Donald G. Saari; Zhihong Xia
Do nekonečna v konečném čase

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 42 (1997), No. 2, 90--102

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139786

Do nekonečna v konečném čase

Donald G. Saari a Zhihong (Jeff) Xia

Může Newtonův problém n nekolidujících hmotných bodů popisovat situaci, kdy je těleso vyvrženo do nekonečna v konečném čase? Tento spletitý, století starý problém, který motivoval několik zajímavých a hlubokých matematických tvrzení, nedávno rozřešil matematik Xia ([X1], [X2]). Ve své doktorské disertaci dokázal, že pro všechna $n \geqq 5$ existují trojrozměrné příklady takové situace. Později Gerver [G] ukázal, že se podobné chování vyskytuje i v rovinném problému $3n$ těles, kde n je zatím neznámé a velice velké.

Sama domněnka, že náš známý Newtonův gravitační zákon může připouštět takové protismyslné chování, je tak překvapující, že je přirozené se zajímat, odkud se vzala tak nezvykle znějící otázka. Jak ukážeme v tomto krátkém přehledu, Xiův výsledek řeší základní přirozený problém, který formulovali Poincaré a Painlevé přibližně před jedním stoletím.[1]) Hlavním problémem je charakterizovat povahu „singularit" systému n těles. Singularita zde znamená „časový" okamžik $t = t^*$, v němž již analytické prodloužení řešení není možné.

Co tedy vytváří singularitu? Nechť m_j a $\boldsymbol{r}_j$ jsou hmotnost, respektive vektor polohy, j-té částice a nechť $r_{ij} = \|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j\|$. Z pohybových rovnic

$$m_j \boldsymbol{r}_j'' = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)}{r_{ij}^3} = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_j}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

kde vlastní potenciál (záporně vzatá potenciální energie) je

$$U = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \tag{2}$$

zřejmě plyne, že singularita vyžaduje, aby některá vzdálenost r_{ij} nabývala libovolně malé hodnoty při $t \to t^*$. Kolize je zřejmě singularita. Jsou ale všechny singularity kolizemi? Koncem devatenáctého století se uvažovalo o tom, zda by singulární dráha mohla vykazovat takové oscilační chování, při němž se limes inferior veličiny $r_{\min}(t) = \min_{i \neq j} r_{ij}(t)$ blíží k nule, zatímco limes superior této minimální vzdálenosti mezi

[1]) *Poznámka překladatelů:* Čtenáře odkazujeme též na článek: F. Diacu, *The solution of the n-body problem*, Math. Intelligencer *18* (1996), No. 3, 66–70.

Don Saari a Jeff Xia jsou profesory matematiky na Northwestern University in Evanston, IL, e-mail: d_saari@math.nwu.edu, xia@math.nwu.edu

Off to Infinity in Finite Time, Notices Amer. Math. Soc. *42* (1995), 538–546.

Přeložili Michal Křížek a Karel Segeth za podpory grantu č. A 1019601 GA AV ČR.

částicemi zůstává kladná. Stručně řečeno: Mohly by si částice zahrávat s kolizí, aniž by k ní někdy došlo?

Vyjádřeme tuto možnost v pojmech konfiguračního prostoru. Jestliže

$$\Delta_{ij} = \{\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \in (R^3)^n \mid \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j\},$$

pak $\Delta = \bigcup_{i<j} \Delta_{ij}$ určuje všechny body v prostoru $(R^3)^n$, kde rovnice (1) není definována. Oscilace jsou pak ekvivalentní dráze připouštějící posloupnost $\{t_i\}$, $t_i \to t^*$, takovou, že se $\mathbf{r}(t_i) = \big(\mathbf{r}_1(t_i), \dots, \mathbf{r}_n(t_i)\big)$ přibližuje k Δ, ale $\mathbf{r}(t)$ nikoli. Painlevé během svých švédských přednášek [Pa] v r. 1895 dokázal nemožnost takového oscilujícího chování.

Painlevéův důkaz je krásnou aplikací standardní existenční věty, která zaručuje, že řešení rovnice $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ existuje v časovém intervalu, jehož délka je určena horním odhadem veličiny $\|f(\mathbf{x})\|$. Abychom viděli, odkud pocházejí odhady pro rovnici (1), všimněme si, že řešení vedoucí k singularitě a připouštějící $\limsup_{t\to t^*} r_{\min}(t) > d > 0$ zaručuje existenci posloupnosti $\{t_k\}$, $t_k \to t^*$, takové, že všechny vzdálenosti splňují nerovnost $r_{ij}(t_k) \geqq d$. Tím, že tyto vzdálenosti jsou omezeny zdola kladnou konstantou, jsou pravá strana rovnice (1) i potenciál U omezeny shora. K ohraničením na rychlost $\mathbf{v}_j$ dospějeme z odhadu U a integrálu energie

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{v}_j^2 = U + h, \tag{3}$$

kde h je integrační konstanta.[2]) Existenční věta tedy pro každou hodnotu t_k zaručuje, že řešení existuje pro čas rozšířený za okamžik t_k, přičemž toto rozšíření závisí pouze na d a h. Zvolíme-li t_k tak, aby $t^* - t_k$ bylo menší než polovina této zaručené hodnoty, dostaneme spor s předpokladem, že t^* je singularita.

Věta (Painlevé). *Problém n těles má singularitu pro $t = t^*$ právě tehdy, když*

$$\mathbf{r}(t) \to \Delta \quad \textit{pro} \quad t \to t^*. \tag{4}$$

I když Painlevéova věta říká, že singularita vyžaduje, aby $\mathbf{r} \to \Delta$, zůstává nejasné, zda částice musí kolidovat. Podmínka $r_{\min}(t) \to 0$ pro $t \to t^*$ ovšem může být splněna (viz obrázek 1), aniž by se kterákoli vzdálenost celkově přibližovala k nule. Místo toho se pak může stát, že singularita je generována částicemi, které se téměř budou účastnit kolizí, aniž by se jich kdy dopustily. Kolizí budeme rozumět následující pojem.

