Jaroslav Kurzweil

Diferenciální rovnice v ČSR v letech 1945-1985

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 32 (1987), No. 3, 138--145

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139898

Diferenciální rovnice v ČSR v letech 1945 – 1985

Jaroslav Kurzweil, Praha

Vědecké práce v oblasti diferenciálních rovnic v Československu před druhou světovou válkou prakticky neexistovaly. Dnes na prahu 8. pětiletky účastní se práce na řešení hlavního úkolu „Diferenciální a integrální rovnice" jen v ČSR asi 80 matematiků a asi 120 matematiků pracuje na řešení hlavního úkolu „Metody aplikované matematiky v inženýrských problémech" a to je zase práce převážně v diferenciálních rovnicích. V poválečném období bylo dosaženo velkého množství hodnotných výsledků, byl vykonán opravdu velký kus práce. Svědčí o tom mj. více než dvacet monografií z různých oblastí diferenciálních rovnic, které byly v uvedeném období napsány a vydány. Přitom číslo 20 je dolní hranice; monografie, která vyšla v několika vydáních, je počítána jen jednou, nejsou zařazeny učebnice a sborníky. Za některé vynikající výsledky byly uděleny pocty v našem vědeckém světě nejvyšší. V poválečném období byly za výsledky z oblasti diferenciálních rovnic uděleny tři státní ceny Klementa Gottwalda a tři národní ceny ČSR.

Stojí zato říci několik slov o okolnostech, za kterých došlo k tak výrazné změně. Až do roku 1949 měli absolventi přírodovědeckých fakult, kteří vystudovali matematiku, málo příležitostí k uplatnění. Převážná většina z nich hledala uplatnění jako středoškolští profesoři. Výzkumné ústavy prakticky neexistovaly a učitelských míst na vysokých školách bylo málo, protože cvičení se konala pro velké skupiny posluchačů. To se změnilo právě v létě r. 1949, a proto tak náhle vzrostl počet učitelských míst na vysokých školách. Rychle vznikaly a rostly výzkumné ústavy, byla založena Československá akademie věd, štědře byly vypisovány aspirantury a počet volných míst zřetelně převyšoval počet uchazečů. To zní dnes přímo neuvěřitelně. Je velkou zásluhou našich předních matematiků oné doby, že orientovali mladé adepty vědecké práce v matematice k širšímu okruhu problémů v matematické analýze. Z vlastních vzpomínek musím zde především jmenovat Eduarda Čecha, Vojtěcha Jarníka, Františka Vyčichla, Vladimíra Knichala. Postavení tehdejších mladých adeptů vědecké práce se hodně lišilo od postavení dnešních adeptů. Naše příprava byla roztříštěná a rozsah znalostí byl menší ve srovnání s dnešními absolventy (mám ovšem na mysli dobré absolventy). Kontakty se zahraničními matematiky byly velmi vzácné. Bylo nutné samostatně na základě dostupné literatury začínat v oborech v Československu nových, samostatně hledat problematiku a cesty k jejímu řešení. Ale také tenkrát vycházelo podstatně méně knih a časopiseckých prací a bylo mnohem snadnější narazit na otevřené problémy, k jejichž řešení bylo možné přistoupit bez větších předběžných znalostí.

Autorem upravený text jeho přednášky na konferenci „Vývoj matematiky v ČSR v období 1945 až 1985 a její perspektivy", konané ve dnech 3.—4. 10. 1985 v pražském Karolinu.

Podívejme se nyní na výsledky, kterých bylo na poli diferenciálních rovnic dosaženo za uplynulých 40 let. Protože jde o obor velmi rozlehlý, bude to pohled z velké dálky, v němž zanikne i řada hezkých výsledků.*)

Obyčejné diferenciální rovnice se začaly rozvíjet od začátku padesátých let, a to hned ve dvou centrech v Brně a v Praze nezávisle na sobě. Všimněme si nejdříve brněnského centra. Jeho ústředním tématem se staly globální transformace lineárních diferenciálních rovnic. Důraz patří na slovo globální, což zde znamená, že transformace musí být definovány na celém definičním intervalu vyšetřované rovnice. Je to velké téma a můžeme je podrobněji popsat v těchto třech problémech:

1. Najít nutné a postačující podmínky pro dvě diferenciální rovnice, aby bylo možné jednu transformovat globálně v druhou. Takové dvě diferenciální rovnice nazveme ekvivalentní.

