Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jan Vyšín

Přehlídka soutěžních úloh matematické olympiády

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 21 (1976), No. 3, 162--168

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139713

vyučování

Přehlídka soutěžních úloh matematické olympiády

Jan Vyšín, Praha

V příloze k 5. číslu ročníku 1975 upozornil náš časopis na pětadvacetileté trvání celostátní matematické olympiády v ČSSR. Jednota čs. matematiků a fyziků se může právem považovat za pramáti matematických studentských soutěží u nás; úlohy, které uveřejňovala a uveřejňuje ve svých časopisech, měly dosti široký okruh řešitelů, což dobře vědí hlavně příslušníci starších matematických generací. I když tehdejší „soutěž" neměla pevný organizační řád, přispěla vydatně k zvýšení zájmu o matematiku a k rozvíjení matematických talentů.

Když byla u nás v r. 1951 založena celostátní matematická olympiáda (MO) po vzoru národních olympiád moskevské, polské, maďarské a rumunské, stala se soutěží oficiální s pevným organizačním řádem. Každý její ročník byl sice vyhlašován ministerstvem školství (později oběma ministerstvy školství), ale Jednota figurovala mezi spolupořadateli a nevzdala se péče hlavně o odbornou stránku soutěže. Nechceme však na tomto místě mluvit o pořádání přednášek a seminářů pro účastníky MO, ani o účasti Jednoty na jiných pomocných akcích MO; chceme se soustředit na problém soutěžních úloh — nejzákladnější problém soutěže — a připomenout pomoc, kterou Jednota poskytla v tomto směru vedení MO.

Při příležitosti 25. výročí MO bychom měli uspořádat pro matematické zájemce výstavku či raději přehlídku soutěžních úloh olympiády domácí i olympiád mezinárodních a měli bychom ukázat některé exponáty nebo snad lépe řečeno modely, které se během uplynulých 25 let objevily na scéně.

Ale taková výstavka tu vlastně už je, i když není honosně instalována a je skromně ukryta v ročníkových brožurách, resp. ve výborech soutěžních úloh. Jsou tu 23 ročníkové brožury a tři svazky výborů (kategorie Z, kategorií B, C a kategorie A). Projděme zběžně touto neinstalovanou výstavkou a všimněme si zajímavějších exponátů. (Stále se mi vtírá terminologie obvyklá na přehlídkách, např. módních: asi bychom měli mluvit spíše o modelech než o exponátech, neboť nejde o neživé objekty muzeální povahy, ale o živý modelový materiál, který můžeme stále využívat při různých seminářích a soustředěních, a mohou jej využívat i účastníci MO při soukromém studiu.)

Tak tedy: Soutěžní úlohy a některé zprávy o MO bývaly uveřejňovány jednak v oficiálním metodickém časopise ministerstva školství (MŠ) *Matematika ve škole* (nyní *Matematika a fyzika ve škole*), jednak v studentském časopise Jednoty — v *Rozhledech matematicko-fyzikálních*. Začneme chronologicky, rokem 1951. V lednu 1951 vyšel v 5. čísle I. ročníku časopisu *Matematika ve škole* (MvŠ) článek dr. A. HYŠKY o matematické soutěži v Olomouckém kraji — jakési „předolympiádě".

V listopadu téhož roku byla ve 3. čísle II. ročníku MvŠ soutěž vyhlášena; byl tu uveřejněn její organizační řád[1]) (celá republika byla rozdělena do 8 oblastí) a byly

---

[1]) Soutěž měla tehdy jen dvě kategorie: kategorii A pro 3. a 4. ročník středních škol a kategorii B pro 1. a 2. ročník těchto škol; kategorie Z tehdy nebyla. Kategorie A měla 3 kola, kategorie B měla 2 kola. S povzdechem vzpomínáme na tuto jednoduchou organizaci.

tu otištěny čtyři ukázkové úlohy i s řešeními, dvě jednodušší a dvě složitější. Zajímavá je tematika těchto čtyř úloh: je to číselná teorie, kombinatorická geometrie (!), konstrukční geometrie a početní geometrie (problém brachystochrony).

Úvodní informace je podepsána šifrou Red, nikoli pozdějším RZ (RUDOLF ZELINKA), jak obvykle podobná sdělení označoval první jednatel ústředního výboru MO (ÚVMO).