Definice. Singularita v čase t^* je *kolize*, jestliže existuje bod $q \in \Delta$ takový, že $\mathbf{r}(t) \to q$, jakmile $t \to t^*$. V opačném případě se singularita nazývá *nekolizní singularita.*

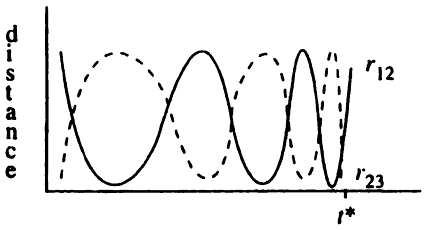
Pomocí trojúhelníkové nerovnosti Painlevé dokázal, že pro problém tří těles nemůže nastat patologická situace z obrázku 1, tj. že pro $n = 3$ jsou všechny singularity

[2]) *Poznámka překladatelů:* Symbolem $\mathbf{v}_j^2$ se rozumí $\|\mathbf{v}_j\|^2$.

kolizemi. Abychom popsali, proč je tomu tak, potřebujeme porovnávat maximální a minimální vzdálenosti mezi částicemi. Hodnota U^{-1} je zřejmě „míra“ pro $r_{\min}(t)$. Pokud je těžiště v počátku souřadnic, měří se maximální vzdálenost mezi částicemi pomocí $\sqrt{I}$, kde $I = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j r_j^2$. Odtud plyne (pomocí dvojího derivování $I(t)$ a použití vztahu (3)), že tyto veličiny jsou spojeny prostřednictvím Lagrangeovy–Jacobiovy rovnice [P1]

$$I'' = U + 2h. \tag{5}$$

Tento vztah například udává, že kdykoli se částice přiblíží k jiné (tj. hodnota U je velká), bude I'', zrychlení veličiny I, kladné. Extrémním příkladem je singularita, kdy $r_{\min}(t) \to 0$ nebo $U \to \infty$. Vše, co potřebujeme ze vztahu $I'' \to \infty$ (viz (5)), je to, že $I''(t)$ je nakonec kladné, protože to vyžaduje $I \to A$, $A \in [0, \infty]$, pro $t \to t^*$. Možnost $A = 0$, kde $I \to 0$, zřejmě představuje kolizi, neboť všechny částice kolidují v těžišti. V opačném případě $I \to A > 0$, což znamená, že dvě strany trojúhelníka definovaného třemi částicemi jsou odraženy od nuly. Doprovodná podmínka $r_{\min}(t) \to 0$ vyžaduje, aby se třetí strana trojúhelníka zmenšovala k nule. Ale jakmile se $r_{\min}$ dostatečně zmenší a zůstane malé, trojúhelníková nerovnost zamezí to, aby si různé páry částic vyměňovaly své role při definici veličiny $r_{\min}$. Protože $r_{\min}(t)$ je nakonec definováno pomocí jediného páru částic, scénář z obrázku 1 se nemůže přihodit. Nyní je snadné ukázat, že všechny částice se blíží limitní pozici.



Obr. 1. Oscilační pohyb, u něhož se minimální vzdálenost blíží k nule.

Poté co Painlevé dokázal svůj výsledek, byl zvědav, zda nekolizní singularity mohou existovat pro $n \geqq 4$; může se tedy hodnota $r(t)$ přiblížit k Δ, aniž by se ztotožnila s kterýmkoli bodem této množiny? Tuto otázku Xia rozřešil tím, že pro $n \geqq 5$ dokázal existenci takových řešení.

Chování a pravděpodobnost nekolizních singularit

Po Painlevéově větě se další významný výsledek vyskytl v roce 1908, když von Zeipel [VZ] objevil překvapující důsledek nekolizní singularity. Využil toho, že podle Newtonova gravitačního zákona je zrychlení hodně vzdálených částic zanedbatelné. Tudíž v malém časovém rozpětí se vzdálené částice v podstatě pohybují podél přímek pouze s nepatrnými změnami rychlosti. A tak von Zeipel oddělil analýzu toho, jak sousední částice vzájemně interagují, od toho, jak se shluky sousedních částic od sebe oddělují. Když ukázal, že tento shlukový argument je ve sporu s podmínkou $I \to A < \infty$, dokázal následující překvapivý důsledek.[3])

Věta (von Zeipel). *Nekolizní singularita nastane v čase t^* právě tehdy, když $I \to \infty$ pro $t \to t^*$.*

Von Zeipel vystupňoval důležitost problému zejména tím, že ukázal, že pokud by nekolizní singularity existovaly, pak by Newtonův pohybový zákon připouštěl částice, které se od sebe nekonečně vzdálí v konečném čase! Jak by toto mohlo nastat? Tento podivuhodný závěr pravděpodobně způsobil, že předmět Painlevéova zájmu zůstal v pozadí bádání na půl století.

Problém singularity byl znovu vzkříšen koncem šedesátých let, kdy Saari [S1] charakterizoval chování všech kolizí poté, co spolu s Pollardem vyšetřoval asymptotické chování Newtonova problému n těles. Tyto výsledky byly zesíleny v pracích [PS1], [PS2] tvrzením, že všechny kolidující částice se k sobě blíží jako $(t^* - t)^{2/3}$. (To bylo známo již dříve pro binární kolize (Sundman [Su]) a úplně kolabující dráhy pro $I \to 0$ (Wintner [W]).)

