František Štěpánek

130 let divergentních trigonometrických Fourierových řad (2. část)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 49 (2004), No. 2, 122–128

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/140852

130 let divergentních trigonometrických Fourierových řad (2. část)

František Štěpánek, Praha

JEAN BAPTISTE JOSEPH DE FOURIER
(1768–1830)

Dalekosáhlé aplikace Lebesgueovy teorie míry a integrálu ve Fourierově analýze „zlatého věku“ ([16, s. 10–11]) se speciálně týkaly i problematiky divergentních F-řad funkcí z L. Byla zde postupně získána řada pozoruhodných výsledků, o kterých nyní stručně pojednáme.

4. F-řady divergentní s. v.[12])

Roku 1911 byl publikován (v Itálii) příklad řady (1), která diverguje s. v. a přitom $u_k \to 0, \; v_k \to 0, \; k \to \infty$.

[12]) Obsah tohoto paragrafu a Dodatku je i drobným potvrzením slov G. Choqueta o Lebesgueově pojmu „skoro všude“ ([33, s. 160_{15-14}]).

RNDr. FRANTIŠEK ŠTĚPÁNEK, CSc. (1938), Jirečkova 3/1021, 170 00 Praha 7.

Autorem tohoto příkladu byl NIKOLAJ NIKOLAJEVIČ LUZIN (1883–1950), pozdější čelný představitel tzv. „Ruské školy" teorie funkcí reálné i komplexní proměnné ([16, s. 13], [34, s. 138], [36, s. 11–45, 271–277], [38, s. 6]).[13])

1. Právě zmíněný Luzinův příklad jistě znal student ANDREJ NIKOLAJEVIČ KOLMOGOROV (* 1903), který roku 1922 ([37, s. 51, 65]) dokázal následující větu.

Věta K. *Existuje funkce $f \in L$ taková, že rovnost*

$$\varlimsup_{n\to\infty} |s_n(f,x)| = \infty \tag{9}$$

platí s. v.

Při *konstrukci* této funkce f A. N. Kolmogorov postupoval geometrickou „Lebesgueovou cestou" (viz Lemma L v našem § 2). Místo bodu $x = 0$ (viz $(*)$) však uvažoval obecněji body x z „velkých" množin $M_n \subset I$, tj. takových, že $\lim\limits_{n\to\infty} \mu M_n = 2\pi$.

Požadovanou funkci f pak definoval jako součet nekonečné řady jistých „hrbovitých" funkcí ([17, s. 391–401], [37, s. 57–64]).[14])

2. Myšlenky A. N. Kolmogorova (mj. z důkazu věty K) byly záhy uplatněny i při odvození následujících příbuzných výsledků (tvrzení).

T 1. *Existuje funkce z L^2, jejíž F-řadu lze „přerovnat" tak, aby* ***divergovala s. v.***

Toto tvrzení uvedli (bez důkazu!) A. N. Kolmogorov a DIMITRIJ JEVGENĚVIČ MENŠOV (1892–1988) roku 1927. (Srov. [37, s. 71–81], resp. [21, kap. 9, § 1] a náš Dodatek.)

T 2. *Existuje funkce $f \in L$ taková, že* (9) *platí* ***všude*** *v* $\mathbb{R}$.

Konstrukci funkce f (po konzultaci s A. N. Kolmogorovem) provedl ANTONI ZYGMUND (1900–1992), který byl od roku 1930 profesorem v (tehdy) polském Vilně (= Vilnius) ([35, s. 47]).[15])

Dotyčná konstrukce tak byla poprvé vyložena v Zygmundově vynikající monografii [40, s. 488–494]).

T 3. *Existuje funkce $f \in L$ taková, že nerovnosti*

$$-\infty < \varliminf_{n\to\infty} s_n(f,x) < \varlimsup_{n\to\infty} s_n(f,x) < \infty \tag{O_2}$$

platí s. v.

Příslušnou konstrukci publikoval Zygmundův spolupracovník JÓZEF MARCINKIEWICZ (1910–1940) roku 1936. (Srov. [35, s. 83–86], [37, s. 65], [40, s. 486].)[16])

---

[13]) Trigonometrická řada z Luzinova příkladu diverguje dokonce *všude* v $\mathbb{R}$ ([36, s. 455]).