2. Najít tzv. kanonické rovnice, tj. vybrat jednu rovnici v každé třídě ekvivalentních rovnic.

3. Charakterizovat všechny tzv. stacionární grupy, přičemž stacionární grupou rozumíme grupu takových transformací, které převádějí danou rovnici v sebe samu.

Dnes může vzbuzovat podivení skutečnost, že začátkem padesátých let bylo známo jen velmi málo obecných výsledků. Opravdu obecný výsledek byl znám jen jeden — že totiž bodová transformace, která převádí lineární rovnici v lineární rovnici, musí mít přirozený tvar, tj. vznikne zavedením nového času a násobením funkcí všude různou od nuly. Dokázali to P. Stäckel v r. 1892 a S. Lie o rok později. Byla to velmi šťastná okolnost, že diferenciálními rovnicemi se začal zabývat Otakar Borůvka a mohl uplatnit své bohaté zkušenosti z algebry a z diferenciální geometrie, kde otázky transformací patřily odedávna k otázkám klíčovým. Práci [2] z r. 1953 můžeme označit právem za průkopnickou. V této práci jsou obsaženy základní výsledky o transformaci lineárních rovnic druhého řádu. Úplná teorie je obsažena v monografii [3].

Transformace lineárních diferenciálních rovnic řádu vyššího než druhého soustředily na sebe zájem řady autorů domácích i zahraničních. Úplnou a všestrannou teorii přineslo domyšlení metod, které Otakar Borůvka zavedl pro rovnice řádu druhého. Nejdůležitější metody a prostředky jsou teorie kategorií, Brandtovy a Ehresmannovy grupoidy, Cartanova metoda pohyblivého reperu a funkcionální rovnice. Na základě teorie byla odvozena řada efektivních metod k řešení speciálních problémů, např. z oblasti rozložení nulových bodů, oscilatoričnosti, diskonjugovanosti. Podrobný výklad je zpracován v připravené monografii [20].

V r. 1969 se vytvořila skupina pracovníků brněnské univerzity, kteří se začali zabývat asymptotickými vlastnostmi diferenciálních rovnic. Byly získány podrobné výsledky o asymptotických vlastnostech Riccatiho rovnice s komplexními koeficienty a jistých obecnějších rovnic, dále o perturbovaných systémech lineárních rovnic. Celá série prací byla věnována monotónním vlastnostem posloupnosti nulových bodů diferenciální rovnice druhého řádu, s aplikacemi na speciální funkce, např. Besselovy funkce. Byl

*) V diskusi po této přednášce bylo právem zdůrazněno, že autor skoro opominul svůj příspěvek v této oblasti. Odkazujeme proto čtenáře na článek *Jaroslav Kurzweil šedesátníkem*, Čas. pro pěst. mat. *111* (1986), 91—111. (Pozn. red.)

vypracován nový postup, který umožnil sjednotit řadu dosud známých výsledků o okrajových problémech.

Kolektiv, který se vytvořil na Palackého univerzitě v Olomouci, především přispěl k prohloubení teorie transformací lineárních diferenciálních rovnic vybudované Otakarem Borůvkou. Šlo o zobecnění Floquetovy teorie na případ obecně neperiodického koeficientu, které umožnilo nalézt třídy rovnic s týmiž multiplikátory, dále o vyšetřování průvodní rovnice, které přináší jednotný pohled na disperze prvního a druhého druhu. Byly stanoveny asymptotické vlastnosti disperzí a fází, byla vyšetřena algebraická struktura průniku grup disperzí a byly určeny vlastnosti disperzí rovnice se skoroperiodickým koeficientem. Dále bylo dosaženo výsledků o okrajových úlohách pro systém nelineárních diferenciálních rovnic a o řešení úloh Kneserova typu pro nelineární diferenciální rovnice. Konečně na univerzitě Palackého byly vyšetřeny lineární mnohokrokové metody pro numerické řešení počáteční úlohy, byly sestrojeny formule s druhými derivacemi a byla vyšetřena stabilita podle Dahlquista, konvergence a řád aproximace.