Proč dostáváme exponent $\frac{2}{3}$?[4]) Tato hodnota odráží volbu zákona síly, protože obecně se exponent rovná $2/(p+1)$, kde $p > 1$ je exponent v gravitačním zákonu. (Newtonův gravitační zákon je formulován pro $p = 2$.) To lze snadno zjistit z rovnic kolinearity $x'' = -(p-1)x^{-p}$. Vynásobíme-li obě strany x' a integrujeme je, získáme integrál energie $\frac{1}{2}(x')^2 = x^{1-p} + h$ nebo $\frac{1}{2}(x')^2 x^{p-1} = 1 + hx^{p-1}$. Podmínka kolize $x \to 0$ tedy převádí energetický integrál na $x'x^{(p-1)/2} \sim -\sqrt{2}$ pro $t \to t^*$. Závěr (pro jednoduchý kolineární problém) plyne z integrování.

Dosadíme-li nutnou a postačující podmínku [PS1] pro kolizi

$$U \sim A(t - t^*)^{-\frac{2}{3}} \quad \text{pro} \quad t \to t^* \tag{6}$$

do rovnice (5), zjistíme po integraci, že ohraničené je nejen I, ale též I'. Abychom vytvořili nekolizní singularitu, musí I'' zřejmě být více excitováno tím, že $r_{\min}(t)$ dosáhne 0 mnohem rychleji [PS2]. Jak rychle však může takový systém explodovat? Při experimentování s rovnicí (5) a rychlostmi změny $U(t)$ připouštějícími $I \to \infty$ se můžeme ptát, zda je rozumné uvažovat, řekněme, $I \sim \ln((t^* - t)^{-1})$ pro $t \to t^*$. Jak se ukazuje v [S3], růst je rychlejší a I jde do nekonečna rychleji než velká třída podobných funkcí.

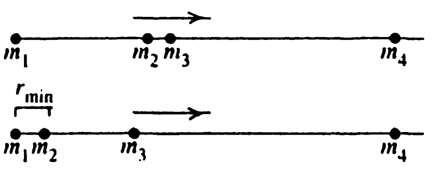
Důležitou složkou našeho popisu je vysoce oscilační charakter nekolizních pohybů, který se objevuje v [S3]. Odtud vyplývá, že se částice musí přibližovat k ostatním vzdáleným částicím nekonečně často a libovolně blízko. Intuice napovídá, že částice letící do nekonečna má sama téměř nulové zrychlení, takže její rychlost zůstává v podstatě konstantní. Protože konstantní rychlost vylučuje dosažení nekonečna v konečném

---

[3]) Chazy [Ch], Sperling [Sp] a Saari [S3] nalezli důkazy, které vyjasnily a rozšířily původní důkaz von Zeipelův. Viz též Mc Geheeův výkladový článek [MG1].

[4]) *Poznámka překladatelů:* Podrobně viz M. Křížek: *O problému tří těles.* Rozhledy mat.-fyz. *70* (1992), 105–112.

čase, zrychlení je třeba zvyšovat, a to vyžaduje těsné přiblížení jiné částice. Uvažujme například problém čtyř těles znázorněný na obrázku 2. Podmínka $I(t) \to \infty$ nutí některou částici, např. m_1, aby splňovala $\limsup\limits_{t\to t^*} r_1(t) = \infty$.[5]) Pokud se pro nějaký časový interval před t^* žádná částice nepřiblíží k m_1 na vzdálenost, řekněme, 10^{-20}, pak r_1'' je ohraničené. Integrací ale zjistíme, že to odporuje požadavku $\limsup r_1(t) = \infty$. Aby tedy m_j mělo vlastnost $\limsup r_j(t) = \infty$, musí se k m_j v každém intervalu (t, t^*) přibližovat libovolně blízko jiná částice. S trochou dodatečné práce a při aplikaci tohoto zdůvodnění na pohybové rovnice pro těžiště dvojice částic zjistíme, že pokud se k dvojici nepřiblíží žádná jiná částice, dráhy dvojice i jejího těžiště zůstanou omezeny. Odtud vyvodíme, že pokud má m_j vlastnost $\limsup\limits_{t\to t^*} r_j(t) = \infty$, potom v každém intervalu (t, t^*) je m_j navštívena jinou částicí. Podobně dvojice, která opakovaně splňuje podmínku $r_{\min} \to 0$, musí být navštěvována libovolně často a blízko jinou částicí.



Obr. 2. Dvě volby putujících částic.

Těžiště je neměnné, a proto kdykoliv se částice vzdálí od počátku, musí být daleko i nějaká jiná částice v opačném směru. Tudíž alespoň dvě vzdálené částice jsou ovlivňovány ostatními tělesy. Aby byla zachována podmínka $I \to \infty$, musí vždy existovat dvě vzdálené částice, k nimž jiné částice „dojíždějí“. Pro $n = 4$, kde jsou k definování $r_{\min}(t)$ zapotřebí alespoň dvě částice, je jedinou cestou pro realizaci těchto „návštěvních“ podmínek jakási kombinace scénářů, v nichž buď dvě částice jsou vzdálené a mezi nimi cestuje dvojice částic (horní diagram na obrázku 2), anebo dvojice a jedna z částic jsou od sebe odděleny a zbývající částice putuje mezi nimi (dolní diagram na obrázku 2). Protože každá částice musí být navštívena v každém časovém intervalu před t^*, toto vše by se mělo stát nekonečně často.

Připomeňme, že během traverzování se putující částice v podstatě pohybuje (pohybují) po přímce, která je pečlivě namířena tak, aby se dosáhlo cíle. Naše podezření, že se systém rychle přiblíží k pevné přímce ve fyzikálním prostoru, je správné. Směr většiny rychlostních členů je rovněž určen touto přímkou. Protože tedy nekolizní singularita pro $n = 4$ vtlačuje pohyb do pevné přímky ve fázovém prostoru, můžeme očekávat, že vlastnosti systému, které zachovávají míru systému a dávají nekolizní singularity pro $n = 4$, jsou u těsných trojitých přiblížení nepravděpodobné. Pomocí této intuice a metody, kterou Saari [S2] vyvinul dříve pro důkaz Littlewoodovy domněnky [L], že kolize jakéhokoliv typu jsou pro všechna n nepravděpodobné, Saari [S4] ukázal, že nekolizní singularity problému čtyř těles tvoří množinu nulové Lebesgueovy míry.

