Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jan Vyšín

Námět do diskuse

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 22 (1977), No. 2, 100--102

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139888

vyučování

Námět do diskuse

Jan Vyšín, Praha

Prof. KLAUS HÄRTIG z Humboldtovy univerzity v Berlíně, známý vědecký pracovník v didaktice matematiky, uveřejnil v časopise Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin Math.-Nat. R. *23* 1974 (5) článek, který vzbudil v NDR značnou pozornost. Autor se v něm pokusil vybudovat jakýsi „systém souřadnic" pro objektivní hodnocení různých kursů matematiky, učebnic matematiky apod. vzhledem k předem stanoveným cílům. „Souřadnice" v tomto systému jsou jednotlivé komponenty všeobecného matematického vzdělání, označované v článku římskými číslicemi. Domníváme se, že tato myšlenka stojí za pozornost našich pracovníků v didaktice, popřípadě za diskusi. Zde se totiž nabízí jistá cesta k objektivnímu posouzení různých modernizačních projektů, kde až dosud pociťují výzkumníci citelnou mezeru. Uveřejňujeme stručný výtah z článku; sama základní myšlenka by ovšem potřebovala podrobnější rozpracování (viz otázku A*).

Článek začíná otázkou A: Které hlavní komponenty všeobecného matematického vzdělání mohou hrát roli v osnově, v učebním textu, vůbec v jakékoli činnosti vyučujícího a žáka, ba vůbec v celé koncepci matematické výuky?

Na otázku A navazuje otázka A*: Jak můžeme měřit hodnotu uplatnění těchto komponent v kursu matematiky v učebnici atd., a to v celku i v tisícerých jednotlivostech?

Odpověď na otázku A* je nepoměrně obtížnější a předpokládá předchozí zodpovědění otázky A. U otázky A* musíme ovšem hodnotu posuzovat podle vzdělávacích i výchovných cílů.

Obsahové stránky výuky se týká otázka B. Jak máme roztřídit funkce, které může mít kterákoliv obsahová jednotlivost kursu, učebnice apod.? Článek prof. Härtiga se zabývá převážně otázkou B.

Od padesátých let se nahromadilo mnoho návrhů na změnu obsahu vyučování matematice, např. teorie grup, pravděpodobnost, informatika, teorie grafů, výroková logika, množinová algebra, diferenciální rovnice, finitní matematika. Žádá se nové zpracování tradiční látky, např. topologický přístup k základům analýzy, zpracování geometrie na podkladě vektorové algebry. Někteří didaktikové vidí těžiště výuky v aktivitě žáků, nikoli v obsahu kursu, speciálně v řešení problémů třeba i z tradičních oblastí.

Bylo by užitečné – praví prof. Härtig – mít jednoduchou soustavu, podle které bychom mohli zhodnotit obsahově všechny nové materiály a pokusy; o vytvoření takové soustavy se pokusil.

Složky všeobecného matematického vzdělání vymezuje prof. Härtig takto:

(I) *Znalost faktů*, potřebná i tehdy, zdůrazňuje-li se znalost pracovních postupů. Sem patří i znalost pracovních postupů.

(II) *Všeobecné způsoby matematického myšlení* (např. tzv. funkční myšlení); způsoby myšlení umožňují pochopit vzájemné souvislosti faktů a postupů (I). Uvádějí se čtyři takové velmi obecné způsoby myšlení:

(IIa) *Množinové myšlení*: sem patří základní pojmy z teorie množin (relace, funkce, izomorfismus, axióm extenzionality; příklady jsou grupy, přirozená čísla jako třídy ekvivalence apod.). Sem řadí prof. Härtig i vypracování jisté „sítě“ pojmů a vět, které nazývá „vytvořením soustavy“. Jde nejen o konstrukci teorií, ale i o přípravu zpracování problémových situací (uvádějí se jako příklady volný pád a Eulerův problém mostů).

(IIb) *Sémantické myšlení*

(IIc) *Syntaktické myšlení*

Způsoby (IIb), (IIc) se objeví, jakmile se začne hovořit o metajazyku, tj. o vyjadřovacích způsobech, pomocí kterých se zkoumají matematické objekty. Tak např. jakmile se začne užívat slov „proměnná“, „rovnice“, „důkaz“, „řešení“ apod.

Dále se uvádějí matematické objekty, které podle autora náležejí do oblastí myšlení (IIb) a (IIc). Ve středu sémantického způsobu myšlení je pojem modelu s pojmy interpretace, platnost, důsledek, dosažení apod. Řešení rovnice jsou podle autora jejími modely, grupa je model axiómů grupy.

Souvislosti uvnitř jazyka „objektového“, případně bez vztahů k objektům, jsou předmětem syntaktického způsobu myšlení. V jeho středu je pojem kalkulu, speciálně pojem algoritmu. Sem patří ve školské matematice např. postupy výpočtu, geometrické konstrukční předpisy a důkazy.

Rámec (IIa) lze rozšířit tak, že (IIb) i (IIc) do něho ještě patří.

„Manipulace s nekonečnem” má v matematice takové klíčové postavení, že ji Härtig začleňuje v navrhovaném systému jako zvláštní způsob myšlení a nazývá ji *analytické myšlení* (IId). Sem patří iterace rekurence, odhady a aproximace, konvergence, spojitost, pojem topologického prostoru, způsob topologického myšlení atd.

