Blanka Vojtášková

O zajímavé knížce L. D. Kudrjavceva

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 27 (1982), No. 2, 106--116

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139957

kvalifikovaných odborníků zdržována od vědecké práce. Přemýšlela vůbec již někdy o tom, jak je celkem nevýznamné, zda 3. Kurzův problém vyřešila nebo ne? Metoda nejmenšího variantního vlastního vektoru se v aplikacích úspěšně užívá již devadesát let. Důkaz suboptimality by k tomu zaručeně nemohl přinést žádný nový poznatek. Je to čistě akademická otázka, která nemá ani pro další rozvoj disciplíny podstatnou důležitost.

Jana, která již nějaký čas vypadala jako nemocná, byla touto rozmluvou hluboce dotčena. Pravděpodobně to nezpůsobila ani tak slova profesora Frischaufa jako skutečnost, že poprvé zpozorovala v jeho obličeji výraz silného pohnutí. Postupně se odebrala na rozličná vedení, aby vyjasnila, že v celé věci šlo pouze o její omyl. Když se o Janině nové akci dozvěděl papež, vážně rozmýšlel, zda jsou dány předpoklady k disciplinárnímu řízení. Vlna však byla již na ústupu. O Janina kajícná ujišťování se již skoro nikdo nezajímal.

Po několika měsících předvolal papež profesora Frischaufa. Je na čase, řekl, o některých mladých pracovnících rozhodnout, zda se skutečně hodí pro základní výzkum a zda je jejich setrvávání v centru opodstatněné. Rád by věděl, jaká je v tomto ohledu situace v pracovní skupině profesora Frischaufa. Profesor Frischauf odpověděl, že Jana Bocková bohužel nesplnila to, co se od ní očekávalo, a že on považuje za vhodné, aby se porozhlédla po praxi. Papež mínil, že nic jiného nečekal a že Jana je již zapsána v listině kádrů určených k fluktuaci.

Když bylo Janě toto rozhodnutí sděleno, neměla námitek. Rostla v ní naopak nová aktivita. Chtěla konečně zažít, jak aplikací matematických metod vzniká společnosti bezprostřední užitek. Prosila proto, aby při zprostředkování nového místa dávali pozor, zda tam skutečně jde o úkol národohospodářského významu.

Jak komentoval profesor Frischauf v úzkém kruhu svých spolupracovníků, dala by se tím Janě možnost konečně jednou způsobit opravdovou škodu.

---

vyučování

O ZAJÍMAVÉ KNÍŽCE L. D. KUDRJAVCEVA

Blanka Kussová, Praha

Na následujících stránkách se seznámíme s hlavními myšlenkami knihy *Současná matematika a její vyučování* (vyd. Nauka, Moskva, 1980).

Nejprve však několik slov o autorovi. Profesor L. D. Kudrjavcev je významným sovětským vědcem, pracovníkem Matematického ústavu Sovětské akademie věd a po více než čtvrt století vedoucím katedry matematiky na Vysoké škole technicko-inženýrské v Moskvě. Je vynikajícím pedagogem, autorem učebnice *Matematická analýza*, která dosáhla značného rozšíření v celém SSSR a jež se de facto stala základní učebnicí matematiky na všech vysokých školách technického zaměření.

Své více než 30leté zkušenosti s výukou matematiky pro studenty technických směrů shrnul profesor Kudrjavcev do knížky *Úvahy o vyučování současné matematice* (publikovaná v r. 1977, Nauka, Moskva). Rozšířením a doplněním o nové partie, týkající se především vysokoškolské metodiky, vznikla kniha zahrnující široký okruh problémů mimořádné aktuálnosti, v níž se autor dělí se čtenářem o poznatky svého mnoholetého pedagogického působení.

V knize se charakterizuje úloha matematiky v současné společnosti, možnosti jejího využití v nejrůznějších oblastech vědy a techniky. Podrobně se zkoumají souvislosti mezi reálnými jevy a jim odpovídajícími matematickými modely, studují se otázky existence těchto modelů i různé aspekty výzkumné práce. Analyzují se zde specifické zvláštnosti, které vznikají v současné době při výuce matematiky a vytyčují se zásady, na jejichž základě je možné účelně budovat výuku matematiky těch studentů – a to je zapotřebí zdůraznit –, jejichž specializací není matematika.

Autor vychází z toho, že budoucí inženýři, biologové, sociologové aj. potřebují důkladné matematické vzdělání, aby mohli matematickými metodami úspěšně studovat širokou škálu reálných problémů, používat současnou výpočetní techniku, aplikovat teoretické výsledky z matematiky v praxi. Především je nutné, aby získali představu o tom, co je matematický model, v čem spočívá proces matematizace reálné situace, jak matematické modely vytvářet a co od nich lze očekávat. Jak ale těchto cílů dosáhnout? A je to vůbec možné vzhledem k omezenému času, který je na jednotlivých fakultách vyhrazen pro matematiku?