V Praze se začalo pracovat v obyčejných diferenciálních rovnicích začátkem padesátých let. Z iniciativy Eduarda Čecha se začala skupina vědeckých aspirantů seznamovat s kvalitativní teorií diferenciálních rovnic na základě monografie Němyckého a Stěpanova a nato následovalo studium stability ze známé monografie Malkinovy — to byla iniciativa Vladimíra Knichala a Otto Vejvody. První samostatné práce se týkaly dvou problémových okruhů: jedním z nich byla stabilita a druhým periodická řešení. Oba okruhy byly velmi životné a rozvětvovaly se v řadu dalších problémových okruhů. Živý ohlas, se kterým se setkaly práce o ljapunovské stabilitě lze vysvětlit tím, že v nich byly silně akcentovány ty vlastnosti diferenciálních rovnic, které lze popsat jazykem dynamických systémů.

Jednou z variant pojmu stabilita je stabilita vzhledem k poruchám. Poruchy mohou mít rozmanitou strukturu. Vyšetřování vlivu náhodných poruch na řešení obyčejných diferenciálních rovnic vyústilo v soustavnou práci v oboru stochastických diferenciálních rovnic, zvláště Itôovy diferenciální rovnice. Byly stanoveny optimální odhady pro pravděpodobnost, že řešení Itôovy rovnice opustí danou oblast v daném čase. Byla vyšetřována stabilita řešení a byly nalezeny podmínky pro aplikaci metody průměru. Podstatnou úlohu hraje úzká souvislost Itôovy rovnice s parciálními diferenciálními rovnicemi parabolického typu.

Jiným zajímavým typem poruch jsou členy, které rychle oscilují. Vyskytují se mj. v rovnicích mechaniky. Při vyšetřování obecných vlastností diferenciálních rovnic s takovými členy bylo užito nového typu integrálních rovnic. Přitom integrál byl zaveden jako limita posloupnosti částečných součtů a zcela nová byla konvergence, které se v limitním procesu užívá. Uvedený postup dal vznik nové větvi v teorii integrálu a ta je velmi životná u nás i v zahraničí po celé čtvrtstoletí; viz [15]. V oblasti diferenciálních rovnic byla s využitím uvedeného postupu sestrojena teorie tzv. zobecněných diferenciálních rovnic, jejichž řešeními jsou funkce s omezenou variací, a tato teorie byla dovedena k jemnějším výsledkům, mezi něž patří teorie stability. Soustavný výklad je obsažen v publikaci [24] a v připravovaném dalším sešitě Rozprav ČSAV.

V druhém tematickém okruhu, který se v Praze rozvíjel od počátků padesátých let, v periodických řešeních diferenciálních rovnic byla dovršena teorie tzv. kritických případů. Hledat periodické řešení, to je vlastně jedna z okrajových úloh. Proto je přirozené, že se úsilí přesunulo k okrajovým úlohám. Zde se cesta rozdvojila: na okrajové úlohy v obyčejných diferenciálních rovnicích a na okrajové úlohy v parciálních diferenciálních rovnicích. O této druhé cestě se zmíním později. Pro zobecněné diferenciální rovnice byla sestrojena teorie okrajových úloh a byly soustavně zpracovány okrajové úlohy pro slabě nelineární diferenciální rovnice. Tato etapa je zachycena v monografii [25]. Později bylo vyšetřování okrajových úloh rozšířeno na diferenciální rovnice se zpožděným argumentem a na některé problémy z teorie řízení.

Dalšími tematickými okruhy byly exponenciálně stabilní variety (jde o to, aby se varieta pod vlivem poruch změnila, ale aby nemohla zmizet), dále teorie řízení, která se později velmi úspěšně rozvíjela na Slovensku, a teorie diferenciálních relací. Některé výsledky o diferenciálních relacích lze najít v monografii [14]; přepracované vydání v angličtině bylo odevzdáno do tisku.

V parciálních diferenciálních rovnicích se začalo pracovat na přelomu čtyřicátých a padesátých let. Řešily se úlohy rovinné pružnosti, tzn. okrajové úlohy pro biharmonickou rovnici. Využívalo se metody I. N. Muschelišviliho, tj. Airyho funkce se vyjádřila pomocí dvou analytických funkcí a jejich hledání se převedlo na řešení integrálních rovnic. Vyvrcholením této práce byla monografie [1]. Charakteristické bylo úzké spojení matematické úlohy s její reálnou interpretací a s úsilím po dosažení výstižné numerické informace v konkrétních případech. Toto spojení se přeneslo do řady výzkumů pozdějších, mj. do rozsáhlého výzkumu složitých procesů, které se týkaly vzniku a vedení tepla, pružnosti a pevnosti. Tento výzkum byl vyvolán přípravou stavby přehrady na Orlíku a podrobněji se o něm zmíní Karel Rektorys.

