Aleksandr Aleksandrovich Markov

Matematická logika a numerická analysa

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 3 (1958), No. 5, 516--519

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139961`

MATEMATICKÁ LOGIKA A NUMERICKÁ ANALYSA[1])

Člen korespondent AV SSSR A. A. Markov

V poslední době vystupuje jasně do popředí plodná vzájemná souvislost mezi dvěma vědními obory — mezi matematickou logikou a numerickou analysou[2]). Vznikají proto přirozeně otázky, v čem je podstata této vzájemné souvislosti, jaký má vliv na rozvoj vědy a jaké jsou její praktické důsledky. Pokusíme se, pokud je to v krátkém článku možné, vyložit, jak se na tyto otázky díváme.

Vzájemná souvislost matematické logiky a numerické analysy je organicky spjata s podstatou těchto matematických disciplin samých. Matematickou logiku lze totiž definovat jako nauku o matematických důkazech. Předmětem numerické analysy jsou pak matematické výpočty, metody výpočtů a výpočtové prostředky.

Mezi těmito dvěma kategoriemi předmětů je nejtěsnější souvislost.

Jednou ze základních metod matematické logiky je formalisace důkazů. Axiomy a věty matematických teorií se zapisují ve tvaru formulí, v nichž se používá kromě obvyklých matematických značek také zvláštních symbolů pro logické vazby jako „... a ....“, „... nebo ...“, „jestliže ... pak ...“, „... ne ...“, „... pro všechna ...“, „existuje ... takové ... že ...“. Logickými prostředky, jimiž se dokazují věty, to jest jimiž se věty odvozují z axiomů, se odvozují pravidla pro konstrukce nových formulí ze vzorců již odvozených. Tato pravidla jsou formální, to jest taková, že k ověření jejich správnosti není třeba přihlížet ani ke smyslu vzorců, na něž se aplikují, ani ke smyslu vzorců, jež se odvozují. Je jen třeba se přesvědčit, že tyto formule jsou sestaveny z takových a takových znaků tak a tak seřazených. Důkaz věty se provede odvozením formule, která větu vyjadřuje. Odvození samo je sled vzorců, z nichž konečný vzorec vyjadřuje větu, která nás zajímá; ostatní jsou pak axiomy nebo vzorce, odvozené z některého nebo některých předcházejících vzorců podle některého pravidla.

Vidíme tedy, že formalisace důkazů činí z nich jakési specifické numerické procesy. „Výpočty“ se tu provádějí s formulemi podle zcela určitých pravidel, analogicky algebraickým výpočtům. Okolnost, že tato pravidla se liší od pravidel pro aritmetické operace s čísly nebo od pravidel pro počítání s mnohočleny není podstatná.

Každý numerický problém lze redukovat na úlohu dokázat tvrzení předem daného typu. Dejme tomu na příklad, že máme vypočíst, to jest vyjádřit v desetinném tvaru, číslo $(10 + 17) . (100 + 365)$. Tuto úlohu lze formulovat jako úlohu dokázat rovnost

$$(10 + 17) . (100 + 365) = x\,, \tag{1}$$

kde x je desetinný zápis jistého čísla. Pojem „důkaz“ lze tu brát v širším a poněkud neurčitém smyslu (dokázat něco znamená přesvědčit se o správnosti toho), nebo v užším smyslu, spjatém s nějakou formalisací důkazů. V obou

[1]) Člen korespondent AN SSSR A. A. Марков, *Matěmatičeskaja logika i vyčislitělnaja matěmatika*, Vestnik AN SSSR, 1957,, č. 8, str. 21—25.

[2]) Termínem „numerická analysa“ překládám ruské *vyčislitělnaja matěmatika*. J. V.

případech bude důkaz rovnice (1) sledem dílčích důkazů rovností

$$10 + 17 = 27\,,$$
$$100 + 365 = 465\,, \tag{2}$$
$$27\,.\,465 = 12555 \tag{3}$$

a dovede k výsledku

$$(10 + 17)\,.\,(100 + 365) = 12555\,.$$

Může se namítnout, že rovnost (2) není třeba dokazovat, neboť je zřejmá. Taková námitka se může ovšem týkat jen obvyklého širokého pojmu „důkazu". K jejímu vyvrácení stačí připojit k důkazům odvolávky na zřejmost.

Rovnost (3) sotva bude někdo pokládat za samozřejmou. Jejím důkazem může být výpočet

$$\begin{array}{r} 465 \\ \times\ \ 27 \\ \hline 3255 \\ 930\ \ \\ \hline 12555 \end{array}\,,$$

provedený podle obyčejných pravidel pro násobení čísel.