Předložená kniha nabízí jednu z cest. Je zde zformulováno 10 základních principů, z nichž je možné při budování kursu matematiky vycházet. Dříve, než se s nimi seznámíme, ráda bych poznamenala, že navzdory tomu, že ona doporučení jsou určena pro přípravu studentů nematematiků, domnívám se, že obsahují řadu podnětů obecnějšího rázu, a je proto účelné vzít je v úvahu i při koncipování výuky budoucích matematiků a učitelů matematiky.

Základní principy výuky matematice:

I. V rámci kursu matematiky se přednášejí matematické struktury.

II. Matematika je jen jediná.

III. Obsah celého kursu matematiky nemůže být určen pouze pragmatickým hlediskem, hlediskem založeným jen na specifiku budoucí specializace studentů, bez zřetele k vnitřní logice samotné matematiky.

IV. Cílem vyučování matematice je, aby studenti získali jistý, předem stanovený, okruh poznatků, aby se naučili umění používat známé matematické metody; musíme v nich rozvíjet matematickou intuici, vychovávat je k matematické kultuře.

V. Přednášky z matematiky musí být co nejjednodušší, jasné, estetické a musí být vedeny na rozumné úrovni přesnosti.

VI. Učit je zapotřebí tomu, co je potřebné, i tomu, čemu je obtížné se naučit.

VII. Existenční věty jsou nezbytné pro specialisty, kteří budou aplikovat matematiku.

VIII. V prvních hodinách výuky je zapotřebí dávat přednost induktivní metodě a pak teprve pomalu přecházet na metodu deduktivní.

IX. Učit studenty řešení úloh aplikačního charakteru pomocí matematických metod není úkolem přednášek z matematiky, ale kursů speciálních (přednášek v rámci specializace).

X. Jakým partiím matematiky a v jakém rozsahu se mají učit studenti jednotlivých specializací? To musí rozhodnout specialisté v dané oblasti po konzultaci s matematiky. Jak je pak tomu naučit? To je již záležitost matematiků profesionálů.

Jistě je možné — jak autor též připouští — stavět i na jiných základech; v metodice nelze nijak logicky dokázat, že jeden ze zvolených přístupů je správný. Pouze dobré konkrétní výsledky výuky jsou kritériem správnosti, jen na jejich základě — a nikoliv na bázi teoretických úvah a nejrůznějších proklamací — je možné usuzovat na vhodnost zvoleného metodického postupu. Profesor Kudrjavcev v knize poznamenává, že oněch 10 výše zmíněných principů a výuka na nich založená, byly v SSSR mnohokrát prověřeny (formou pedagogického experimentu) a že se ukázaly dostatečně mocné v tom smyslu, že studenti vzdělávaní v jejich duchu jsou opravdu schopni úspěšně používat matematických metod v praxi.

Základními aspekty matematického vzdělání jsou: stanovení cílů výuky, výběr vhodného učiva (pro přednášky i semináře) a správné vymezení šíře a hloubky výkladu, jeho přesnosti i názornosti. Ke všem těmto otázkám se kniha L. D. Kudrjavceva obrací a zkoumá je velmi detailně. Text je překvapivě obsažný, uvážíme-li jeho rozsah — 142 stran.

Kniha je rozdělena do dvou kapitol, jimž předchází úvod, v němž jsou formulovány základní předpoklady úspěšného vyučování. Zdůrazňuje se zde, že úspěchu při výuce může dosáhnout pouze takový přednášející, kterého mají studenti rádi, jehož si váží pro jeho vědecké zaujetí, pro jeho dobrotu a humánní postoj. Jen ten, kdo je pro ně autoritou, a to nejen jako odborník, ale i jako člověk, kdo dokáže vytvořit atmosféru důvěry, respektu a porozumění, může dosáhnout významných pedagogických úspěchů.

První kapitola, nazvaná *O základních principech metodiky matematiky*, je věnována některým problémům psychologicko-pedagogického charakteru, které jsou specifické pro výuku matematiky. Začíná autorovým „vyznáním víry“: povinností pedagoga je nejen učit, ale i naučit; při neúspěchu ve výuce je vždy vinen vyučující a ne student. (I když se připouští existence studentů, kteří se nechtějí učit, pouze získat diplom — a před takovými je i nejlepší vyučující bezmocný — autor je považuje jen za „singulární zjevy“ a v dalších úvahách je vylučuje). Pak následuje řada poznámek a doporučení na téma: jak přednášet matematiku, jak organisovat práci v seminářích a jak prověřovat vědomosti studentů průběžně i při zkouškách. Tyto stránky jsou dokladem autorova pedagogického mistrovství. V závěru se autor hluboce zamýšlí nad podstatou matematiky a cíli matematického vzdělání v současné době.

Druhá tj poslední kapitola knihy je sestavena z 10 paragrafů. V každém z nich je podán značně podrobný výklad jednoho z výše uvedených základních principů spolu s konkrétními návody, jak ho využít při budování kursu matematiky, a upozorněními, k jakým negativním důsledkům vede jeho nerespektování. Stejně jako v první kapitole, i zde je uvedena řada příkladů z autorova pedagogického působení, které nejen prokazují hlubokou fundovanost v otázkách vysokoškolské metodiky, ale též příjemně osvěžují text.