V prvním kole 1. ročníku MO se objevila úloha A-I-8,[2]) jejímž autorem byl – jak zde prozrazujeme – profesor KNICHAL. Ta se stala svým způsobem legendární. Text úlohy zněl:

Soustava čtverců má tuto vlastnost:

- Jeden vrchol každého čtverce leží na přímce p, druhý na přímce q, třetí na přímce r.
- Dokažte, že čtvrté vrcholy čtverců soustavy leží také na přímce.
- Užitím předchozího výsledku sestrojte čtverec $ABCD$, jehož vrchol A leží na dané přímce a, vrchol B na dané přímce b, vrchol C na dané přímce c a vrchol D na dané přímce d.
- Diskuse.

Úloha byla zadána, aniž se předem vypracovalo její podrobné řešení. Když na to došlo, zjistilo se, že úplné řešení středoškolskými prostředky není tak jednoduché, jak se zdálo na první pohled, a několik pracovníků Matematického ústavu ČSAV (tehdejšího Ústředního ústavu matematického) se pokusilo sestavit školské řešení, které najdete na 6 stranách ročníkové brožury; obsahuje dvě pomocné věty, a dvě pomocné úlohy, z nichž jedna je značně členitá a složitá.

Z této pseudokomické situace vytěžil ÚVMO mravní naučení, že nelze zadat žádnou úlohu do soutěže, pokud autor nevypracoval její podrobné řešení; tato zásada se od těch dob přísně dodržuje.

Ale tato úloha A-I-8 měla ještě pozdější dozvuky. *Časopis pro pěstování matematiky* otiskl ve svém *84.* ročníku (1959) článek známého slovenského pracovníka dr. PAVLA BARTOŠE[3]) o lineárních soustavách přímých podobností v rovině; autor tu studuje pomocí aparátu komplexních čísel (souřadnic) jisté lineární soustavy přímých podobností v rovině. Jde o podobnosti, které převádějí n daných bodů $B_1, \ldots, B_n$ v body ležící na n daných přímkách $p_1, \ldots, p_n$. Vypracovává se jakási „miniteorie" těchto soustav a z ní vyplývá řešení úlohy A-I-8 jako evidentní důsledek (příklad 5 v citovaném článku).

Také tato skutečnost v sobě skrývá mravní naučení: příliš komplikované řešení některé úlohy nás upozorňuje, že pravděpodobně děláme „skok": v našem případě jsme přeskočili celou zmíněnou „miniteorii". Takové úlohy se ovšem pro soutěž MO nehodí.

Své osudy mají tedy nejen knihy, ale i úlohy matematické olympiády.

Od samého začátku MO se pěstovala tematika geometrických zobrazení a jejich skládání; tak v prvním ročníku se vyskytly např. tyto úlohy:

- V rovině ϱ jsou dány dva body A, B a dva duté úhly α, β. Bod X roviny ϱ otočíme jednak kolem středu A o úhel α v daném smyslu do polohy X', jednak kolem středu B o úhel β v daném smyslu (stejném nebo opačném) do polohy X''. Co vyplní

---

[2]) V prvním kole se tehdy zadávalo v každé kategorii 16 úloh; od těch dob byl studijní charakter prvního kola značně zeslaben.

[3]) JAN VYŠÍN tu figuruje jen jako upravovatel článku.

všecky ty body X, pro něž má úsečka $X'X''$ danou velikost $d > 0$?

• Dokažte, že obrazec souměrný podle dvou různých středů není ohraničený (pro kategorii B).

Později jsme od tematiky geometrických zobrazení značně upustili – asi ke škodě věci.

Tematická návaznost úloh mezi jednotlivými koly byla asi v počátku menší, než je nyní, ale zato se bedlivěji sledovala únosnost úloh pro jednotlivé kategorie (od 3. ročníku měla olympiáda čtyři kategorie A, B, C, D). Naproti tomu jsme se nebáli – zejména ve vyšších kategoriích – zadávat úlohy např. z číselné teorie, které dosti výrazně přesahovaly středoškolskou látku, kde se vyskytovala tematika zbytkových tříd, pozičních soustav, tzv. geometrická teorie čísel aj. Několik ukázek z 1., 2. a 4. ročníku soutěže:[4])

• Určete všecka přirozená čísla n, pro která je číslo

$$\frac{n - 37}{n + 43}$$

druhou mocninou přirozeného čísla (roč. 1951/52). Úloha má 8 řešení.