Vidíme zároveň, že numerické problémy obsahují obvykle i něco nového ve srovnání s problémy důkazů těch nebo jiných tvrzení. V numerických problémech jde obvykle o vyhledání patřičných hodnot neznámých veličin, které se vyskytují v tvrzeních, jež se mají dokazovat.

Jak se najdou hodnoty neznámých veličin? Jakých operací je k tomu třeba a v jakém sledu?

Odpovědi na tyto otázky závisejí na problému samém. V některých případech může být neznámá veličina vyjádřena explicitně, jako na příklad v rovnici (1). Pak již takové vyjádření samo určí jednu z možných cest, jak problém vyřešit. Rovnici (1) lze na příklad pokládat za takovýto pokyn pro výpočet neznámé x: nejprve se sečte $10 + 17$, pak se sečte $100 + 365$, nakonec se znásobí výsledky těchto dvou sčítání.

V jiných případech nemusí být jasné, jak najít hodnotu neznámé veličiny z podmínek, jimž má vyhovovat. Pak je problém složitější. Tak je tomu na příklad při řešení rovnic.

Je samozřejmé, že největší zájem se váže ne k řešení jednotlivých numerických úloh, nýbrž k získání obecných metod, které umožňují řešit celé velké třídy problémů. Taková formulace úlohy numerické analysy vede pak přirozeně k pojmu „algoritmus", který má prvořadou úlohu nejen v numerické analyse, ale i v matematické logice.

Algoritmem se obvykle rozumí přesný předpis, jak z daných veličin získat numerickým procesem hledaný výsledek. Typickým případem pro to je Euklidův algoritmus pro výpočet největšího společného dělitele dvou přirozených čísel. Předpis sestává v postupném sestrojování klesající číselné posloupnosti, jejíž první člen je větší z obou daných přirozených čísel, druhý člen je menší z těchto čísel, třetí člen posloupnosti je zbytek po dělení většího z daných čísel menším, další člen dostaneme jako zbytek po dělení menšího z daných čísel zbytkem v předcházejícím kroku získaným atd. Výpočet pokračuje tak dlouho, až se dojde ke zbytku nula. Pak dělitel v posledním dělení je hledaným největším společným dělitelem daných dvou přirozených čísel.

Pro algoritmy jsou charakteristické tři rysy, které vymezují jejich úlohu v matematice:

a) Přesnost předpisu, která neponechává místa žádné libovolnosti — určitost,

b) možnost vyjít z různých daných veličin — hromadnost (masovost),

c) zaměřenost na určitý hledaný výsledek, jehož se nakonec také dosáhne - resultativnost.

Že algoritmy mají prvořadou úlohu v numerické analyse — a že ji zde musí mít — je zcela jasné. Lze dokonce říci, že všechny výsledky numerické analysy spočívají ve vypracování těch nebo oněch algoritmů, které umožňují řešit úlohy určitých typů.

Avšak i v matematické logice mají algoritmy důležitou úlohu. V každé úplně formalisované teorii s určitými pravidly pro odvozování závěrů vzniká přirozeně otázka najít obecnou metodu, pomocí které by bylo možno zjistit odvoditelnost té které formule v dané teorii. Nejde o nic jiného, než o to, vypracovat algoritmus, který by umožňoval najít správnou odpověď — „ano" nebo „ne" — na otázku, je-li odvoditelna formule vyjadřující jisté tvrzení dané teorie.

Je však možno nahlížet na úlohy, najít ty nebo ony algoritmy, jako na přesně formulované matematické úlohy? Vždyť se v nich vyskytuje pojem „algoritmu", jehož smysl byl výše spíše jen popsán než přesně definován.

Řekli jsme, že algoritmus je nějaký „přesný popis", nepokusili jsme se však o to, abychom tento „přesný předpis" definovali. Chceme-li tedy operovat s pojmem „algoritmus" jako s matematickým pojmem, musíme nějak zpřesnit jeho smysl. To bylo provedeno v polovině třicátých let tohoto století pracemi řady autorů, zejména Kleeneea, Churche, Turinga a Posta. Tito vědci šli ve svých bádáních různými cestami a vypracovali různé teorie; tyto teorie se však ukázaly v jistém smyslu ekvivalentními a dovedly k ekvivalentním zpřesněním pojmu algoritmu. Pozdější teorie „normálních" algoritmů se ukázala také ekvivalentní teoriím předcházejícím, zpřesnila pojem algoritmu v podstatě stejně, avšak bezprostředněji.

Podstata tohoto zpřesnění je v tom, že předpis, který představuje algoritmus, se rozloží na sled několika kroků jednoduchých, přesně definovaných typů, přičemž jsou dána pravidla — rovněž jednoduchého a zcela určitého typu — která určují, kdy se má který krok provést a kdy je nutno proces přerušit. Není náhodné, že jeden z výše jmenovaných matematiků, Angličan Turing, byl zároveň odborníkem v numerické analyse a ve své teorii vyšel z jisté idealisace matematického stroje.