Snad není zapotřebí příliš zdůrazňovat závažnost a vysokou aktuálnost problematiky řešené v knize L. D. Kudrjavceva. Bylo by jistě vhodné uvažovat o jejím překladu. Kniha by zaujala značný okruh čtenářů. Cenné podněty pro svou práci zde naleznou především přednášející matematiky na vysokých školách všech typů.

Se zájmem si ji patrně přečtou i vyučující jiných oborů, kteří matematiku používají jako pomocný nástroj. Stejně tak by neměla uniknout pozornosti studentů matematiky a vůbec každého, kdo s vysokoškolskou matematikou přijde do styku.

Již nyní se může čtenář seznámit s knížkou profesora L. D. Kudrjavceva alespoň prostřednictvím několika ukázek*).

● Otázky týkající se úlohy, významu i obsahu matematiky začaly v poslední době ve značné míře zajímat veřejnost. Přitom se objevilo mnoho kritických poznámek na adresu současné matematiky i matematiků. Mimo jiné je to patrné též ze záhlaví různých článků a referátů typu „Je možné zachránit matematiku?", „Fyzikové versus matematici", „Matematikové sami pro sebe" apod. Stále častěji se setkáváme s úvahami, ze kterých jasně vysvítá hluboké rozčarování nad možnostmi dosáhnout pomocí matematických metod nějakých podstatných úspěchů při řešení životně důležitých problémů, a to dokonce i v těch případech, kde se takové výsledky považovaly ještě v nedávné době za možné a velmi blízké.

Vzniklá situace souvisí zřejmě se skutečností, že první využití vysoce výkonných počítačů při řešení obtížných konkrétních úkolů např. inženýrskotechnické povahy či úloh řízení a plánování výroby se ukázalo jako velmi úspěšné, a vedlo tedy ve svých důsledcích k široce rozšířenému názoru o univerzálnosti a všemocnosti matematických metod, k domněnce, že jediné, co je zapotřebí udělat, je vhodné aplikování matematiky v ekonomii, biologii nebo jiných vědních disciplinách. Tím měl být automaticky zajištěn značný rozkvět těchto oblastí. Ke cti samotných matematiků je však zapotřebí poznamenat, že oni sami jen velmi málo přispěli k vytvoření takových, samozřejmě velmi naivních představ.

Další události ukázaly, že bez nových experimentálních a teoretických výzkumů v jakékoliv vědě (např. právě v ekonomii či biologii) není možný podstatný krok vpřed; pouhé využití matematických metod ani zdaleka nedostačuje. K vytvoření obsažného matematického modelu je totiž zapotřebí mít k dispozici především obsahově bohaté ekonomické, popř. biologické zákony a hypotézy.

Postavení matematiky v současné době lze srovnat s činností dobře prosperující firmy, které se podařilo zajistit, aby faktická cena jejích akcií nepřetržitě rostla (úloha a význam matematiky opravdu stále vzrůstají). Vzestup cen akcií má však za následek přirozený vzrůst poptávky, což nakonec vede k situaci, kdy jejich prodejní cena převyšuje skutečnou hodnotu. Něco podobného se událo i s matematikou. Pod vlivem kolosálních úspěchů, dosažených při řešení aktuálních vědeckých i hospodářských problémů za pomoci výkonných počítačů, vyvolali někteří, ne zcela kompetentní činitelé velké vzrušení ve veřejnosti, které nakonec vyústilo až k nedávné fetišizaci matematiky. Dosažené úspěchy též významně ovlivnily postavení matematiků ve společnosti (přirozeně na úkor dosavadních pozic kolegů z jiných vědních oblastí; tato skutečnost způsobila i onu známou nevraživost mezi matematiky a řadou pracovníků nematematických oborů).

Když se konečně začaly — s dostatečnou přesností — rýsovat kontury reálného využití matematických metod, vyplynuly na povrch chyby napáchané při přípravě nových kádrů pro práci se současnou výpočetní technikou a v souvislosti s tím

*) Ukázky vybral O. Kowalski, přeložila B. Kussová

se u řady lidí znovu objevily záblesky skepse (u mnoha existovaly pochybnosti vždy) ve vztahu k matematice. Znovu se setkáváme s úvahami typu „matematika není věda, ale jen jazyk", „matematika – to jsou jen mlýnské kameny, které samy o sobě nic nevytvoří, semelou pouze to, co se do nich nasype", apod. To však není nic nového; jak říká Gardner: „Nikdy nebyl nedostatek lidí, kteří haní matematiku".

Chceme-li být spravedliví, je třeba poznamenat, že ona kritická slova na adresu matematiky jako takové přicházejí nejen z vnějšku, ale i „zevnitř" samotné matematiky. Např. od matematiků, kteří se zabývají „klasickými problémy", je možné – a to ne tak zřídka – slyšet výroky typu „funkcionální analýza není věda, ale jazyk"; matematikové, kteří pracují převážně s počítači, často nazývají klasickou matematiku scholastikou. Stále jde o tvrzení jedné a téže povahy.