[14]) Pravděpodobně není dosud známo, jak „rychle" Fourierovy koeficienty funkce f (viz (2)) konvergují k nule ([37, s. 69]).

[15]) A. N. Kolmogorov r. 1926 takovou funkci f totiž nesestrojil!! (Srov. [17, s. 412, poznámka *)].)

[16]) Modifikacím právě uvedených výsledků pro případ obecných ortogonálních řad (srov. např. [21, s. 483–484]) byla věnována rozsáhlá hlavní přednáška na Mezinárodním matematickém kongresu v Helsinkách r. 1978. Přednášku proslovil S. V. Bočkarev (Matematický ústav V. A. Stěklova).

V souvislosti s T 3 podotkněme, že:

T 4. *Neexistuje funkce $f \in L$, jejíž F-řada diverguje s. v. a přitom platí (O_1).*

T 5. *Neexistuje funkce $f \in L$, pro kterou platí (O_2) všude v $\mathbb{R}$.*

Ověření těchto výsledků není triviální (viz dále Dodatek).

3. Jiné důkazy tvrzení T 2 a T 3 podali JEAN-PIERRE KAHANE (Université de Paris--Sud) a THEODOR W. KÖRNER (Trinity Hall, Cambridge). (Srov. [43][17]), [46].)

Markantní elegance a jednoduchost jejich důkazů je způsobena především tím, že se v nich užívá *komplexní* tvar F-řady. (Srov. např. [38, s. 1–13, 30–39], [39, s. 1–9], [40, s. 13–14].) „Technologické" postupy z prací [43] a [46] dále zdokonalil SERGEJ VASILJEVIČ KOŇAGIN (Moskevská státní univerzita) v článku [44].

4. Jedním z cílů práce [44] bylo získat „úzký" systém funkcí[18]) z třídy L, v němž lze nalézt funkci s F-řadou, divergentní všude v $\mathbb{R}$ ([44, s. 98 a Corollary 1, s. 99]).

K provedení konkrétní konstrukce takové funkce f S. V. Koňagin fenomenálním způsobem zobecnil klasický Lebesgueův postup. (Viz Lemma L v našem § 2.) Bod $x = 0$ (srov. $(*)$) totiž nahradil body „blízkými" bodům jisté *fraktální* množiny, podobné Cantorovu diskontinuu.

Dlouhý a technicky náročný důkaz příslušného výsledku (viz Lemma 3.4. na str. 111–113 v [44]) je mj. vzorovou ukázkou použití moderních **diskrétních** metod ve Fourierově analýze. Pracuje se s diskrétní verzí Dirichletova jádra (6), provádějí se odhady diskrétní (komplexní) Hilbertovy transformace ([44, s. 100–107], resp. dále [39, s. 93–106 apod.]).[19])

Podle schématu A. N. Kolmogorova ([17, kap. V, § 20]) pak S. V. Koňagin definuje jistou funkci $f \in L$ takovou, že pro libovolné $x \in I$ posloupnost (4) není *shora* omezená ([44, Lemma 3.5, 114–115 a § 4]).

Tematika probraná v předchozích paragrafech (zejména v § 3) nás přímo inspiruje k zavedení následujících obecných pojmů.

5. Množina divergence (resp. množina $\mathcal{T}$-divergence) F-řady

1. Nadále budeme předpokládat, že $A = (a_{mn})$, $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}_0$, je „nekonečná matice" reálných čísel taková, že $a_{mn} = 0$, $n > m$, pro kterou navíc platí známé Silvermanovy-Steinhausovy-Toeplitzovy podmínky ([40, s. 126, (I), (II), (III)], [42, s. 56, 65, (I), (II), (III)]).

[17]) Tento článek (a příslušný svazek dotyčného časopisu) je věnován **in memoriam** L. Fejérovi — „mathematici Hungarici excellentissimi" († 15. 10. 1959).