• Určete všecka přirozená čísla n, pro které je číslo

$$2^{12n+8} - 3^{6n+2}$$

dělitelné číslem 13 (roč. 1952/53).

• Dokažte, že neexistuje čtverec, jehož všechny čtyři vrcholy leží v mřížových bodech sítě shodných rovnostranných trojúhelníků (roč. 1951/52).

[4]) Upozorňujeme, že znění textů úloh není doslovné; někde jsme provedli menší úpravy.

• Obdélník, jehož délky stran jsou přirozená čísla a, b, je rozdělen v ab jednotkových čtverců. Zjistěte vnitřkem kolika čtverců prochází úhlopříčka obdélníka. (Je třeba nejprve řešit případ, kdy čísla a, b jsou nesoudělná) – ročník 1951/52.

• Určete počet trojúhelníků, které mají tyto vlastnosti:

(1) Velikosti všech stran těchto trojúhelníků jsou přirozená čísla.

(2) Velikost každé strany těchto trojúhelníků je nejvýše rovna danému přirozenému číslu n (roč. 1954/55).

Chceme-li hovořit frazeologií módní přehlídky, objevují se v prvním desítiletí olympiády většinou velmi solidní, umírněné a osvědčené modely tradičního vkusu, vhodné i do „štrapáce“, které se líbily a splnily své poslání. Posuďte sami:

• Určete všecka reálná řešení rovnice

$$x + \sqrt{(2p - x^2)} = 8$$

o neznámé x, s parametrem p. Proveďte diskusi vzhledem k parametru p (roč. 1957/58).

• Je dána reálná funkce

$$y = \sqrt{(x - 2\sqrt{(x - 1)})} - \\ - \sqrt{(x + 2\sqrt{(x - 1)})}\,.$$

Určete její maximální definiční obor a nakreslete její graf (roč. 1959/60).

• Je dána funkce

$$y = \sqrt{\left(1 - \frac{x}{4}|x| + \sqrt{\left(1 - \frac{x}{2}|x|\right)}\right)} - \\ - \sqrt{\left(1 - \frac{x}{4}|x| - \sqrt{\left(1 - \frac{x}{2}|x|\right)}\right)}\,.$$

Určete její maximální definiční obor a nakreslete její graf (roč. 1959/60).

• Vypočtěte tisící člen posloupnosti

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ...

(roč. 1960/61 – úloha A-III-1).

• Nechť čtyřstěn $ABCD$ má za všechny své stěny pravoúhlé trojúhelníky. Dokažte, že

(a) tento čtyřstěn má jedinou největší hranu;

(b) střed kulové plochy opsané čtyřstěnu je středem jeho nejdelší hrany;

(c) lze sestrojit kvádr tak, že čtyři z jeho vrcholů leží v bodech A, B, C, D (roč. 1956/57 – úloha A-I-3).

• Je dána funkce

$$y = \frac{px}{x^2 + p^2 + 1},$$

kde x je proměnná, p je reálný parametr.

(a) Dokažte, že pro všecka reálná x, p je $|y| < \frac{1}{2}$.

(b) Zvolte parametr p tak, aby bylo $\max y = \frac{1}{4}$.

Nakreslete graf funkce.

Jak je patrné z předchozích ukázek, pěstovala se střízlivá funkční teorie (vyskytovaly se tu i funkce s odmocninami a absolutními hodnotami), rovnice a nerovnice s parametry a vydatné diskuse. Zvláštní postavení v naší olympiádě měla stereometrie – úlohy byly zpravidla metrické, ale nikoli s výpočty objemů a povrchů. Když se zrodila z podnětu prof. Tiberiu Romana v r. 1959 první mezinárodní matematická olympiáda v Rumunsku (zprávu o ní najdeme v osmé ročníkové brožuře), stalo se Československo takřka monopolním dodavatelem stereometrických úloh; bylo to jistě hlavně zásluhou profesora M. Fiedlera, který ze své vědecké práce o simplexech čerpal duchaplné náměty pro úlohy o čtyřstěnu.

Posuďte sami rostoucí úroveň stereometrických úloh, které Československo předložilo na mezinárodních olympiádách a které byly přijaty:

• Jsou dány dvě různoběžné roviny ϱ, σ o průsečnici p. V rovině ϱ je dán bod A, v rovině σ bod C, přičemž žádný z bodů A, C neleží na přímce p. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ (kde $AB \parallel CD$), jemuž lze vepsat kružnici a jehož vrcholy B, D leží po řadě v rovinách ϱ, σ (1959).

• Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$.

(a) Určete geometrické místo středů úseček XY, kde X je bod úsečky AC, Y bod úsečky $B'D'$.

(b) Určete geometrické místo bodů Z, které leží uvnitř úsečky XY a o nichž platí $ZY = 2.XZ$ (1960).

• Má-li jediná hrana čtyřstěnu délku větší než 1, pak je jeho objem roven nejvýše $\frac{1}{8}$; dokažte (1967).

• Bod O leží na přímce l, $\overrightarrow{OP}_1, \ldots, \overrightarrow{OP}_n$ jsou takové jednotkové vektory, že body P_i leží ve vnitřku téže poloroviny s hranicí l. Dokažte, že pro každé liché číslo n platí

$$|\overrightarrow{OP}_1 + \ldots + \overrightarrow{OP}_n| \geqq 1\,;$$

přitom $|\overrightarrow{AB}|$ značí velikost vektoru $\overrightarrow{AB}$ (1973).

Zůstaňme ještě na chvíli u mezinárodních olympiád.

V roce 1970 se konala XII. MMO v Maďarsku. Mezinárodní jury přijala československou úlohu, navrženou doc. dr. M. Hejným; její text zní:

• Určete všechna přirozená čísla n, která mají tuto vlastnost: množinu $M = \{n, n+1, \ldots, n+5\}$ lze rozložit ve dvě disjunktní neprázdné podmnožiny tak, že součiny všech prvků obou těchto množin jsou si rovny.

Úloha je neřešitelná, ale zvedla i na olympiádě i doma mezi pracovníky ve školské matematice „vlnu tvořivosti“ v sestavování různých variant i analogií.

Až dosud jsme hovořili hlavně o nejvyšší kategorii A. Jak jsme se však už zmínili, má MO (s malým přerušením) čtyři kategorie A, B, C, Z (dříve A, B, C, D). Úlohy kategorie Z a částečně i C představují na naší přehlídce „dětské šatečky“. Matematické prostředky účastníků těchto kategorií jsou velmi skrovné a tak soutěžní úlohy jsou často matematické úlohy bez „matematiky“. Připouští se – dokonce se vyžaduje experimentování, použití takových pomůcek, jako je strom všech logických možností, jako jsou Vennovy diagramy, které postupně vytlačují dřívější náměty úloh na procenta, zlomky apod.

Úloha staršího druhu (D-I-2, roč. 1953/54):

● V prodejně měli ráno určitý počet bochníků chleba. Závodní kuchyně odkoupila $\frac{3}{4}$ zásoby a $\frac{1}{4}$ bochníku. Sousední uzenářství odkoupilo $\frac{3}{4}$ nového zbytku a $\frac{1}{4}$ bochníku. Drobní spotřebitelé odkoupili $\frac{3}{4}$ ze zbytku a $\frac{1}{4}$ bochníku a zásoba byla vyčerpána.

(a) Kolik bochníků chleba měli původně v prodejně?

(b) Vysvětlete, jak je možné, že nemusili žádný bochník rozkrajovat.

Dosti atraktivní byly úlohy s „opravováním chyb“. Jedna úloha tohoto typu je C-II-3, roč. 1962/63:

● Žák měl vypočítat aritmetický průměr čtyř daných čísel a, b, c, d. Počítal jej takto: určil nejdříve aritmetický průměr p čísel a, b, pak aritmetický průměr q čísel c, p a konečně aritmetický průměr r čísel d, q. Číslo r pokládal za výsledek.

a) Ukažte, že postup, kterého žák použil, není správný.

b) Jestliže však číslo r bylo přesto správným výsledkem, splňovala čísla a, b, c, d nutně určitý vztah; najděte jej.

Mezi úlohy pro nejnižší kategorii, které měly určitý švih, patří např. tyto úlohy:

● Napište do řádky lichý počet přirozených čísel od 1 počínaje, např. 1,2, ...,43. Tatáž čísla napište v libovolném uspořádání pod čísla v prvním řádku a utvořte nezáporné rozdíly dvojic čísel stojících nad sebou. Dokažte *bez výpočtu*, že součin těchto rozdílů je číslo sudé.