● Nesprávné pochopení významu matematiky ve vědeckém pokroku, chybné porozumění postavení matematiky ve světě vědy a její úloze při řešení konkrétních problémů, které před společností vyvstávají v daném časovém okamžiku, jsou nezřídka spojeny s falešnými představami o povaze matematických znalostí, o obsahu pojmu matematický model, o podstatě matematických metod i matematiky samotné. Často se např. setkáváme s úvahami, v nichž se matematický model zaměňuje s reálným jevem, k jehož popisu je vytvořený model více či méně vhodný. Důsledky takových přístupů jsou zřejmé – překrucují se cíle vyučování matematice a navíc jsou tyto názory zdrojem celé škály vysoce problematických rad a doporučení (v novinových i časopiseckých článcích), jak učit v současné době matematiku, aby výsledkem byli specialisté schopní úspěšně používat matematiku k řešení úloh aplikační povahy (k nim samozřejmě náleží i právě uvedené poznámky).

Svůj názor na tuto otázku objasním citováním staré anekdoty.

Teoretický fyzik a matematik se zajímali o jakýsi problém popsaný nějakou rovnicí. Jednoho dne matematik s radostnou tváří přiběhl ke svému příteli fyzikovi a řekl: „Konečně se mi podařilo dokázat, že naše rovnice má řešení". „Můj milý," odpověděl mu kolega, shovívavě ho poplácav po rameni, „kdybych byť jen jednu minutu pochyboval o tom, že rovnice je řešitelná, už dávno bych se přestal tímto problémem zabývat".

Tato anekdota naznačuje: hle, jak naivní jsou matematikové: zabývají se seriózně úvahami, které nejsou plodné a snad ani nikomu potřebné kromě nich samotných. Když se však podíváme na výše uvedený vtip pozorněji, pochopíme, že zde vůbec nejde o žertování na téma „nepraktický matematik". Anekdota postihuje skutečnost, jak lidé nechtějí (a někdy možná ani nedokáží) pochopit jeden druhého, vypovídá o tom, jak mluví zdánlivě jedním jazykem, ale de facto jazyky odlišnými; i když se domnívají, že řeší jeden a tentýž problém, mají na mysli vlastně problémy dva. Hlavní pointa oné anekdoty spočívá v tom, že fyzik mluví o fyzikálním jevu a matematik o jeho matematickém modelu.

Matematický model jakéhokoliv fyzikálního jevu není a ani nemůže být identický s tímto jevem. Každý matematický popis jevu totiž charakterizuje pouze jeho jistou idealizaci nemluvě už o tom, že takový popis pracuje jen s jistým stupněm přesnosti – vzhledem k nutnosti zanedbat řadu faktorů, které se sice na první pohled jeví jako bezvýznamné, jež však mohou mít v jistém smyslu podstatný vliv na konečný výsledek. Proto z existence řešení fyzikální úlohy, kterou měl na mysli onen teoretický fyzik, vůbec nevyplývá existence řešení odpovídající matematické úlohy; tu lze potvrdit nebo vyvrátit pouze matematickými prostředky.

Předpokládáme-li, že tomu tak není, tj. vycházíme-li z toho, že existence řešení fyzikální úlohy, implikuje existenci řešení jejího matematického modelu, a opíráme-li se zde o tvrzení, že matematický model je v tomto smyslu stejně silný jako odpovídající fyzikální jev, přisuzujeme matematice moc, kterou bohužel nemá.

Zde nepomůže žádný další, byť sebefantastičtější rozvoj a zdokonalení výpočetní techniky; i ten „nejmoudřejší" a nejvýkonnější počítač bude pracovat jen s matematickým modelem, který do něho vložíme, popř. který si vytvoří z jiných matematických modelů dříve v něm uložených, nikoliv však se samotným fyzikálním jevem, který se studovaným matematickým modelem popisuje.

• Na závěr diskuse o specifických rysech matematického vzdělání jakožto celku je nutné zdůraznit jeho velkou úlohu při formování obecné kultury člověka a tak položit důraz na odpovědnost, kterou má v tomto směru matematika vůči společnosti.

Ozřejmíme si nyní podrobněji tuto stránku matematického vzdělání. Výuka matematice zdokonaluje všeobecnou kulturu myšlení, učí člověka logicky uvažovat, pěstuje v něm smysl pro přesnost a důkladnost argumentace, vede ho k vnitřní disciplíně. Matematika učí nezatěžovat se při řešení problémů podrobnostmi, které nemají vliv na podstatu práce a naopak neignorovat ty, jejichž význam je principiální. Všechny tyto skutečnosti dávají možnost naučit se efektivně bádat a rozumět úkolům, které vznikají v rozličných oblastech lidské činnosti.

