většina zásluh za výsledek byla přisouzena rigorózní práci, která výsledek ověří* ([7], str. 10).

Tento návrh si klade za cíl povzbudit čtenáře takovýchto teoretických článků k vědecké práci, dovést je ke snaze dokázat teoreticky předpovězené výsledky. Jeho

[8]) Dále budeme pod teoretickou matematikou rozumět právě termín zavedený Jaffem a Quinnem. (*Pozn. překl.*)

autoři chtějí, aby se jednoznačně rozlišovalo mezi dokázanými větami a nedokázanými hypotézami „teoretické“ matematiky.

Je pravda, že matematici už podobným způsobem pracují, i když na podstatně nižší úrovni: přesněji řečeno, motivační úvahy a nedokázané hypotézy se staly nedílnou součástí mnoha matematických publikací, jsou však přece jen považovány pouze za jakési dodatky k rigorózní části práce.

Pokud bychom měli označit některé z úvah Jaffeho a Quinna za diskutabilní, byla by to snad jejich snaha přenést metody teoretické fyziky na matematiku, aniž by uvažovali důležitou etapu ověřování hypotéz fyziky, za kterou nese odpovědnost disciplína zvaná experimentální fyzika. Může se proto stát, že „teoretická matematika“ si sama nevystačí a bude potřebovat k ověřování svých hypotéz matematiku experimentální.

Protože autoři tohoto článku jsou orientováni především na počítače, mají v této chvíli na mysli zejména počítačové hypotézy a jejich ověřování. Existují však samozřejmě i jiné možnosti.

Závěr

Uzavíráme náš článek definicí experimentální matematiky.

Experimentální matematika *je odvětví matematiky, jejímž konečným cílem je kodifikace a přenášení intuitivních vhledů uvnitř matematické obce pomocí experimentálního zkoumání formálních hypotéz i neformálních domněnek a pečlivé analýzy dat získaných při této činnosti.*

Výsledky dosažené experimentálně obvykle postrádají onu rigoróznost tolik typickou pro tradiční matematiku, poskytují však široký vhled do matematických problémů a mohou být vodítkem pro další výzkum, ať už experimentální nebo tradiční. Hypotézy, které jsou experimentálně ověřeny, posilují naše přesvědčení o jejich pravdivosti i tehdy, když jejich rigorózní důkazy ještě nejsou k dispozici. Doufáme, že se tak podaří vytvořit jakési intuitivní chápání matematiky, která může být sdělována pomocí konkrétních příkladů a jejich rozborů, na rozdíl od současného stavu, kdy se intuitivní pohledy mohou přenášet pouze osobním sdělováním.

Pokud by byla matematická komunita jako celek méně roztříštěna, asi bychom z naší definice odstranili slovo *kodifikace*. Víme však, že komunikační problémy mezi různými obory matematiky existují. Matematičtí experimentátoři se proto musí snažit, aby uspořádali své náhledy a prezentovali své údaje způsobem, který by byl přístupný co nejširší matematické veřejnosti.

O autorech

Jonathan Borwein získal PhD na Oxfordské univerzitě, kde studoval na Rhodesovo stipendium, a to v roce 1974. Pracoval na univerzitách v Dalhousie, Carnegie-Mellon a ve Waterloo. V roce 1993 získal stálé místo na Univerzitě Simona Frasera jako ředitel Centra pro experimentální a konstruktivní matematiku (CECM) (`http://www.cecm.sfu.ca/`). Jeho hlavním vědeckým zájmem je výpočetní a funkcionální analýza a optimalizace.

PETER BORWEIN získal PhD na University of British Columbia v roce 1979 pod vedením Davida Boyda. Od té doby je zaměstnancem Dalhousie University a Univerzity Simona Frasera (s občasnými pobyty v Oxfordu a na University of Toronto). Hlavní oblastí jeho zájmu je klasická analýza a teorie čísel. Jeho filozofické náhledy nejlépe vystihuje právě tento článek. Viz též jeho osobní stránku `http://www.cecm.sfu.ca/~pborwein/`.

ROLAND GIRGENSOHN získal PhD v německém Clausthalu v roce 1992; jeho hlavní vědecký zájem je soustředěn na výpočtovou a funkcionální analýzu. Poté co strávil 3 roky jako post-doc a spolupracoval postupně s třemi různými Borweiny, vrátil se do Lübecku, aby zde pokračoval ve svých výzkumech.

SHELDON PARNES získal PhD v roce 1992 na Temple University ve Philadelphii, kde studoval s Doronem Zeilbergrem. Dva roky pracoval jako post-doc v CECM, než se se svou ženou a čtyřmi dětmi odstěhoval do Denveru v Coloradu, kde pracuje na geometrickém CAD/CAM systému pro Auto-trol Tech Co. Mezi jeho matematické zájmy patří symbolické výpočty, experimentální a počítačová analýza a matematika zaměřená na problematiku CAD.

Literatura

([1]–[14] jsou reference citované v originálním článku)

[1] ATIYAH, M., BOREL, A., CHAITIN, G. J. et al.: *Responses to "Theoretical Mathematics: Towards a Cultural Sythesis of Mathematics and Theoretical Physics" by A. Jaffe and F. Quinn.* Bull. Am. Math. Soc. *(2) 30* (1994), 178–207.

[2] BAILEY, D. H., BORWEIN, J. M., GIRGENSOHN, R.: *Experimental evaluation of Euler sums.* Experimental Math. *3 (1)* (1994), 17–30.

[3] BORWEIN, J. M., BORWEIN, P., GIRGENSOHN, R., PARNES, S.: *Experimental mathematical investigation of decimal and continued fration expansions of select constants* (unpublished).

[4] BORWEIN, J. M., BORWEIN, P., GIRGENSOHN, R., PARNES, S.: *Making sense of experimental mathematics.* CECM Preprint 95:032 (1995).

[5] CHAITIN, G. J.: *Randomness and complexity in pure mathematics.* Int. J. Bifurcation Chaos. *4* (1994), 3–15.

[6] EPSTEIN, D., LEVY, S., DE LA LLAVE, R.: *About this journal.* Experimental Math. *1 (1)* (1992), 1–3.

[7] JAFFE, A., QUINN, F.: *Theoretical mathematics: Towards a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics.* Bull. Am. Math. Soc. *2 (29)* (1993), 1–13.

[8] JAFFE, A., QUINN, F.: *Response to comments on "Theoretical Mathematics".* Bull. Am. Math. Soc. *2 (30)* (1994), 208–211.

[9] LAKATOS, I.: *Proofs and Refutations.* Cambridge: Cambridge University Press 1970.

[10] LAKATOS, I.: *The Methodology of Scientific Research Programmes: Philosophical Papers Volume 1.* Cambridge: Cambridge University Press 1978.

[11] MEDAWAR, P. B.: *Advice to a Young Scientists.* New York: Harper Colophon 1981.

[12] THURSTON, W. P.: *On proof and progress in mathematics.* Bull. Am. Math. Soc. *(2) 30* (1994), 161–177.

[13] ZEILBERGER, D.: *Identities in search of identites.* Preprint (1992).

[14] ZEILBERGER, D.: *Theorems for a price: Tomorrow's semi-rigorous mathematical culture.* Notices Am. Math. Soc. *40 (8)* (1993), 978–981.

[15] NETUKA, I., VESELÝ, J.: *Nedávné poznatky o čísle* π. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie *43* (1998), 217–236.

[16] `http://www.cecm.sfu.ca/~jborwein/talks.html`