● Krychle je rozdělena na 125 shodných krychliček; „vyrazíme“ v krychli tři „kanály“ po dvou k sobě kolmé, které mají jednu krychličku společnou. Zbývající těleso složené z $125 - 13 = 112$ krychliček ponoříme do barvy a pak rozebereme na krychličky. Určete, kolik z těchto dílčích krychliček bude mít n barevných stěn ($n = 0, 1, 2, \dots, 6$).

V kategorii Z se vyskytovalo nejvíce úloh, které měly kontakt s realitou a které se daly řešit za pomoci modelů. Však také byla v r. 1956 uspořádána na Vysoké škole pedagogické výstavka o MO, kde mimo jiné modely byla instalována i krychle z uvedené úlohy.

I ve vyšších kategoriích postupně nabývaly správné rovnováhy úlohy spíše rutinní a úlohy vyžadující jistou invenci nebo systematické vyšetřování. Za všechny úlohy těchto typů uveďme dva příklady:

● Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x - py + p^2 z &= 1\,, \\ -p^3 x + y - pz &= 1\,, \\ p^2 x - p^3 y + z &= 1 \end{aligned}$$

s neznámými x, y, z a parametrem p. Proveďte diskusi vzhledem k parametru p (C-II-3, roč. 1961/62).

• V rovině leží čtyři body. Pět z jejich šesti vzájemných vzdáleností jsou čísla 1, 2, 3, 4, 5. Načrtněte všechny možné případy a vyložte jejich odvození (B-I-5, roč. 1962/63 – úloha má 12 řešení).

V historii tvorby a využití soutěžních úloh pro MO jsou dvě důležité události: Založení konkursu JČSMF (nyní též JSMF) na olympiádní úlohy r. 1966; je to konkurs, kterým za uplynulých deset let prošlo více než 1000 úloh a jehož význam se ještě zvýší, podaří-li se s pomocí JČSMF realizovat dokumentaci soutěžních i cvičných úloh. Druhou událostí je zavedení metodických komentářů pro učitele; tyto komentáře, které jsou snad přece jen něčím víc než pouhým řešením úlohy a které dostávají učitelé prakticky současně se zadáním přípravných i soutěžních úloh I. kola, se původně (v roce 1970) vypracovávaly jen pro kategorii Z, nyní jsou k dispozici pro všecky čtyři kategorie. Snaží se pro jednotlivé úlohy konkrétně zodpovědět věčnou polyaovskou otázku: „Jak na to?“, tj., jak pomoci žákům při řešení, aniž jim vlastní řešení prozradíme.

Ale vraťme se znovu k naší přehlídce. Postupné modernizování výuky matematice na gymnáziích si vynucuje, aby se modernizovala i tematika soutěžních úloh MO. V duchu těchto zásad:

• Modernizace vyučování není jen zavedení množinově logického jazyka.

• Tradiční a modernizovaná matematika nejsou v rozporu, ale tvoří jediný organický celek.

Proto se zpestřuje tematika úloh prvky kombinatorické geometrie, strukturami, grafy (schéma „strom“), schodovými funkcemi, funkcí sgn a jinými nespojitými funkcemi, náměty topologického rázu, analytickou geometrií s komplexní souřadnicí a ovšem i množinovými operacemi v potenční množině se znázorněním Vennovými diagramy. Tak se dostala do MO v posledních ročnících např. i Jaccardova vzdálenost konečných množin (tj. vlastně model metrického prostoru), ale i jednoduché úlohy o sjednocení a průniku několika množin s tematikou „dopravní síť“ nebo „nákupy v obchodním domě“. Nedostatek místa nám nedovoluje ani vzorově uvádět texty takových úloh; ostatně tkví asi ještě dost v paměti našich čtenářů – učitelů, neboť probíhaly olympiádou nedávno.

Mnohokrát bylo řečeno – a při přehlídce soutěžních úloh si to uvědomujeme znovu – že matematická olympiáda stojí a padá prací učitelů. Asi proto se zrodila myšlenka uspořádat jako doplněk k metodickým komentářům metodickou soutěž pro učitele. Tato soutěž, nazvaná matematická metaolympiáda, probíhala v našem časopise po tři roky. Jejích 36 úloh mělo převážně charakter a úroveň úloh MMO. Úkolem nebylo jen úlohu rozřešit, ale hlavně vypracovat k ní metodický komentář. Bohužel metaolympiáda selhala úplně, a to jak pro nedostatek zájemců, tak nepochopením vlastního úkolu; proto se soutěž zastavila a ani řešení úloh se nemohla rozmnožit a rozeslat těm několika jejím řešitelům.