Zcela explicite byly rysy matematického vzdělání, ovlivňující kulturu člověka v její celistvosti, zformulovány v referátu W. Servaise na XIX. mezinárodní konferenci o vzdělávání: „Mezi intelektuální vlastnosti rozvíjené matematikou se nejčastěji počítají ty, které se vztahují k logickému myšlení: deduktivní způsob uvažování, schopnost k abstrakci, generalizaci a specifikaci, schopnost kriticky myslet, analyzovat, vyhodnocovat. Výcvik v matematice podporuje získávání racionálních kvalit mysli a jejích projevů: pořádek, přesnost, jasnost a hutnost. Práce v matematice vyžaduje fantazii a intuici; vytváří cit pro objektivnost a intelektuální čestnost, vzbuzuje chuť k bádání. Tím vším podporuje rozvoj vědeckého ducha. Při studiu matematiky je nezbytné setrvávat ve stavu stálé pozornosti a napětí, matematika vyžaduje schopnost koncentrace a vytrvalost, a proto upevňuje dobré pracovní návyky. Matematické vzdělání má tedy důležitou úlohu v rozvoji intelektu i při formování charakteru."

• Velmi závažné jsou filozoficko-ideologické otázky koncepce kursu vyšší matematiky. Již na samém začátku takového kursu, při studiu teoretických základů matematiky, je zapotřebí naučit studenty řešit též číselně zadané úlohy; vždyť to je předstupeň pro další — v jistém smyslu obtížnější — úkol vyšetřování matematických modelů. Spolu s tím jim musíme vštěpovat praktické návyky vedoucí k efektivnímu využití výpočetní techniky. Pro současného studenta musí být — v případě nutnosti — využití počítače natolik přirozené a jednoduché, jako je pro žáka střední školy práce s tabulkami logaritmů a goniometrických funkcí. Jak lze těchto cílů dosáhnout?

Především již od prvních hodin výuky matematiky na vysokých školách musíme obracet pozornost studentů k charakteru prováděných důkazů, ukazovat, kdy jde o důkaz algoritmické povahy a kdy nikoliv. Např. je vhodné detailně rozebrat důkaz věty o existenci minima a maxima funkce spojité na intervalu, v němž se využívá principu kompaktnosti, a zdůraznit, že nám nedává faktickou možnost pro nalezení extrémů. Naproti tomu je užitečné poznamenat, že důkaz věty pojednávající o tom, že funkce spojitá na intervalu, která má v koncových bodech intervalu hodnoty opačných znamének, má v některém vnitřním bodě intervalu nulovou hodnotu, realizovaný pomocí postupného dělení intervalu na poloviny, algoritmický charakter má, neboť dovoluje onen nulový bod s libovolným stupněm přesnosti nalézt.

Je vhodné upozornit též na skutečnost, že ne každý algoritmický proces lze účelně použít v praxi (např. při číselném řešení soustavy lineárních rovnic nebývá obvykle rozumné používat Cramerova pravidla), že zde rozhodne počet operací potřebných pro výpočet podle daného algoritmu a objem paměti počítače, který máme k dispozici.

Paralelně se studiem základních pojmů matematické analýzy je účelné naučit studenty ihned též numerickému řešení úloh ilustrujících vyšetřované pojmy a jejich vlastnosti. Zde považuji za velmi vhodné úlohy na číselné řešení problémů týkajících se vyhledávání extrémů funkcí, a to jak pomocí vět o vlastnostech derivací v bodech, kde funkce nabývá extrému, tak přímo prozkoumáním jednotlivých intervalů. Přitom je užitečné porovnat počet operací potřebných k řešení těchto úloh oběma uvedenými metodami.

● V matematice se setkáváme nejen s tvrzeními, která jsou přesně logicky zdůvodněná, ale i s takovými, jež mají čistě intuitivní povahu. Úvahy či výpovědi tohoto druhého typu využívají rovněž řady známých matematických pojmů a poznatků, navíc však do nich zahrnujeme výsledky našich zkušeností, znalostí reálného světa, výplody fantazie a intuitivního uvažování. Vzhledem k tomu, že takové úvahy nemají zatím přesnou logickou formu, jsou značně silné a zároveň omezené, dávají možnost širokého i jednostranného využití.

Bylo by omylem domnívat se, že práce s intuitivními matematickými výpověďmi a metodami je nepotřebná, nebo dokonce škodlivá. Tomu tak rozhodně není. Umění vytvářet intuitivní matematické úvahy je velmi důležité a potřebné. Matematikové i nematematikové jich běžně využívají při hledání nových pravd. Přitom matematik postupuje tak, že výsledek získaný pomocí úvah intuitivní povahy považuje za správný teprve tehdy, když se mu ho podaří matematicky odůvodnit, tj. předložit striktní matematický důkaz. Naproti tomu nematematik, přesněji specialista v jiném vědním oboru, studující nějaký reálný problém, nepotřebuje matematickou verifikaci k potvrzení správnosti řešení získaného pomocí intuitivních postupů. Jeho úkolem je prověřit (přímo či nepřímo), zda nalezený výsledek odpovídá reálné situaci, umožňuje-li vysvětlit již známá fakta a předpovídat nová. Až do okamžiku praktického ověření zůstává takový výsledek pouze hypotézou.

Často podnikané pokusy nahradit intuitivní úvahy úvahami matematicky odůvodněnými jsou důležité a potřebné. Mnohdy totiž dovolují odhalit hlubší souvislosti problému a někdy – i když se ukáží jako neužitečné pro vyšetřování daného reálného jevu – přispějí k rozvoji matematiky samotné.