Základem pro variační metody a funkcionálně analytické metody v teorii parciálních diferenciálních rovnic jsou Sobolevovy prostory. I když byly právě s tímto cílem objeveny již na začátku třicátých let, ale uplynula neuvěřitelně dlouhá doba téměř třiceti let, než došlo k širokému a intenzívnímu uplatnění metod založených na užití Sobolevových prostorů. Tento trend byl v ČSR včas zachycen, bylo dosaženo řady znamenitých výsledků a jejich završení v oblasti lineárních rovnic prinesla monografie [17].

Vývoj dále pokračoval rychle a v mnoha proudech. Především prudce vzrostl zájem o nelineární problémy. Zde se obecné metody, především metody funkcionální analýzy a topologie uplatňují ještě výrazněji než v problémech lineárních a věty o okrajových úlohách se odvozují z výsledků, jejichž roucho je obecnější a abstraktnější. Jedním z velmi rozsáhlých témat je vyšetřování rovnice

$$\lambda Tu + Su = h\,, \tag{1}$$

kde operátor T je lineární, operátor S je nelineární a oba operátory zobrazují Banachův prostor do jeho duálu. Pro rovnici (1) byla dokázána jistá forma Fredholmovy alternativy a pro případ potenciálních operátorů T, S bylo vyšetřeno rozložení vlastních hodnot a kritických hodnot. Byla vytvořena úplná teorie Ljusternika-Schnirelmanna, byla vyšetřena množina pravých stran, pro něž je rovnice řešitelná v případě, že λ je vlastní hodnota a pokračovalo se i v dalších pracích. Výsledky jsou vyloženy v monografiích [9], [6]. Pro problematiku uvedené rovnice je charakteristické velké množství jevů, které se za těch nebo jiných předpokladů vyskytují; předem však nelze odhadnout, co od daného problému můžeme čekat. Svatopluk Fučík dovedl jedinečně formulovat problémy a vynalézavě kombinovat i předělávat metody k jejich řešení. Výsledků z monografie [6] dosáhl S. Fučík v krátkém období od r. 1973 do r. 1979, kdy mu předčasná a krutá smrt vyrvala pero z ruky. Bohatství a hloubka těchto výsledků vzbuzují hluboký obdiv.

Variační metoda dává existenci slabého řešení pro širokou třídu okrajových úloh pro soustavy eliptického typu. Problém, zda slabé řešení je hladké v případě hladkých koeficientů, je 19. Hilbertův problém. Až donedávna byly známé pouze částečné výsledky. Odpověď je kladná v dvoudimenzionálním případě. Obecně bylo dokázáno, že řešení musí být hladké na nějaké velké množině, ne však nutně všude. Tyto výsledky završil J. Nečas konstrukcí rovnic a soustav, které mají analytické koeficienty a přitom jejich řešení má singulární bod. To znamená, že úplná regularita obecně nenastane. I když tak bylo dáno téměř definitivní řešení Hilbertova problému, vývoj pokračoval. Byly nalezeny podmínky, které zaručují regularitu řešení, byla vyšetřena regularita harmonických zobrazení Riemannových variet na polosféru a bylo dosaženo řady dalších výsledků. Některé z těchto výsledků jsou vyloženy v [18].

Sobolevovy prostory i obecnější prostory funkcí se staly klasickým základem pro užití obecných metod v teorii diferenciálních rovnic. Jejich přirozeným zobecněním jsou prostory váhové. Tyto prostory umožňují použít obecných metod i v takových případech, kdy se setkáváme se singulárním chováním u členů rovnice nebo u členů okrajových podmínek anebo s tím, že oblast, na niž úlohu řešíme, má úhlové body nebo hrany. Soustavný výklad o prostorech funkcí je obsažen v [7]; monografie [13] je věnována váhovým prostorům a jejich užití v okrajových úlohách.