[18]) Takový „úzký" systém funkcí je možno definovat např. pomocí vhodné „váhové funkce" (= "weight function"), krátce řečeno *váhy*. (Srov. [20, s. 542–543], [46, Lemma 5.2., s. 112].)

[19]) Zde je vhodné připomenout slova G. Choqueta z [33, § 2.3., s. 164, a § 5, s. 167–168].

Pro $f \in L$ položme

$$t_m(f,x) = \sum_{n=0}^{m} a_{mn} s_n(f,x), \qquad x \in I, \quad m \in \mathbb{N}_0. \tag{10}$$

Rovnosti (10) definují jistou *regulární* limitovací (zde lépe sčítací) metodu F-řad (3), řekněme $\mathcal{T}$ ([40, s. 126–127], [42, s. 65]). Speciálními případy metody $\mathcal{T}$ jsou např. metoda (C,k), $k \in \mathbb{N}$, metoda Rieszových průměrů apod. ([42, kap. III]).

Definice ([37, s. 53], [45, s. 152]). Mějme funkci $f \in L$, množinu $M \subset I$ a sčítací metodu $\mathcal{T}$. Řekneme, že M je *množina divergence* (resp. *množina $\mathcal{T}$-divergence*) F-řady (3), jestliže posloupnost (4) (resp. (10)) diverguje pro všechna $x \in M$ a konverguje pro všechna $x \in I \setminus M$.[20])

Poměrně snadno lze konstruovat funkci $f \in \mathcal{C}$ takovou, že množina divergence její F-řady je jednobodová (viz D-příklad H. Schwarze v § 1), resp. spočetná (viz příklad v § 3, 1.). Naopak při dané funkci $f \in L$ může být určení množiny divergence F-řady (3) dosti problematické (viz § 2, 2.).

2. K tvrzením z § 4 nyní přidáme další tvrzení, která jsou zčásti topologické povahy.

T 6. *Buďte $f \in L$ a M množina divergence* (*resp. množina $\mathcal{T}$-divergence*) *F-řady* (3). *Potom M je typu $G_{\delta\sigma}$.*[21])

Důkaz tohoto (celkem známého) tvrzení je naznačen v [45, s. 152]. (Srov. i [17, s. 433–434], [37, s. 66].)

Jistým překvapením byla publikace následujících výsledků.

T 7. *Existuje množina M typu $G_{\delta\sigma}$* ***kladné*** *Lebesgueovy míry, která není množinou divergence F-řady* (3) ***žádné*** *funkce $f \in L$.*

Nepříliš složitou konstrukci takové množiny M provedl T. W. Körner ([45]). Pozoruhodným rysem zmíněné konstrukce je však to, že se opírá o platnost Luzinovy hypotézy! (Srov. [45, Lemma, s. 153], [37, s. 67] a náš Dodatek.)

T 8. *Körnerova množina M z důkazu* T 7 *není množinou $\mathcal{T}$-divergence F-řady* (3) ***žádné*** *funkce $f \in L$.*

K tomu srov. [37, s. 67], kde je citován dokonce ještě obecnější výsledek.

3. Právě uvedená tvrzení T 6, T 7 a látka § 3 nás okamžitě přivádějí k formulaci např. těchto — pravděpodobně dosud neřešených — problémů.

Mějme neprázdnou **nulovou** množinu $M \subset I$ typu $G_{\delta\sigma}$.

- Existuje funkce $f \in L$ taková, že M je množina divergence F-řady (3)?
- Existuje funkce $f \in \mathcal{C}$ taková, že pro každé $x \in M$ platí (O_2) a F-řada (3) konverguje pro všechna $x \in I \setminus M$?

---

[20]) Samozřejmě M (resp. $I \setminus M$) je třeba i prázdná.

[21]) Podle definice množina je typu $G_{\delta\sigma}$, právě když je sjednocením spočetně mnoha množin typu G_δ ([8, s. 241_{12-11}]). Přitom prázdnou množinu považujeme za množinu typu $G_{\delta\sigma}$.