V mnoha diskusích týkajících se otázky, zda jsou v matematice přípustné i nepřesné matematické úvahy, se zapomíná, proč se takové úvahy vůbec provádějí. Jestliže někdo tvrdí, že s jejich pomocí získal nový matematický výsledek, má pravdu jen tehdy, je-li schopen své intuitivní úvahy přeformulovat do přesného matematického hávu. Obdržíme-li však při jejich využití řešení problému souvisejícího s nějakým reálným jevem a jestliže se správnost potvrdila praktickým ověřením, je zřejmá užitečnost i přípustnost provedených intuitivních úvah. Nesmíme však tvrdit, že mají charakter dokazatelných vět, nechceme-li nebo nedovedeme-li je matematickými prostředky odůvodnit. Uvědomme si však, že v tomto druhém případě není matematická verifikace zdaleka nutná. Praktické ověření výsledku hovoří samo za sebe, právě ono je jeho důkazem správnosti a vůbec ne ty úvahy, které nás k němu přivedly.

Poznamenejme ještě, že s využitím intuitivních matematických úvah je možné obdržet nejen řešení nějakého konkrétního, prakticky důležitého problému, ale též udělat nový objev. Avšak i v tomto případě budou důkazem nikoli nepřesné matematické úvahy k němu vedoucí, ale reálná skutečnost, která musí být – s dostatečnou přesností – ve shodě s naším objevem.

Matematická přesnost není nikterak nepotřebná rozkoš v oblasti aplikované matematiky, je to naléhavá nutnost. Skutečnost, že s pomocí ne přesně odůvodněných matematických úvah lze získat správné a užitečné, tj. v praxi použitelné výsledky, vůbec neznamená, že striktní matematické postupy nejsou nutné při řešení konkrétních úloh praktického zaměření (jak se to opravdu často zdá). Odsud pouze vyplývá, že při používání takových úvah v podobných situacích není zapotřebí požadovat, aby byly matematickým důkazem získaných výsledků, poněvadž takovým důkazem je zde experiment v nejširším slova smyslu.

Je užitečné připomenout si též skutečnost, že intuitivními úvahami můžeme velmi snadno dospět i k výsledkům hodně vzdáleným od reálné skutečnosti. O nich se však mluví mnohem méně, a to proto, že, nejsou-li nikomu užitečné, upadnou brzy v zapomenutí.

Ze všeho, co bylo výše řečeno, vyplývá, že nemá smysl vyslovovat nedůvěru a vyvolávat pochybnosti okolo výsledků, které se vztahují k reálným jevům a jež byly získány pomocí intuitivních úvah jen proto, že takové úvahy nejsou řádně vědecky zdůvodněné; samozřejmě pokud získané výsledky korespondují s reálnými fakty. Při tomto přístupu však vzniká samozřejmá otázka: Jestliže se při řešení úloh aplikované matematiky používá „matematických metod“, které nejsou přesně logicky zdůvodněné, neboť za kritérium správnosti se považuje shoda získaného výsledku s reálnou skutečností, jestliže tyto metody mají jen úlohy pomocných úvah a nikoli důkazů obdržených závěrů, pak možná stačí učit studenty ne matematice, ale vytváření a užívání intuitivních matematických úvah.

Ačkoliv se stavím s velkou opatrností ke všem kategorickým výpovědím na podobné otázky, nehodlám tvrdit, že takový postup je nemožný. Při jeho realizaci však narazíme na nekonečnou řadu obtíží spočívajících v tom, že díky svému intuitivnímu charakteru nejsou (na rozdíl od matematicky zdůvodněných) taková tvrzení absolutní pravdou. Mají vysoce subjektivní povahu, podstatně závisejí na individuálním stylu myšlení; jedné osobě se mohou zdát velmi přesvědčivé a přitom být zcela nepřijatelné pro jiné. Např. každý autor nějakého objevu považuje za nejpřesvědčivější ty intuitivní úvahy, které ho k objevu přivedly. Avšak když se nový výsledek stane již všeobecně známým, často se podaří nalézt pro něho jednodušší, a proto též hlubší a principiálně zajímavější zdůvodnění, odhalit jeho vztah k již známým faktům a tak lépe pochopit jeho podstatu.

Zdá se, že je nemožné naučit se úspěšně používat intuitivních matematických úvah, aniž se naučíme samotnou matematiku. Nejsou mi alespoň známy žádné případy, kdy by podobné pokusy vedly ke zdárnému konci, tj. kdy by výuka založená jen na intuitivním způsobu uvažování v matematice vedla k výchově studentů, kteří by získané vědomosti dokázali vhodně a účelně používat k řešení úloh aplikované povahy.