[5]) *Poznámka překladatelů:* $r_1 = \|r_1\|$.

Zkombinujeme-li výsledky [S2] a [S4], zjistíme, že singularity jsou pro $n \leqq 4$ nepravděpodobné; většina trajektorií existuje v neomezeném čase. Je rozumné očekávat, že stejný závěr platí i pro všechna $n \geqq 5$. Abychom dokázali takové tvrzení, stačí ukázat (protože kolize jsou nepravděpodobné podle [S2]), že nekolizní singularity jsou v množině nulové Lebesgueovy míry. Jisté modifikace důkazu z [S4] ukazují, že to je pravda pro ty nekolizní dráhy, kde se částice srovnávají do přímky (tak jako v Xiaově konstrukci). Vlastně se zdá (ale musí to být ještě dokázáno), že postup a závěr z [S4] lze rozšířit na všechny nekolizní singularity. To plyne z toho, že požadovaný „návštěvní" charakter takové dráhy nutí částice, aby se rychle přibližovaly k méněrozměrné nadrovině ve fázovém prostoru.

Matherova-McGeheeova konstrukce

Jakýkoliv pocit skepticismu týkající se existence nekolizních singularit se rozplynul článkem [MM] Mathera a McGeheeho z r. 1975. Tito autoři pro kolineární problém čtyř těles ukázali, že by se binární kolize mohly akumulovat takovým způsobem, že vyvrhnou částice do nekonečna v konečném čase. Tím sice nerozřešili Painlevéův problém (protože nekolizní singularita musí být základní singularitou systému), ale významně poukázali na fakt, že takové pohyby existují. Vskutku, Anosov [An] upozornil, že příklad nekolizní singularity pro problém čtyř těles může existovat v okolí příkladu Mathera a McGeheeho; to však ještě musí být prokázáno. Matherova-McGeheeova konstrukce je založena na dřívější McGeheeově práci týkající se trajektorií těsných trojitých přiblížení pro kolineární problém tří těles. Tyto pojmy jsou popsány níže.

Binární kolize je podle Sundmana [Su] algebraický bod větvení, kde dynamika napodobuje pružnou kolizi.[6]) Avšak Siegel [Se] ukázal, že trojité kolize obecně definují logaritmickou singularitu, která znemožňuje, aby bylo řešení prodlouženo. Alternativní cíl pak je analyzovat, co se děje v blízkosti trojité kolize. K tomu McGehee [McG2] zavedl jisté „sférické souřadnice", kde je poloměr definován pomocí $r_{\max}(t) = I^{1/2}$; s tímto měřítkem představují „úhlové souřadnice" $1/r_{\max}(r_1, \dots, r_n)$ konfiguraci tvořenou částicemi. Důležité pro tuto konstrukci je, že zákon síly je homogenní. To umožňuje vytknout radiální člen z klíčových rovnic a začlenit jej do nezávislých proměnných, aby se tak změnilo měřítko „času". Výsledný systém „úhlových souřadnic" popisuje změny v konfiguraci.

Nově navržený systém je, matematicky vzato, definován i pro $r_{\max}(t) = 0$, což je nulový bod v Δ. Toto „zvětšení" úplné kolabující singularity vytváří invariantní hraniční varietu C, která se nazývá „kolizní varieta". Protože rozšířený dynamický systém je hladce rozšiřitelný až do hranice, chování těsných trojitých přiblížení může být analyzováno pomocí zjednodušeného jakoby „gradientního" toku definovaného na C. Tímto způsobem dospějeme k hlubokým závěrům týkajícím se chování těsných trojitých přiblížení.

[6]) *Poznámka překladatelů:* Pro binární kolizi může být řešení prodlouženo.

Abychom přiblížili tyto výsledky, připomeňme středoškolský fyzikální pokus, ve kterém je z budovy vržen míč. Čím je kolize pružnější, tím výše míč vyskočí. Poblíž země se odskakující míč samozřejmě pohybuje rychle vzhůru. Abychom využili tuto rychlost, rychle hodíme další, mnohem menší míč tak, aby ke srážce došlo ihned potom, co větší míč začíná svoji cestu vzhůru. Malý míč se odrazí od velkého míče, aniž by zasáhl pevnou zemi. A tak pružná kolize způsobí, že se první, větší míč chová jako baseballová pálka. Kolizí druhý míč získá dodatečný moment hybnosti a vyskočí výše, než kdyby ke srážce nebylo bývalo došlo.

Podobný efekt popisuje těsné trojité přiblížení v kolineárním Newtonově problému tří těles. Pokud je počáteční podmínka vedoucí k úplnému kolapsu mírně pozměněna, jedna z částic, např. m_3, se trochu opozdí a trojitá kolize nenastane. První kolidující pár, m_1 a m_2, utvoří pružnou kolizi. Z rovnic (3) a (6) plyne, že odrazová rychlost je libovolně velká, pokud ji měříme dostatečně blízko kolize. A tak odskakující částice, která se teď blíží ke kolizi se zpožděnou částicí m_3, má libovolně velký moment hybnosti. Podobně jako tomu bylo v případě fyzikálního experimentu, nová pružná kolize by měla způsobit, že ji opožděná částice m_3 opustí s libovolně velkou rychlostí — mnohem větší, než byla její vstupní rychlost. Ačkoliv je skutečná situace komplikovanější (např. stejně jako v případě míčů se musíme zabývat hmotnostmi; v závislosti na těchto hodnotách může být uskutečněna řada binárních kolizí, než je jedna z částic vymrštěna; výběr vymrštěné částice závisí na požadovaném počtu binárních kolizí a délce času, který uplynul od trojité kolize, apod.), tento popis zachycuje podstatu těsných trojitých přiblížení.