Každým strojově realisovaným algoritmem se totiž pojem algoritmu zpřesňuje. To je celkem přirozené. Práce číslicového matematického stroje[3]) bývá rozdělena na takty. V jednom taktu se realisuje nějaká elementární operace; takových elementárních operací je jen nevelký počet typů. Jaká operace se realisuje v tom či onom taktu a kdy dá stroj výsledek, je určeno konstrukcí stroje, jeho počátečním stavem, výchozími daty a programem.

Takový stroj může proto realisovat algoritmy jen zcela určitého typu, které lze přesně popsat. Přitom jsou možná různá zpřesnění pojmu algoritmus, pokud je možno měnit charakter elementárních operací, jež se provádějí v jednom taktu, a mechanismus, který řídí sled těchto operací.

[3]) Rusky *Vyčislitělnaja mašina diskretnogo dějstvija*. *J. V.*

Všechna zpřesnění se však ukázala ekvivalentními. K jakémukoli „algoritmu“ ve smyslu nějakého zpřesnění lze vypracovat „algoritmus“ ve smyslu libovolného jiného zpřesnění, který pracuje stejně jako prvý pokud jde o výsledek (nikoli pokud jde o trvání procesu). Tato ekvivalence různých přesných definic algoritmu svědčí o tom, že se došlo skutečně k jednomu přesnému pojmu algoritmu, který ukazuje logickou podstatu toho, co lze realisovat číslicovým matematickým strojem.

Přitom se ukazuje na první pohled podivná, až zarážející skutečnost: ukázalo se, že v matematice existují neřešitelné problémy pokud jde o vypracovávání algoritmů, neboť v řadě takových problémů se konkrétně ukázalo, že hledané algoritmy jsou nemožné. Z počátku se to podařilo dokázat pro některé problémy, vznikající přirozeně v matematické logice samé. Pak byla zjištěna neřešitelnost řady problémů v obecné teorii axiomatických systémů a v teorii celočíselných matic. Konečně nejvýznamnějším výsledkem v tomto směru je důkaz neřešitelnosti problému totožnosti grup, který podal P. S. Novikov. Jde o starý problém, který poutal zájem mnoha matematiků.

Ve všech těchto problémech jde o vypracování algoritmu, rozlišujícího ty nebo ony vlastnosti studovaného objektu. Nemožnost hledaného algoritmu se dokazuje nakonec tak, že se dokáže nesprávnost předpokladu, že takový algoritmus vůbec existuje. V důkazu je samozřejmě podstatné, aby s algoritmem bylo možno operovat jako s každým jiným matematickým pojmem. Před zpřesněním pojmu algoritmu nebylo proto možno o důkazech tohoto druhu ani mluvit.

I když práce v tomto směru vyžadovala velkého důvtipu matematiků, nemusí být výsledky nijak mimořádně překvapující. Každá matematická úloha nemusí mít řešení. V některých případech může být neřešitelnost matematické úlohy zřejmější, jindy méně zřejmá. V úlohách, jejichž obsahem je hledání algoritmů, není neřešitelnost vůbec zřejmá. Ke sporu se dojde teprve po dlouhém řetězci úvah, vycházejících z předpokladu existence hledaného algoritmu.

Ukazuje se tak, že všechno, co jsme řekli, svědčí nejen o organické souvislosti matematické logiky s numerickou analysou, ale také o tom, že obě tyto matematické discipliny mají podstatný vliv na rozvoj celé matematiky.

Jaké jsou vývojové perspektivy matematické logiky a numerické analysy? Myslím, že jejich vzájemné sepětí bude stále těsnější. Domnívám se to proto, ze dnešní numerická analysa spolu se soudobou elektronikou klade matematické logice některé úlohy nového typu, podněcujíc tak rozvoj této matematické discipliny v určitých nových směrech.

Zejména mohou být mnohé problémy synthesy elektronických výpočtových a řídicích schemat přirozeně formulovány jako úlohy o konstrukci jednoduchých vzorců z elementární partie matematické logiky — výrokového počtu, vyjadřujících logické funkce logických proměnných. Dnes jsou řešeny jen nemnohé takto vznikající úlohy matematické logiky.

Jiný důležitý typ úloh předkládá matematické logice teorie programování rychlých matematických strojů. Jsou to úlohy o nejlepších programech, řešících dané numerické problémy. Můžeme odůvodněně očekávat, že takové problémy budou mocným podnětem pro rozvoj jedné z nejdůležitějších partií matematické logiky — teorie algoritmů.

Přeložil Dr. Josef Veselka