Naopak, současné pedagogické experimenty konané v tomto duchu ukazují, že ve srovnání s výkladem opírajícím se o logickou stavbu matematiky, způsob vyučování vycházející převážně jen z intuitivních postupů a metod není zdaleka tak efektivní. Je to způsobeno tím, že takový výklad je těžkopádný, vyznačuje se nejasností a nevyhnutelně je „upovídaný"; objevuje se v něm spousta faktů, které nesouvisejí s podstatou věci. Kromě toho naráží takový způsob výuky na nepochopení ze strany studentů také proto, že je založen ne na objektivních matematických pravdách, ale na subjektivních názorech a postojích jednotlivých přednášejících k tomu či onomu matematickému pojmu a metodě.

V závěru diskuse o nutnosti a užitečnosti zachovávat v matematice maximálně možnou přesnost si uvedeme jeden z výroků D. Hilberta: „Je velká chyba domnívat se, že přesnost v matematických důkazech je nepřítelem jednoduchosti. Naopak, četné příklady nás přesvědčují, že přesné postupy jsou právě ty nejjednodušší a nejsnáze pochopitelné. Úsilí o přesnost nás vede k hledání co nejjednodušších důkazů. A takové snahy často razí cestu novým metodám a postupům, které jsou plodnější než ony staré, méně přesné".

• V souvislosti s bouřlivým rozvojem výpočetní techniky v posledních desetiletích vyvstaly nové problémy týkající se otázky, čemu v matematice vyučovat. K tomu, abychom dokázali správně využívat možností, jež nám počítače poskytují – a bez toho je dnes nemyslitelná práce většiny specialistů (vědeckých pracovníků, konstruktérů, inženýrů apod.) – je nezbytné dobře znát základy programování a umět pracovat s programy pro počítače stejně samozřejmě jako žák střední školy pracuje s tabulkami goniometrických funkcí. Je nutné, aby studenti uměli používat počítače (včetně minikalkulaček) tak bezpečně jako dříve pracovali s logaritmickým pravítkem. To však nestačí; je zapotřebí též pochopit, co znamená kvalitativně správný popis úlohy, jak ji korektně matematicky zformulovat, jak dospět k řešení daného problému. Musíme vědět, jaké existují metody pro číselné řešení a která z nich je v daném případě optimální. Je nutné umět se rozhodnout zda, popř. jaký další výzkum je možný a užitečný při zadaných podmínkách pro získání nových dat, aniž se přitom uchylujeme k pomoci počítače. To vše však vyžaduje – v závislosti na charakteru studované úlohy – více či méně seriózní matematické znalosti, tj. znalosti odpovídající v jistém smyslu klasickému matematickému vzdělání.

V prvních etapách výuky dorozumívání s počítačem a jeho využití při řešení úloh nutně vzniká potřeba seznámit studenty se základy teorie množin a matematické logiky. Někdy se bohužel tyto partie stávají samoúčelné a další výše zmíněné hlubší matematické vzdělání se považuje za zbytečné (přitom se často výklad základů matematické logiky a diskrétní matematiky podává buď jen na značně elementární, nevědecké úrovni, anebo naopak nabývá zbytečně hypertrofovaných rozměrů). Příprava specialistů realizovaná takovýmto způsobem představuje nesmírné zlo.

Jsem si plně vědom, že jeden příklad není důkazem, přesto zde uvedu jistou příhodu. Hlavním aktérem příběhu je L. A. Ljusternik, který laskavě dovolil, abych tu příhodu zde vyprávěl.

Před několika lety byl Ljusternik pozván jakožto konzultant na jednu vysokou školu. První problém, s nímž se tam setkal, spočíval (pokud mě paměť neklame) v tabelování hodnot jakéhosi trojného integrálu funkce, která ještě závisela na několika parametrech. V době jeho příjezdu již byly sestaveny programy pro výpočet potřebných tabulek; předpokládalo se, že k jejich realizaci bude zapotřebí asi půl roku práce na počítači typu „Strela".

L. A. Ljusternikovi se zdálo, že vyšetřovaný integrál je v jistém smyslu podobný čemusi, s čím se setkáváme v teorii Besselových funkcí. V následujících dvou třech dnech se mu podařilo použitím analogií s úpravami integrálů v uvedené teorii skutečně převést onen neblahý integrál na integrál jednoduchý; výpočet potřebných hodnot pak trval na téže „Strele" méně než 24 hodin. Ekonomický efekt byl obrovský.

Uvedený příběh je výmluvným svědectvím o významu a důležitosti matematického umění a obecné matematické kultury, je příkladem toho, jak mnoho může poskytnout správné použití analytických metod, je krásnou ukázkou opravdového matematického vzdělání. Konečně je též přesvědčivým příkladem skutečnosti, že důkladné ovládání čisté matematiky přináší značný užitek v aplikované matematice i v epoše výkonných počítačů.

• V souvislosti s výše řečeným si nelze nevzpomenout na stálé výtky vznášené na adresu matematiků, kteří jsou obviňováni z toho, že učí studenty nikomu nepotřebnou techniku výpočtů neurčitých integrálů a řešení speciálně vybraných diferenciálních rovnic. Autoři takových soudů tvrdí, že to vše je dnes již anachronismus, neboť pokud se studenti setkají v praxi s podobnými úlohami, použijí jednoduše příslušných tabulek či příruček. Domnívám se, že námitky tohoto typu nejsou oprávněné.