Popis pohybu těsných trojitých přiblížení (pro kolineární problém) naznačuje, že m_3 (ve spodní části obrázku 2) je odmrštěna od dvojice m_1, m_2 s libovolně velkou rychlostí. Abychom zajistili, že m_3 nebude vyhozena do nekonečna, potřebujeme nějakou překážku — čtvrté těleso. Získá-li částice m_3 dostatečně velkou rychlost, dožene částici m_4 a má s ní pružnou kolizi. Když bude hmotnost částice m_3 dostatečně malá, m_3 se odrazí zpět k m_1, m_2, kde bude, pokud dospěje v čase blízkém k formování trojité kolize, znovu zpětně odpálkována. Spolu se správným načasováním (tj. s příslušným symbolickým dynamickým důkazem) se tento scénář opakuje nekonečně často v konečném časovém intervalu. Mather a McGehee tímto způsobem ukázali, že existuje Cantorova množina počátečních podmínek definující toto chování.

McGeheeovy souřadnice se staly standardním prostředkem pro zkoumání dynamického chování drah blízkých úplnému kolapsu pro kolineární problém tří těles (viz např. [McG2]), pro rovnostranný problém tří těles, kde v každém čase tři částice tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníka (viz např. Devaney [D1], [D2], Moekel [M1], [M2], Simo [Si]), a pro anizotropní Keplerův problém [D2]. Tímto způsobem se dospělo k překvapivě rozmanitým ukázkám „chaotického" chování řešení problému tří těles. Podobným, ale mírně odlišným způsobem jsme v [SX] použili tyto souřadnice ke stanovení existence nových typů drah, z nichž nejpřekvapivější je „superhyperbolický pohyb", už dříve diskutovaný Pollardem [P2] a později Marchalem a Saarim [MS] jakožto součást jejich popisu vývoje systému n těles. Celá záležitost se týkala toho, zda existuje horní odhad pro rozpínání soustavy n těles, tj. existuje-li funkce $f(t)$, která nakonec omezuje všechna řešení pro $t \to \infty$. Například pomocí speciální teorie relativity, kde jsou všechny rychlosti odhadnuté rychlostí světla c, bychom dostali $f(t) = ct$. Ale Newtonův svět nerespektuje Einsteinovu formulaci; jakmile $n \geqq 4$, pro Newtonův systém n těles žádná taková funkce $f(t)$ neexistuje! Pro problém čtyř těles jsme místo toho ukázali, že pro každou funkci $f(t)$ existují počáteční podmínky takové, že $r_{\max}(t)/f(t) \to \infty$ pro $t \to \infty$. Zvolíme-li například

$$f(t) = \exp(\exp(\exp(\dots\exp(t)\dots))),$$

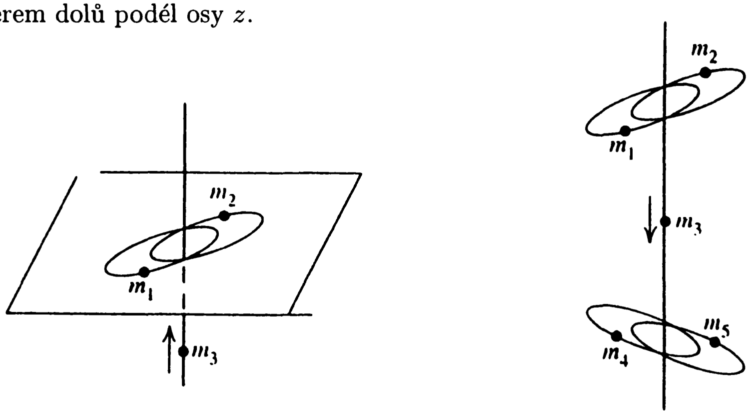
je zřejmé, že se systém n těles může rozpínat způsoby, které odporují očekávání.

Náš důkaz vyžadoval „zpomalení" Matherova-McGeheeova pohybu tak, aby neskončil příliš brzy, nýbrž aby trval věčně. Intuice, jak to udělat, pochází z pokusu se dvěma míči. Pokud druhý míč není vržen dost rychle, dopadne na první míč poté, co se už odrazový moment zmenšil. Podobně jsme potřebovali zavést nějaký postup umožňující popsat dynamické důsledky toho, že místo interakce libovolně blízké trojité kolizi dojde k takovému zpoždění, aby m_3 nebyla vymrštěna příliš silně. Náš technický důvod pro zavedení tohoto zpoždění využívá komplikovanou strukturu variety množiny počátečních podmínek, které vedou k trojité kolizi.

Xiaova konstrukce

Tato krátká historie Painlevéova problému uvádí to, co je zapotřebí k vytvoření nekolizní singularity. Částice především musí rychle cestovat mezi ostatními a nekonečně často se k nim dostávat libovolně blízko. Rychlost potřebná k dosažení těchto nekonečně častých návštěv je získávána z těsných vícenásobných přiblížení. V tom spočívá jedna z matematických obtíží: aby singularita byla nekolizní, musí být analýza těsného vícenásobného přiblížení provedena bez využití skutečné kolize. Pokud ale vyloučíme kolize, přicházíme o pohodlnou formulaci kolineárního problému, protože ten vždy vyžaduje, aby tělesa do sebe narážela. Jakmile upustíme od směrových ohraničení včleněných do kolineárního problému, potřebujeme nasměrovat pohybující se částici téměř přesně tam, kam zasahovaná částice dospěje. (To je dáno tím, že dokud se částice nedostane do těsné blízkosti cíle, je její rychlost v podstatě neměnná.) Složitost problému spočívá v tom, že všechny předchozí teorie musí být rozšířeny na více rozměrů a pak spojeny tak, aby nastalo požadované chování částic. To je to, co udělal Xia.