Od začátku sedmdesátých let se v Praze ustavila skupina pracovníků zaměřená na teorii potenciálu. Prvním cílem bylo rehabilitovat klasickou teorii potenciálu, potenciály jednoduché vrstvy a dvojvrstvy. To se podařilo. Předpoklady o oblastech, pro něž můžeme užít klasické metody potenciálu, byly podstatně oslabeny, takže např. úhlové body nebo hrany nejsou na překážku, a lze říci, že byly nalezeny přirozené podmínky pro použití klasické teorie potenciálu. Tyto výsledky najdeme v monografii [11].

Metod teorie potenciálu a prostředků teorie míry bylo užito k charakterizaci odstranitelných singularit řešení parciálních diferenciálních rovnic.

Velký kus práce byl vykonán v abstraktní teorii potenciálu. Pro širokou třídu harmonických prostorů byly charakterizovány otevřené množiny, pro které zobecněné řešení je jediným rozumným řešením, jinými slovy, pro které existuje právě jeden Keldyšův operátor. Do obecných souvislostí byla zařazena modifikovaná Wienerova konstrukce zobecněného řešení a byla vybudována „jemná" teorie potenciálu kulminující řešením Dirichletovy úlohy pro množiny otevřené v jemné topologii. Monograficky byla tato problematika zpracována v [16].

Práce v oblasti parciálních rovnic má trvale úzký vztah k aplikacím. Uveďme zde exaktní výzkum dimenzionální redukce z šedesátých let, který vedl k teoretické verifikaci běžně užívaných technických teorií nosníků, desek a skořepin a k návrhu dalších zjemnění technických teorií. Dále uveďme vyšetřování nerovnic Kornova typu a sérii výsledků o Karmánových rovnicích, které modelují velké průhyby tenkých desek.

Formulace některých úloh teorie pružnosti s jednostrannými okrajovými podmínkami vedla ke vzniku teorie variačních nerovnic. Také českoslovenští matematikové mají zásluhu na tom, že tato teorie se uplatnila v úlohách jednostranného dotyku pružných těles. Byla dokázána existence a vyšetřována jednoznačnost a konvergence aproximačních řešení získaných metodou konečných prvků. Tyto výsledky daly vznik monografiím [10], [19].

Při studiu aerodynamiky rychlých letadel a při vyšetřování proudění v parních turbínách a kompresorech se setkáváme s nutností řešit úlohu transsonického potenciálního proudění. Tato úloha je mimořádně obtížná vzhledem k tomu, že příslušná rovnice pro potenciál rychlosti je nelineární, smíšeného elipticko-hyperbolického typu, operátor získaný po přechodu ke slabé formulaci není monotónní, pseudomonotónní ani kompaktní a neexistují žádné apriorní odhady řešení. Do nedávné doby existovaly pouze numerické experimenty pro modelování transsonického proudění, otázka existence řešení byla zcela nejasná. Úspěchu v tomto směru dosáhli v loňském roce J. Nečas a M. Feistauer, kteří provedli podrobný teoretický rozbor existence řešení a ukázali, že podmínky, které zaručují, že řešení má fyzikální smysl (omezená rychlost, entropická podmínka), umožňují také dokázat konvergenci vhodné minimizující posloupnosti; viz [5].

Cílevědomá snaha o to, aby se udrželo a posílilo porozumění mezi pracovníky zaměřenými na teorii a těmi, kdo pracují v aplikacích, vedla k napsání monografií [21] a [8]. Obě monografie měly mimořádný ohlas zejména v zahraničí.

Tvůrčí pracovníci v matematice se málokdy dají donutit, aby připravili publikaci encyklopedického charakteru. Když se to však povede, stojí to za to. Mám na mysli publikaci [23]. Vyšla ve čtyřech českých vydáních, byla vydána v angličtině a stala se oficiální studijní příručkou na Massachusettském technologickém institutu v USA. Připravuje se podstatně přepracované vydání v češtině a v angličtině. Mravenčí práce spojená s přípravou tak rozsáhlé publikace přináší ovoce při uplatňování matematických metod i postupů v řadě oblastí a bohužel patří k údělu matematiků, že tyto efekty nelze zachytit a vykázat v ekonomických ukazatelích.