Zde je vhodné si připomenout, že v dobře známém zkouškovém minimu, jež musili podstoupit všichni, kdo se chtěli stát žáky L. D. Landaua, se výpočet neurčitých integrálů vyskytoval. Je mimo veškerou pochybnost, že Landau si jasně uvědomoval, že jeho studenti ve své další práci nebudou takové výpočty potřebovat, a pokud ano, že nejspíše použijí existujících příruček, Přesto tyto znalosti nekompromisně vyžadoval.

Problém totiž spočívá v tom, že je nutné studenta naučit na nějaké partii matematiky základním analytickým úpravám, umění projevovat v nich vynalézavost, rozvinout v něm přesný smysl pro tento druh činnosti. Výpočet nevlastních integrálů a řešení diferenciálních rovnic „kvadraturou" jsou pro tyto účely dostatečně jednoduchým a zároveň bohatým materiálem. Není dosud známo, čím by je bylo možné nahradit, aby se přitom dosáhlo stejného efektu.

Zaměnit tento druh výuky pouhým výcvikem v práci s příručkami a tabulkami je neúčelné; vždyť to ani není žádný předmět vyučování, ačkoliv samozřejmě je užitečné ukázat studentům, jak s se literaturou tohoto typu pracuje. Uvědomme si zde ještě, že používání výše uvedených pomůcek předpokládá jistý stupeň znalostí v matematice: je totiž zapotřebí vědět, co hledáme, co můžeme nalézt a kde je možné ono hledané opravdu nalézt.

● Důkazy existenčních vět jsou osobitou prověrkou, „matematickým experimentem"; ospravedlňují studium modelu daného jevu. Když se podaří dokázat existenční věta, jednoznačnost řešení a korektnost samotné formulace úlohy, zpravidla se tím získá i objektivní jistota o tom, že výzkum vedeme správným směrem. Dosah toho lze jen těžko nedocenit. Vždyť úspěch v práci je v první řadě určen správným porozuměním zadanému úkolu a jeho správnou formulací, správně zvoleným směrem dalšího bádání.

Osvětlíme si to blíže na jedné anekdotě. Po mnoha letech se znovu setkali dva dobří přátelé a jeden říká druhému:

„Víš, objevil jsem u sebe nové schopnosti; stal jsem se telepatem. Dokážu každému vnutit cokoliv si přeji a on bezvýhradně vyplní můj myšlený příkaz."

„Opravdu?" s patřičnou nedůvěrou ptal se přítel.

„Chceš-li, dokážu ti to. Dej mi libovolný úkol a sám se přesvědčíš, co umím!" trval na svém první.

„Dobře," souhlasil jeho známý. „Vidíš, před námi jde dívka. Přiměj ji, aby se ohlédla!"

„S radostí," odpověděl telepat a soustředěně se zadíval na dívku. Ta se opravdu obrátila a dokonce se na přítele mile usmála.

„To je velmi prospěšné umění," řekl uznale přítel telepata. Potom se však trošku zamyslel a poznamenal:

„A vůbec, v čem spočívá to tvé telepatické umění? Prostě, šla veselá dívka, bylo jí smutno, začala se ohlížet kolem sebe a přitom pohlédla i na nás."

„Dobře," rozhořčeně odvětil telepat. „Vidíš toho staříka na mostě? Jestliže chceš, přinutím ho, aby si sundal boty a hodil je do řeky."

„No, dokážeš-li i toto, uvěřím ve tvé mimořádné schopnosti."

Telepat se znovu soustředil a — neuvěřitelné! — stařík se zastavil, předklonil, sňal boty a přesto, že se sám divil svému počínání, hodil boty do vody.

„To je ale něco!" užasle zvolal přítel telepata. „Ale" — a zádumčivě začal znovu — „Cožpak ve městě neexistují pomatení lidé; je možné, že stařík je jedním z nich. A víš ty, co všechno může napadnout takového blázna? Co s tím ale pak má společného ta tvoje telepatie?"

„Ach, tak to tedy je!" zcela se rozzlobil telepat. „Ty stále ještě pochybuješ! Ale nyní teprve uvidíš, čeho jsem schopen! Podívej se, nalevo od nás stojí vysoký dům! Vyber si v něm libovolné okno a já tomu, kdo v něm bydlí, přikáži, aby ho otevřel a vyhodil na ulici svůj televizor."

„No, když i toto svedeš, nebudu více pochybovat," pronesl jeho přítel. „Vybírám si třetí patro, druhé okno zleva."

Telepat se zastavil, pekelně se soustředil, ale — běda! — okno se neotvíralo, nikdo se nepokoušel vyhodit ven televizor. Znovu tedy telepat soustředil své myšlenky a — ó zázrak! — kdosi se objevil v onom okně, otevřel ho dokořán a pak zvolal: „Co ty tam mě pořád otravuješ? Žádný televizor nemám!"

A zde je krásně vidět, že tentýž vysoce nadějný algoritmus se stane zcela bezmocným, nejsou-li splněny podmínky existenční věty!