Komentář. Je známo, že k *libovolné* neprázdné množině $M \subset \langle 0, 2\pi)$ typu G_δ lze konstruovat funkci $f \in L$ takovou, že pro každé $x \in M$ platí (9). (Srov. [17, s. 427–433], [37, s. 66–67].)

Dodatek: 90 let od publikace Luzinovy hypotézy

1. Zde pojednáme ještě stručně o bodové *konvergenci* F-řad funkcí z L^p $(p > 1)$. P. R. Halmos ve [3, s. 315_{19-17}] napsal:

> *„... nejzávažnější otázka v tomto směru byla položena Luzinem a zůstala po 50 let nezodpovězena: konverguje pro f integrovatelnou s kvadrátem na $\langle 0, 2\pi\rangle$ její Fourierova řada skoro všude?...“*

Takovou *otázku* však žádný znalec Luzinova díla v jeho písemnostech doposud nenašel. N. N. Luzin totiž uvedl bez důkazu ([47], [36, s. 219]) svou *domněnku*, že *platí* toto tvrzení.

LH. *F-řada libovolné funkce $f \in L^2$ konverguje s. v.*

Tuto hypotézu N. N. Luzin podpořil řadou promyšlených argumentů a připojil jeden příbuzný (málo známý) problém Lebesgueův ([36, s. 216–220]). Přesto se někteří experti dlouho domnívali, že tvrzení LH spíše neplatí ([3, s. 315], [49, s. 250]).

2. Roku 1966 však Lennart Axel Edvard Carleson (* 1928), profesor univerzity v Uppsale, nečekaně podal excelentní důkaz LH. (Srov. [38, s. 162–163], [41], [48], [49].)

Tím bylo i dokázáno, že F-řada libovolné funkce z $\mathcal{C}$ může divergovat pouze na *nulové* množině v $\mathbb{R}$ (viz náš § 3, bod 3.). Tak byla také potvrzena hypotéza P. Du Bois-Reymonda z roku 1876 (viz náš § 1, 3).

Charles Louis Fefferman[22]) (* 1949) publikoval roku 1973 druhý důkaz LH. (Srov. [37, s. 68], [48].)

Oba autoři pracují s komplexním Dirichletovým „partial sum“ operátorem ([41], [48]), ale jejich důkazy LH se diametrálně liší.

- L. Carleson věnuje enormní pozornost lokálním odhadům integrálů, při vtipném a vyváženém ([3, s. 315]) výběru příslušných integračních oborů. Přitom „jemně“ užívá maximální funkci G. H. Hardyho a J. E. Littlewooda ([38, s. 155–156], [40, s. 54–61], [49, §§ 2–5]), Hilbertovu transformaci ([39, s. 95]) apod.
- Ch. Fefferman téměř „ignoruje“ vlastnosti funkce a rozkládá uvažovaný integrální operátor (!) v nekonečnou řadu jednodušších operátorů ([48]). To je v podstatě originální myšlenka J. B. Fouriera (srov. [13, s. 61–64]), korektně prezentovaná např. A. Plessnerem roku 1925 (srov. [17, s. 333–337]).

[22]) Ch. L. Fefferman obdržel r. 1978 prestižní Fieldsovu medaili v oboru vícerozměrná komplexní analýza.

3. Teprve *potvrzení* Luzinovy hypotézy (srov. [17, s. 421]) umožnilo elegantním způsobem dokázat tvrzení T 4 a T 5.

Důkaz T 4 *postupem reductio ad absurdum.* Předpokládejme, že *existuje* funkce $f \in L$, jejíž F-řada diverguje s. v. a současně platí (O_1). Jsou-li $\sigma_n(f,x)$ $(x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0)$ aritmetické průměry součtů (4) (srov. [20, s. 518]), potom zřejmě také

$$(O_3) \qquad |\sigma_n(f,x)| \leqq A, \qquad x \in I, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Přitom víme, že $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f,x) = f(x)$ s. v. (Srov. [17, s. 143–144], [40, s. 151–152].) Vzhledem k (O_3) je pak nutně i $|f(x)| \leqq A$ s. v. Podle LH tedy F-řada funkce f *konverguje s. v.*! To je ovšem spor.