Některé evoluční problémy jsou zahrnuty v teorii potenciálu a v teorii variačních nerovnic. Mezi evoluční problémy patří též systémy reakce-difúze. V této oblasti byly vyšetřovány dvě spřažené parabolické rovnice, které lze interpretovat v ekologii jako rovnice pro hustoty dvou reaktantů a byl vyšetřen vliv tzv. jednostranných okrajových podmínek. Problematika supersonického proudění se vymyká klasifikaci evoluční-neevoluční. Na závěr své přednášky si všimnu práce v evolučních problémech soustavněji.

V polovině šedesátých let se v Praze ustavila skupina se zaměřením na evoluční problémy. Tato skupina se v první etapě zabývala především existencí periodických řešení lineárních i slabě nelineárních standardních rovnic matematické fyziky. Výsledky byly později přeneseny i na abstraktní diferenciální rovnici a shrnuty v monografii [26].

Postupně byla vyšetřována řada dalších problémů z teorie kmitů, a to:

stabilita řešení evolučních rovnic,
existence a jednoznačnost skoroperiodických řešení,
vlastnosti vlnového operátoru na jistých podprostorech (byla objevena nová podmínka symetrie, ze které jádro je triviální),

rovnice s neregulárními koeficienty (např. rovnice tyče s bodovým břemenem – to způsobuje, že Diracova funkce se vyskytuje jako koeficient u druhé derivace podle času), rovnice s nelineárními členy nelokálního charakteru,
kmity vazkopružných materiálů,
rovnice hydrodynamiky a magnetohydrodynamiky (byly odvozeny vztahy pro kritický čas, tj. pro maximální interval existence klasických řešení),
dvoufázový Stefanův problém,
rovnice, v nichž se v nelineárních členech vyskytují vyšší derivace.

Při vyšetřování těchto problémů byly odvozeny některé nové výsledky z funkcionální analýzy (z teorie Hilbertových prostorů, z teorie skoroperiodických funkcí, věty o implicitních funkcích).

V poslední době se v této skupině věnuje hlavní pozornost silně nelineárním úlohám, např.
existenci nekonečně mnoha kmitů systémů s nelineárními členy superlineárního i sublineárního charakteru,
existenci řešení Maxwellových rovnic, v nichž permeabilita i permisivita závisí na magnetickém poli,
řešení rovnic s nelinearitami typu hystereze.

Jiný směr práce je reprezentován monografií [22]. Základem této monografie je soustavné zpracování Rotheho metody, které je využito k důkazu existence a jednoznačnosti řešení a k důkazu konvergence přibližných metod pro řadu úloh evolučního typu za obecných podmínek.

Protože jsem chtěl podat obraz o šíři práce v diferenciálních rovnicích, byla moje přednáška na mnoha místech kusá a neúplná. Upřímně děkuji všem, kdo mně s přípravou přednášky pomohli. Byli to:

M. Feistauer, I. Hlaváček, O. John, J. Král, M. Kučera, A. Kufner, M. Laitoch V. Lovicar, J. Lukeš, J. Nečas, F. Neumann, M. Ráb, K. Rektorys, R. Švarc, O. Vejvoda, I. Vrkoč.

Literatura

[1] Babuška I., Rektorys K., Vyčichlo F.: *Matematická teorie rovinné pružnosti.* Praha, Nakladatelství ČSAV (1955), německé vydání Berlin, Akademie Verlag 1960.

[2] Borůvka O.: *O kolebljuščichsja integralach differencial'nych linejnych uravnenij 2-go porjadka.* Czech. Math. J. *3*, 78, 1953, 199–255.

[3] Borůvka O.: *Lineare Differentialtransformationen zweiter Ordnung.* Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1967, anglické vydání London, The English University Press 1971.

[4] Djubek J., Kodnár R., Škaloud M.: *Limit Shape of the Flat Elements of Sheet Structures.* Basel–Boston–Stuttgart, Birkhäuser 1983.

[5] Feistauer M., Nečas J.: *On the Solvability of Transonic Petential Flow Problems.* Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, Bd. *4* (4), 1985, 305–329.

[6] Fučík S.: *Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems.* Praha, JČSMF, 1980.

[7] Fučík S.: John O., Kufner A.: *Function Spaces.* Praha, Academia 1977.

[8] Fučík S., Kufner A.: *Nelineární diferenciální rovnice.* Praha, SNTL, 1978, anglické vydání Amsterdam–Oxford–New York, Elsevier 1980.