Abychom porozuměli Xiaově konstrukci, začněme se symetrickým řešením problému tří těles, kde je pohyb dvou stejně hmotných těles m_1 a m_2 vždy rovnoběžný s rovinou xy a pohyb částice m_3 je omezen na osu z. (Viz obrázek 3a. Snadno lze dokázat, že takové pohyby existují.) Pokud se m_1 a m_2 pohybují po kruhových drahách, přitažlivá síla, kterou působí na částici m_3 (definovaná vzdáleností $r_{13} = r_{23}$), závisí na tom, jak daleko je m_3 od jejich roviny pohybu. Když však m_1 a m_2 mají silně eliptické dráhy, pak jejich silový účinek na m_3 nezáleží jen na tom, jak daleko je částice m_3 od roviny oběhu, ale také na tom, jak blízko jsou m_1 a m_2 u sebe. Uvažujme kupříkladu extrémní případ, kdy dráha dvojice částic je tak silně eliptická, že aproximuje pohyb po přímce, kdy se obě částice k sobě přibližují libovolně blízko, a pak se dostatečně vzdalují. Předpokládejme, že částice m_3 přichází k rovině zespodu, a když je těsně nad ní, dvojice částic je nejblíže k sobě. Jestliže jsou částice k sobě vzájemně blízko (a mají správné hmotnosti), dvojice zapůsobí na m_3 obrovskou silou orientovanou směrem dolů. Správným nastavením vzdáleností mezi částicemi můžeme získat přitažlivou sílu tak velkou, jak potřebujeme. Tudíž částice m_3 může být popohnána dolů s libovolně velkou rychlostí, právě když se m_1 a m_2 začínají oddalovat. Dvojice oddělující se s tímto příznivým načasováním ztrácí brzdný efekt na částici m_3, která je vystřelena směrem dolů podél osy z.



3a Setkání tří těles. 3b Xiaova konstrukce.

Obr. 3. Konstrukce pro pět těles.

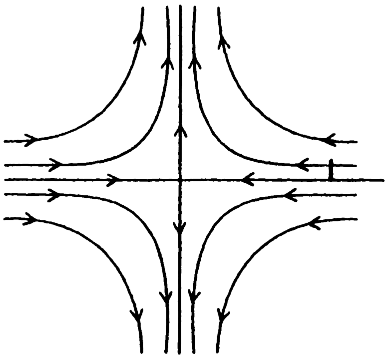
Abychom zabránili tomu, že m_3 bude vymrštěna do nekonečna, potřebujeme nějakou překážku, tou ovšem nemůže být čtvrtá částice na ose z, protože ta by způsobila kolizi. Zopakujme tedy předchozí scénář s tím, že níže na ose z umístíme druhou dvojici m_4, m_5 s vysoce eliptickou drahou, která je kolmá k z (viz obrázek 3b). S téměř perfektním načasováním — když částice m_4 a m_5 dosáhnou dostatečně blízkého přiblížení právě poté, co putující částice m_3 proletěla jejich rovinou — zastaví výsledná síla, kterou dvojice působí na m_3, částici m_3 na cestě dolů a vrhne ji zpět směrem vzhůru s libovolně velkou rychlostí. Povšimněme si, že využitím této symetrie je problém zacílení pro m_3 vyřešen.[7])

Xiaův důkaz ukazuje, že tento scénář se může opakovat nekonečně často v konečném čase. Podobně jako při konstrukci Cantorova diskontinua, kde se v každém kroku odstraňuje další „prostřední třetina", vyvinul Xia prosívací postup. Jinými slovy, množina počátečních podmínek má zhruba tvar klínu a je určena požadavkem, aby tři částice provedly alespoň jeden výše popsaný manévr. Některá řešení odpovídající počátečním podmínkám z tohoto klínu umožňují částici m_3 interagovat uvedeným způsobem s druhou dvojicí a jiná to nedovolují. Ta řešení, která se nechovají požadovaným způsobem, jsou vyřazena. (Zejména jsou eliminovány všechny dráhy, na

[7]) *Poznámka překladatelů:* Vzdálenost mezi horní a dolní dvojicí částic roste nade všechny meze.

nichž částice m_3 nesplňuje požadavek pečlivého sladění s pohybem další dvojice.) Tento vylučovací proces pokračuje a v limitním případě pak zbude Cantorova množina počátečních podmínek umožňujících, aby se žádoucí chování vyskytlo nekonečně často.

Abychom získali cit pro to, jak se „klíny" počátečních podmínek dají najít, povšimněme si, že se částice m_3 v limitě musí pohybovat nekonečně rychle od m_1, m_2 k m_4, m_5; to nastane, pouze když m_3 startuje libovolně blízko m_1 a m_2, zatímco m_4 a m_5 jsou již těsně u sebe. Tudíž limitní konfigurace je trojitá kolize m_1, m_2, m_3 se současnou dvojitou kolizí m_4, m_5. Hlavní myšlenkou je využít strukturu stabilní a nestabilní variety této násobné kolize takovým způsobem, že alespoň dočasně vybereme množiny počátečních podmínek správného chování bez kolizí. Jednou z možností, jak se vyhnout kolizím, je přiřadit každé dvojici částic nenulový úhlový moment c se znaménkem označujícím, zda dvojice rotuje ve směru či proti směru hodinových ručiček. Jelikož velikost c určuje, jak blízko se mohou částice k sobě přiblížit, každé c se musí blížit k nule pro $t \to t^*$, abychom mohli připustit potřebná, libovolně blízká přiblížení. Pro analýzu těchto rotačních interakcí musí být předchozí (dvojrozměrná a rotace nepřipouštějící) varieta kolizí C o jeden rozměr rozšířena, abychom mohli zahrnout hodnoty c. Skutečný problém tří těles má c jako konstantu pohybu, takže analýza vyžaduje zavést odpovídající proměnnou u popisující směr a rychlost rotace dvojice částic.