Užijeme-li generičnost ([33, s. 160]) ve formě Osgoodovy věty ([8, s. 238]) na vlastnost (O_2), pak podobným způsobem snadno dokážeme i T 5 (srov. [46, s. 117–118], [37, s. 65]).

4. Richard A. Hunt upravil Carlesonův postup (viz 2.) a dokázal, že F-řada každé funkce z L^p $(p > 1)$ konverguje s. v. Příslušné větě se dnes říká „věta Carlesonova-Huntova“ a právem patří k „velkým větám“ matematické analýzy dvacátého století ([41]). Na jednoduchý důkaz této věty se však stále čeká...

Poděkování. Závěrem autor s vděčností vzpomíná na laskavost prof. R. A. Hunta, prof. J. Maříka a prof. A. Zygmunda, kteří mu poskytli řadu užitečných informací a kopie u nás nedostupných publikací.

L i t e r a t u r a

Články z PMFA

[33] Choquet, G.: *Spojité, diskrétní a... všechno ostatní.* *48* (2003), 158–168.

[34] Katětov, M.: *N. N. Luzin a teorie reálných funkcí.* *20* (1975) 137–145.

Dizertace, historie, přehledné články

[35] Kuratowski, K.: *A half century of Polish mathematics.* PWN, Warszawa and Pergamon Press, Oxford 1980.

[36] Luzin, N. N.: *Integral i trigonometričeskij rjad.* Gos. izdatělstvo tech.-teor. litěratury, Moskva-Leningrad 1951.

[37] Uljanov, P. L.: *A. N. Kolmogorov i raschodjaščijesja rjady Furje.* Uspěchi matem. nauk *38* (1983), 51–90.

Monografie, učebnice

[38] Edwards, R. E.: *Fourier series, Vol. I + Vol. II.* Holt, Rinehart and Winston, New York 1967.

[39] Lasser, R.: *Introduction to Fourier series.* Marcel Dekker, New York 1996.

[40] Zygmund, A.: *Trigonometrical series.* Monografje matematyczne Tom V, Warszawa––Lwów 1935. (Citace podle ruského překladu: *Trigonometričeskije rjady.* Izdatělstvo MIR, Moskva 1965.)

Učební texty

[41] JORSBOE, O. G., MEJLBORO, L.: *The Carleson-Hunt theorem on Fourier series.* Lecture Notes in Math. 911, Springer-Verlag, Berlin 1982.

[42] ŠTĚPÁNEK, F.: *Teorie aproximací I. (Základy teorie limitovacích metod).* SPN, Praha 1979.

Další články

[43] KAHANE, J.-P.: *Sur la divergence presque sûre presque partout de certaines séries de Fourier aléatoires.* Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis, Sectio Mathematica, 3–4 (1960–1961), 101–108.

[44] KONYAGIN, S. V.: *On everywhere divergence of trigonometric Fourier series.* Sborník: Mathematics 191 (2000), 97–120.

[45] KÖRNER, T. W.: *Sets of divergence for Fourier series.* Bull. London Math. Soc. *3* (1971), 152–154.

[46] KÖRNER, T. W.: *Everywhere divergent Fourier series.* Colloq. Math. *45* (1981), 103–118.

[47] LUSIN, N. N.: *Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier.* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris *156* (1913), 1655–1658.

[48] PRESTINI, E.: *On the two proofs of pointwise convergence of Fourier series.* Amer. J. Math. *104* (1982), 127–139.

[49] ZYGMUND, A.: *On certain lemmas of Marcinkiewicz and Carleson.* J. Approx. Theory *2* (1969), 249–257.

Tento seznam literatury (kromě článků z PMFA) je pouze *výběrem* z množství známých bibliografických údajů. Autor milerád poskytne případným zájemcům informace o dalších publikacích.

Zhodnocení přínosu A. N. Kolmogorova pro současnou matematiku jsou věnovány jubilejní články v EMS Newsletter (č. 49, September 2003, č. 50, December 2003).

Fourierova ulice a Fourierovo lyceum v Auxerre, rodném městě J. B. Fouriera.