[9] Fučík S., Nečas J., Souček J., Souček V.: *Spectral Analysis of Nonlinear Operators*. Lecture Notes in Mathematics No. *343*, Springer 1973, pro Československo Praha, JČSMF, 1973.

[10] Hlaváček I., Haslinger J., Nečas J., Lovíšek J.: *Riešenie variačných nerovností v mechanike*. Bratislava, Alfa, Praha, SNTL, 1982.

[11] Král J.: *Integral Operators in Potential Theory*. Lecture Notes in Mathematics No. *823*, Berlin, Springer 1980.

[12] Kubíček M., Marek M.: *Computational Methods in Bifurcation Theory and Dissipative Structures*. New York, Springer 1984.

[13] Kufner A.: *Weighted Sobolev Spaces*. Leipzig Teubner 1980, anglické vydání Chichester, Wiley 1985.

[14] Kurzweil J.: *Obyčejné diferenciální rovnice*. Praha, SNTL 1978.

[15] Kurzweil J.: *Nichtabsolut konvergente Integrale*. Leipzig Teubner 1980.

[16] Lukeš J., Malý J., Zajíček L.: *Fine Topology Methods in Real Analysis and Potential Theory*. Springer 1986.

[17] Nečas J: *Les méthodes directes en théorie des equations elliptiques*. Praha, Academia 1967.

[18] Nečas J.: *Introduction to the theory of Nonlinear Elliptic Equations*. Leipzig Teubner 1983.

[19] Nečas J., Hlaváček I.: *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies*. Amsterdam, Elsevier 1981, česky Praha, SNTL 1983.

[20] Neuman F.: *Ordinary Linear Differential Equations*. Praha Academia, v tisku.

[21] Rektorys K.: *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*. Praha, SNTL 1974, anglické vydání Dordrecht—Boston—London, Riedel 1977, 1979 (1980, 571 str., 43 obr. v textu), německé vydání Mnichov, Hauser 1985, ruské vydání v tisku.

[22] Rektorys K.: *The Method of Discretization in Time and Partial Differential Equations*. Dordrecht—Boston—London, D. Riedel Publ. Co. 1982, česky SNTL 1985.

[23] Rektorys K. a kolektiv: *Přehled užité matematiky*. Praha SNTL 1963.

[24] Schwabik Š.: *Generalized Differential Equations, Fundamental Results*. Rozpravy ČSAV, řada matematických a přírodních věd *95*, sešit 6, Praha Academia 1985.

[25] Schwabik Š., Tvrdý M., Vejvoda O.; *Differential and Integral Equations*. Boundary Value Problems and Adjoints. Praha Academia 1979.

[26] Vejvoda O. a kolektiv (L. Hermann, Vl. Lovicar, M. Sova, I. Straškraba. M. Štědrý): *Partial Differential Equations: Time — Periodic Solutions*. Praha, SNTL 1981.

Ani v nejmenším se neopovažuji snižovat vysokou matematiku, tuto nejskvělejší vědu, které podle mého mínění patří prvenství mezi lidskými znalostmi; soudím však, že je jí třeba užívat na správném místě, tehdy kdy jsou shromážděna, prozkoumána, rozčleněna a mezi sebou porovnána všechna nezbytná fakta.

Matematiku je třeba se učit už jen proto, že přináší pořádek do myšlení.

Jediný pokus si cením více než tisíc domněnek, jež zrodila pouhá představivost. Avšak považuji za nezbytné přizpůsobovat pokusy potřebám fyziky. Ti, kdo se chystají vyvodit z výzkumu pravdy a neberou si s sebou nic než vlastní smysly, musí většinou vyjít naprázdno; neboť buď nezpozorují to nejlepší a nejnutnější, nebo nedovedou využít toho, co vidí nebo co postihují za pomoci ostatních smyslů.

Kdybych chtěl číst a ještě neznal písmena, bylo by to nesmyslné. Právě tak by bylo nesmyslné, kdybych chtěl soudit o jevech v přírodě, aniž mám nějakou představu o principiích věcí.

Bloudili by matematikové, kdyby odhodili nejjednodušší pojmy a začali zkoumat obtížné, bloudí fyzikové, když přezírají to, co dává každodenní zkušenost a konají umělé a nesnadné pokusy.

M. V. Lomonosov