Obr. 4. Chování jednoduchého systému.

Abychom osvětlili další krok, začněme s jednoduchým systémem $x' = -x$, $y' = y$, kde řešení na ose x — stabilní varietě — směřuje k počátku, zatímco na ose y — nestabilní varietě — se rychle pohybuje nade všechny meze v kladném anebo záporném směru osy y (viz obrázek 4). Ostatní řešení kombinují toto chování, např. řešení začínající v blízkosti osy x zůstává poblíž této osy a směřuje k počátku až do chvíle, kdy je mu dostatečně blízko. Zde začne převládat odpuzující efekt ve směru y, takže se řešení začne přiklánět k pohybu na ose y. Povšimněme si, že můžeme řídit typ chování; abychom například zajistili, že řešení bude probíhat blízko kladné (a nikoli záporné) osy y, postačí zvolit vhodnou množinu počátečních podmínek takových, aby $y > 0$. (To je znázorněno úsečkou na obrázku 4.) Analýza těsných přiblížení je pouze vícerozměrnou, komplikovanější verzí tohoto jevu, v níž „klín“ odpovídá volbě počátečních podmínek s $y > 0$.

Začněme skutečností, že trojitá kolize definuje rovnovážný bod $x^* \in \mathcal{C}$ s hyperbolickou strukturou. (Bod x^* tedy nahrazuje počátek v našem jednoduchém systému.) Jestliže symbolem Σ označíme množinu počátečních podmínek, které vedou k trojité kolizi, pak Σ definuje stabilní varietu pro $x^* \in \mathcal{C}$. (Varieta Σ představuje osu x v našem jednoduchém systému.) Z inklinačního lemmatu (viz např. Robinson [R], str. 200) a z faktu, že x^* je hyperbolický bod, plyne, že dráha, která začíná blízko množiny Σ, zůstává v její blízkosti, dokud se nepřiblíží k $\mathcal{C}$; pak začne sledovat nestabilní varietu x^*. (Nestabilní varieta je tedy vícerozměrnou analogií osy y.) Poté co málem dojde k trojité kolizi, pohyb se začne podobat dráze z $\mathcal{C}$. Další chování je pak řízeno strukturou drah na $\mathcal{C}$ v blízkosti x^*.

Zajímavá část této struktury pochází z nestabilní variety příslušející x^*. Jeden nestabilní rozměr v $\mathcal{C}$ určuje, zda částice m_3 je po interakci tří těles hnána nahoru či dolů, zatímco druhý odpovídá veličině u popisující směr rotace dvojice částic po těsné interakci. Považujeme-li v těchto nestabilních směrech jisté chování za žádoucí v $\mathcal{C}$ a použijeme-li odpovídající výsledný klín jako cíl, můžeme poblíž Σ stanovit takový klín počátečních podmínek, že řešení budou řízena požadovaným chováním tří částic v $\mathcal{C}$. (V modelovém systému je tento výběr klínu obdobný volbě úsečky z obrázku 4, díky níž řešení sledují spíše kladnou část osy y než její zápornou část.) Podklíny jsou definovány těmi řešeními, která procházejí těsným trojitým přiblížením a která částici m_3 dovolí, aby dospěla k další dvojici částic při zachování všech podmínek potřebných pro opakování cesty. To, co vznikne, je zmíněné prosívání.

Výsledná Cantorova množina počátečních podmínek umožňuje, aby se hodnota $r_{\max}(t)$ přiblížila k nekonečnu v konečném čase a bez předchozích kolizí. Tímto způsobem je definitivně zodpovězena otázka, kterou před stoletím vyslovil Painlevé. A popsaná konstrukce navíc plně využívá několika odlišných myšlenek pocházejících z příspěvků mnoha badatelů na tomto fascinujícím poli matematiky.

I když nyní víme, že nekolizní singularity existují, několik otevřených problémů stále zůstává. Každý, byť jen částečný seznam by měl zahrnovat otázku, zda $n = 5$ je předělem tohoto překvapivého chování, nebo zda i systém čtyř těles může vymrštit částice do nekonečna v konečném čase. Může být například Anosovův návrh uskutečněn? Existují rovinné případy s malými hodnotami n? Jak bylo naznačeno, v důkazu hrají důležitou roli hmotnosti (z podobných důvodů jako velikosti míčů ve fyzikálním experimentu). Existují takové hodnoty hmotností, že se nekolizní singularity nemohou objevit? Počáteční podmínky vedoucí k příkladu Xiaova typu leží v množině nulové Lebesgueovy míry; jsou všechny nekolizní singularity nepravděpodobné? Jak bylo popsáno, konstruování příkladů neohraničených pohybů zahrnuje pečlivé zacházení s těsnými přiblíženími. To dává tušit, že pokud $\mathcal{CO}$ představuje množinu počátečních podmínek, které vedou ke kolizi jakéhokoli typu, pak uzávěr $\mathcal{CO}$ souhlasí s množinou počátečních podmínek, které způsobují singularitu jakéhokoliv typu (včetně pohybu popsaného v [SX]). Je to pravda? (Jeden směr v důkazu rovnosti množin je triviální.) Přesněji, napodobíme-li Painlevéovu otázku, jaká je podstata drah generovaných počátečními podmínkami z uzávěru CO? Jinými slovy (a jako obvykle), Newtonův problém n těles je zdrojem spletitých matematických problémů.[8])

Literatura

[A] D. Anosov: *Smooth dynamical systems. Introductory article.* Amer. Math. Soc. Transl. *125* (1985), 1–20.

[Ch] J. Chazy: *Sur les singularités impossible du problème des n corps.* C. R. Acad. Sci. Paris *170* (1920), 575–577.

[D1] R. Devaney: *Triple collisions in the planar isosceles three-body problem.* Invent. Math. *60* (1980), 249–267.