Dále se uvádějí dva příklady prolínání (IIa) až (IId): jednak koeficienty soustavy lineárních rovnic, jednak obsahy obrazců.

V další části článku se zabývá prof. Härtig také těmi složkami všeobecného matematického vzdělání, které jsou zčásti emocionální.
Jsou to: *představivost, fantazie, matematická iniciativa* (III). Rozvinutí těchto složek vyžaduje dosti bohatý obsah; v souhlase se složkami (I) a (II) musí být dosti příležitostí k experimentování, k heuristické práci. Představivost není jen představivost o velikosti (kvantitativní) a prostorová, ale zahrnuje i cit pro matematické souvislosti.

Složka (IV) je *jazykově logické školení*, tj. ovládnutí odborného jazyka, normovaného způsobu vyjadřování i živého mnohotvárného jazyka, blízkého jazyku hovorovému.

Jedním účelem jednotlivých částí kursu může být *důvěrné seznámení* žáka s látkou (III), jiným účelem to, že žák získá *odstup* od látky (IV). Dvě stránky téže věci jsou: vidět logické souvislosti (III), dobře je pochopit a umět je sdělit (IV). Tato dvojice složek je v souvislosti s dvojicí (I, II). Tyto čtyři složky zároveň vyžadují jedna druhou a zároveň se navzájem posilují. – Tak vysvětluje prof. Härtig pronikání složek. K tomu ještě připojuje poznámku, že při řešení obtížné otázky A*, např. zda zařadit do výuky euklidovsko-hilbertovskou geometrii, se musí uvážit nejen požadavky (I), ale i ta okolnost, jaký vliv mají různé varianty řešení dohromady na všechny ostatní složky.

Podle autora mohou mít jednotlivé

části obsahu matematického kursu ještě jinou funkci než jen přímý vliv na uvedené složky všeobecného matematického vzdělání. K „dimenzi obsahové" (I, II) a k „dimenzi schopností" (III, IV) přistupuje totiž ještě „dimenze spojitosti a intenzity" (V). Míní se tím spojitost a intenzita nejen jako didaktické kategorie, ale jako vlastnosti obsahové.

Vysvětlení: Spojité je takové probírání tématu, které navazuje na předchozí přípravu (třeba víceletou); když je situace zralá, téma se explicite vyloží a dále se pak využije. Jako příklad uvádí prof. Härtig probírání limity.*)

Dále se uvádějí některé prostředky pro *intenzifikaci vyučování*; jsou to zejména bohatost přípravného úlohového materiálu a aplikací, posílení studiem obdobných pojmů a postupů, protipříkladů, posílení heuristické stránky historickými poznámkami, sestavováním přehledů, formulacemi v různých dikcích apod.

V závěru svého článku uvádí prof. Härtig čtyři ukázky, jak se pomocí zavedeného „souřadnicového systému" může řešit otázka A* „a priori".

Matematická indukce náleží do (IId). Mohla by se zařadit do nižších ročníků, ale schází příkladový materiál. Lze však uvést množinově kombinatoricky pojmy faktoriál, kombinační čísla (rozšíření (I)) se ziskem pro (IIa), (III) a zároveň jako dlouhodobou přípravu pravděpodobnosti (V), (I). Použije-li se však místo toho úlohy z teorie grafů a topologie, vyvolá se tím i změna kursu geometrie. Vhodná technika indukčních důkazů přispívá k syntaktickému myšlení (IIc); přitom korektní postup vyžaduje vyšší úroveň jazykově logického myšlení; s tím paralelně probíhá rozvíjení představivosti (III). Tím však ještě nejsou všechny aspekty vyčerpány.

*) U nás nazýváme takovou strukturu výuky systémem propedeutik.

Druhá ukázka se týká analýzy matematického dokazování pomocí uvedeného systému souřadnic. Třetí ukázka je věnována diskusi tří variant probírání modulární aritmetiky: výklad se může založit buď na kongruencích, nebo na zbytkových třídách, nebo zbytcích, anebo se mohou probírat tyto varianty paralelně. Ukazuje se, které ze složek se při těchto variantách posilují, které se zeslabují. Konečně čtvrtá poznámka se týká rozvíjení citu pro jednoduchost důkazu, citu pro jeho závažnost v matematickém kursu.

Očekáváme reakci čtenářů na námět prof. Härtiga.

Projekt CSMP*)

Blanka Kussová

Comprehensive School Mathematics Program (dále jen CSMP) patří v současné době mezi nejvýznamnější a též nejrozšířenější americké výzkumné projekty, zabývající se vyučováním matematiky na všeobecných středních školách. Cílem projektu je vypracování učebních osnov z matematiky pro žáky 5—18leté a příprava příslušných učebních textů a metodických průvodců.

Práce probíhá na dvou úrovních:

a) Intenzívně se pracuje na základním programu výuky žáků 1.—6. tříd, který je nazýván *CSMP Elementary Program* a jehož první část se již prověřuje

*) Pokračování tohoto článku otiskneme v příštím čísle.