Nechceme z této situace vyvozovat žádné zarmucující závěry a chceme se spokojit s vysvětlením, že to byl nedostatek času, který způsobil zánik metaolympiády. Snad bychom měli zakončit naši přehlídku veseleji uvedením aspoň jedné úlohy metaolympiády s tradiční tematikou a stručným řešením a přenechat čtenářům k přemýšlení, v kterých místech by pomohly řešitelům impulsy a jaké by tyto impulsy měly být.

• Snadno ověříme, že platí $8^3 - 7^3 = 13^2$ a $13 = 2^2 + 3^2$. S použitím samočinných počítačů objevíme i jiné obdobné dvojice vztahů, např. $105^3 - 104^3 = 181^2$,

$181 = 9^2 + 10^2$. V obou uvedených případech je rozdíl třetích mocnin dvou bezprostředně po sobě následujících přirozených čísel roven druhé mocnině přirozeného čísla a toto přirozené číslo je součtem druhých mocnin dvou bezprostředně po sobě následujících přirozených čísel. Je druhý vztah důsledkem prvního? Čili platí následující implikace

$$(\forall x, y)\,(x+1)^3 - x^3 = y^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists z) y = z^2 + (z+1)^2\ ?$$

Nástin řešení. Předpokládanou rovnost upravíme na tvar

$$3(2x+1)^2 = (2y+1)(2y-1)\,.$$

Čísla $2y-1$, $2y+1$ jsou dvě bezprostředně po sobě následující lichá čísla, proto jsou nesoudělná. Platí tedy buď (1) nebo (2):

$$(1)\quad 2y+1 = 3u^2\,,\quad 2y-1 = v^2\,,$$

$$(2)\quad 2y+1 = u^2\,,\quad 2y-1 = 3v^2\,,$$

kde u, v jsou vhodná přirozená čísla. Případ (2) však nemůže nastat; z rovnic (2) totiž dostaneme $u^2 - 3v^2 = 2$, a protože u, v jsou lichá čísla, je $u^2 = 8\lambda + 1$, $v^2 = 8\mu + 1$, tj. $8(\lambda - 3\mu) = 4$, což je nemožné.

Z (1) plyne

$$4y = 3u^2 + v^2\,,\quad 3u^2 - v^2 = 2\,,$$

tj.

$$4y = 2v^2 + 2,$$

$$y = \left(\frac{v-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{v+1}{2}\right)^2.$$

Úloha je jedním z nepoužitých anglických návrhů na mezinárodní matematickou olympiádu a je důkazem, že teorie čísel nám nabízí i dnes vynikající modely.

Naše přehlídka olympiádních úloh ukazuje, že v budoucnosti soutěže bude třeba ledacos změnit a zlepšit. Chybějí nám v soutěži úlohy s reálnou náplní, úlohy z tzv. aplikací školské matematiky; pravděpodobně by se tu měly vyskytovat — zejména v prvním, studijním kole, kde účastník není vázán časem — i tzv. problémové situace, které lépe odpovídají tomu, jak nám svět a život problémy předkládá: nikoli izolované, ale v komplexech, z nichž musíme matematické úlohy teprve „vypreparovat". Olympiáda by se asi také měla více opírat o přístupnou studijní literaturu, měla by více podněcovat experimentování, vyslovování, dokazování, popř. vyvracení hypotéz, měla by si více všímat moderní tematiky (např. pravděpodobnosti) apod.

Jak je vidět, čeká na příští tvůrce soutěžních i cvičných úloh práce dost; přejeme jim i jejich hlavním patronům — oběma Jednotám, aby se jim tato práce ku prospěchu naší společnosti dobře dařila.

Přesnost je pro matematiku důležitá, ale je-li pouze memorována bez porozumění a motivace, je zbytečná. Sterilní přesnost nepřidává chuti ke studiu a pro mysl mladých lidí není o nic výživnější než díry v těstě koblihy.

S. Willoughby

Podle mého názoru je ideálním učitelem matematiky ten, na kterého budou jeho žáci vzpomínat po celý život, protože vložil do jejich srdcí zvědavost — ten posvátný Prometheův oheň podněcující lidstvo k stálému pokroku.

G. V. Gnedenko