[D2] R. Devaney: *Singularities in classical mechanical systems.* Basel and Boston, MA, Birkhäuser 1981.

[G] J. Gerver: *The existence of pseudocollisions in the plane.* J. Differential Equations *89* (1991), 1–68.

[L] J. Littlewood: *Some problems in real and complex analysis.* Boston, MA, Heath 1969.

[McG1] R. McGehee: *Von Zeipel's theorem on singularities in celestial mechanics.* Exposition. Math. *4* (1986), 335–345.

[McG2] R. McGehee: *Triple collisions in the collinear three-body problem.* Invent. Math. *29* (1974), 191–227.

[MM] J. Mather, R. McGehee: *Solutions of the collinear four-body problem which become unbounded in finite time.* Lecture Notes Phys. *38* (1975), 573–597.

[Mo1] R. Moekel: *Orbits of the three-body problem which pass infinitely close to triple collision.* Amer. J. Math.

[Mo2] R. Moekel: *Heteroclinic phenomena in the isosceles three-body problem.* SIAM J. Math. Anal. *15* (1984).

[MS] C. Marchal, D. G. Saari: *On the final evolution of the n-body problem.* J. Differential Equations *20* (1976), 150–186.

[Pa] P. Painlevé: *Leçons sur la théorie analytic des équations différentielles.* Paris, Hermann 1897.

[P1] H. Pollard: *A mathematical introduction to celestial mechanics.* Carus Monograph No. 18, Math. Assoc. Amer. (1976).

[P2] H. Pollard: *Gravitational systems.* J. Math. Mech. *17* (1967), 601–612.

[PS1] H. Pollard, D. G. Saari: *Singularities of the n-body problem 1.* Arch. Rational Mech. Math. *30* (1968), 263–269.

[PS2] H. Pollard, D. G. Saari: *Singularities of the n-body problem 2.* Academic Press 1970, 255–259.

[R] C. Robinson: *Dynamical systems.* Boca Raton, FL, CRC Press, Inc., 1995.

[S1] D. G. Saari: *Singularities of the Newtonian n-body problem.* Ph. D. Dissertation, Purdue University 1967.

[S2] D. G. Saari: *Improbability of collisions in Newtonian gravitational systems II.* Trans. Amer. Math. Soc. *181* (1973), 351–368.

[8]) *Poznámka překladatelů:* Obrázek 3b znázorňuje elegantní Xiaovo řešení problému obsaženého v názvu článku. Nezapomínejme ale, že žádné konkrétní těleso se nemůže dostat do nekonečna v konečném čase. Newtonův zákon pouze modeluje realitu našeho světa (a ani Einsteinovy rovnice nepopisují vesmír zcela přesně). Hmotné body jsou jen jakousi idealizací a ve skutečnosti neexistují. Proto k velmi těsným kolizím vlastně nemůže dojít. Modely klasické mechaniky navíc ztrácejí při velkých rychlostech platnost. To ale nic neubírá na kráse nalezeného řešení.

[S3] D. G. SAARI: *Singularities and collisions of Newtonian gravitational systems.* Arch. Rational Mech. Math. *49* (1973), 311–320.

[S4] D. G. SAARI: *A global existence theorem for the four-body problem of Newtonian mechanics.* J. Differential Equations *26* (1977), 80–111.

[Se] C. L. SIEGEL: *Der Dreierstoss.* Ann. of Math. *42* (1941), 127–168.

[Si] C. SIMÓ: *Analysis of triple-collision in the isosceles problem.* New York, Marcel Dekker 1980.

[Sp] H. J. SPERLING: *On the real singularities of the n-body problem.* J. Reine Angew. Math. *245* (1970), 15–40.

[Su] K. SUNDMAN: *Le problème des trois corps.* Acta Soc. Sci. Fenn. *35* (1909).

[SX] D. G. SAARI, Z. XIA: *Oscillatory and superhyperbolic solutions in Newtonian systems.* J. Differential Equations *82* (1989), 342–355.

[VZ] H. VON ZEIPEL: *Sur les singularités du problème des n corps.* Ark. Mat. Astronom. Fys. *4* (1904).

[W] A. WINTNER: *The analytical foundations of celestial mechanics.* Princeton, NJ, Princeton University Press 1947.

[X1] Z. XIA: *The existence of non-collision singularities in Newtonian systems.* Ph. D. Dissertation, Northwestern University 1988.

[X2] Z. XIA: *The existence of non-collision singularities in Newtonian systems.* Ann. of Math. *135* (1992), 411–468.

Přínos Bohumila Kučery k elektrochemii

Michael Heyrovský, Praha

V posledních desetiletích 19. století se řada vynikajících fyziků zabývala problémy nikoli čistě fyzikálními (jako např. vlastnostmi roztoků nebo fázových rozhraní), k jejichž uspokojivému řešení byly nezbytné znalosti chemie, kterých bylo dosaženo až o několik desetiletí později. S postupem času se tyto problémy stávaly předmětem bádání nově vznikajícího oboru — fyzikální chemie, zatímco od počátku 20. století se zájem fyziků stále více soustřeďoval na nové převratné objevy, které předznamenaly další vývoj přírodovědy. A právě do tohoto přechodného období spadá vědecká činnost českého experimentálního fyzika Bohumila Kučery.

Po studiu na Karlově univerzitě a na technice v Curychu přišel Bohumil Kučera v r. 1900 na fyzikální ústav techniky v Darmstadtu. V tomto ústavu, vedeném profesorem K. Scheringem, měl na Kučerovo odborné zaměření rozhodující vliv jeho o 4 roky starší kolega Karl Forch, který byl v té době na ústavu zaměstnán jako soukromý docent. Společně s Forchem podnikl Kučera krátký výzkum indexu lomu některých

Dr. MICHAEL HEYROVSKÝ, CSc. (1932), Ústav fyzikální chemie AV ČR, Dolejškova 3, 182 23 Praha 8.