Ján Čižmár

O pätnástom Hilbertovom probléme

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 19 (1974), No. 3, 141–145

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139693

Hilbertovy problémy

O pätnástom Hilbertovom probléme

Ján Čižmár, Bratislava

Pätnásty problém zo série dvadsiatich troch problémov prednesených Hilbertom 8. augusta 1900 na II. medzinárodnom kongrese matematikov na spoločnom zasadaní 5. a 6. sekcie je v poradí druhý z troch problémov týkajúcich sa algebraickej geometrie. Znie ([1]): „Presné vybudovanie základov Schubertovej „vyčísliteľnej" geometrie. — Problém spočíva v tom, aby sa na precízny základ postavili — s vymedzením hraníc použiteľnosti — tie geometrické čísla, ktoré ako prvý definoval SCHUBERT na základe tzv. princípov špeciálnej polohy alebo zachovania počtu v kalkule ním vytvorenom.

Hoci moderná algebra v zásade zaručuje realizáciu procesu eliminácie, pre dôkaz zákonov vyčísliteľnej geometrie treba oveľa viac, totiž je potrebné urobiť elimináciu v prípade, keď rovnice sú skonštruované tak, že vopred je daný stupeň záverečných rovníc a násobnosť ich koreňov."

Ako vidno z formulácie pätnásteho problému, úloha nespočíva v získaní kladnej alebo zápornej odpovede na konkrétnu otázku. Úlohu je nájsť — podľa možnosti v hraniciach algebraickej geometrie — technické prostriedky, pomocou ktorých by bolo možné Schubertov kalkul pozbaviť istej vágnosti zapríčinenej okolnosťou, že základné pojmy a operácie kalkulu neboli upresnené dostatočne formalizovaným systémom. Nedostatky Schubertovho kalkulu sú z historického hľadiska bezvýhradne pochopiteľné ([2]). Z toho hľadiska je takisto zrejmé, že riešenie pätnásteho problému sotva kedy bude možné pokladať za uzavreté: úroveň riešenia historicky závisí a bude závisieť od stupňa vývoja algebraickej geometrie, ako sa to v ďalšom texte ukáže na konkrétnych prípadoch.

Podstata Schubertovho kalkulu je stručne v nasledujúcom ([3]): Nech je daná regulárna n-rozmerná algebraická varieta M_n obsahujúca ako prvky geometrické objekty ľubovoľnej povahy a parametrizovateľná nejakou varietou projektívneho priestoru, t.j. množinu všetkých prvkov variety M_n možno bijektívne zobraziť na množinu všetkých bodov nejakej variety v projektívnom priestore. k-násobnou (algebraickou) podmienkou predpísanou pre prvky variety M_n nazýva Schubert podmienku definujúcu $(n-k)$-rozmernú podvarietu V_{n-k} variety M_n, pričom prvky variety V_{n-k} spĺňajú práve uvedenú

k-násobnú podmienku. Každá k-násobná podmienka sa označí symbolom, napr. U, V, W atď. Symbolická rovnica medzi k-násobnými podmienkami, napr.

$$U = V + 1/2W\,, \tag{1}$$

znamená: každá „všeobecná“ k-rozmerná podvarieta V_k variety M_n má s $(n\text{-}k)$-rozmernými podvarietami variety M_n definovanými podmienkami U, V, W spoločné také počty prvkov, že tieto počty dosadené do rovnice (1) dávajú identitu. Zavedením označenia $\chi(U, V_k)$, $\chi(V, V_k)$, $\chi(W, V_k)$ pre počty spoločných prvkov variety V_k po poriadku s varietami U, V, W možno rovnicu (1) prepísať do tvaru

$$\chi(U, V_k) = \chi(V, V_k) + 1/2\chi(W, V_k)\,, \tag{2}$$

ktorý je algebraickou rovnosťou.

Je zrejmé, že symbolické rovnice tvaru (1) možno sčítavať, odčítavať, násobiť racionálnym číslom a — ako sa dá pri istom rozšírení významu symbolu $\chi(U, V_k)$ aj na podvariety iného rozmeru ako k ukázať — aj násobiť h-násobnou podmienkou H, teda napr.

$$U\,.\,H = V\,.\,H + 1/2W\,.\,H\,.$$

Takéto násobenie možno potom rozšíriť na násobenie symbolických rovníc. Sčítanie i násobenie je asociatívne a komutatívne a spolu sú viazané distributívnym zákonom.

To sú v stručnosti základné črty Schubertovho „podmienkového“ kalkulu.

Vo vývoji algebraickej geometrie od Schubertových čias sa oddelili a jasne formulovali otázky, ktoré v predchádzajúcej formulácii sú zmiešané a nie sú dostatočne zreteľne výrazné. Je to po prvé otázka spresnenia pojmu „geometrický objekt“, na ktorý je Schubertov kalkul aplikovateľný. Po druhé je to problém parametrizácie takéhoto objektu varietou projektívneho priestoru. Nakoniec je te to problém exaktného vybudovania „teórie priesekov“, vedúcej v najjednoduchšom prípade k určeniu čísel $\chi(U, V_k), \ldots$ v rovnici (2). V súhrne tieto tri problémy predstavujú problém kompletného exaktného vybudovania teórie algebraických variet.

Geometrickými objektami algebraickej geometrie v jej vývoji v hrubých rysoch postupne boli:

a) Algebraické variety nad poľom komplexných čísel („klasický prípad“)

b) Algebraické variety nad ľubovoľným poľom (algebraické variety napr. vo Weilovom zmysle ([4]))

c) Schémy v Grothendieckovom zmysle ([5])*)

(V prípade c) pre zachovanie klasických vlastností algebraických variet v zmysle a) a b) treba sa obmedziť len na niektoré triedy schém.)

Každá zo skupín a) — c) predstavuje v jazyku dnešnej algebry kategóriu. Všimnime si, ako sa v jednotlivých kategóriách riešia problémy parametrizácie a teórie priesekov.

S jedným z najjednoduchších príkladov, v ktorom sa vyskytnú oba tieto problémy, sa stretneme pri skúmaní podmienok, ktorými je určená nadplocha stupňa m v n-roz-

*) Vysvetlenie pojmov a) — c), ako aj niektorých ďalších čo len v najnutnejšom rozsahu by vyžadovalo sériu rozsiahlych samostatných informácií, ktoré v tomto článku nie je možné podať.

mernom projektívnom priestore P^n nad poľom k. Takáto nadplocha je určená formou F stupňa m v $(n + 1)$ neurčitých a obsahuje $\binom{n+m}{n}$ koeficientov z poľa k. Koeficienty formy v pevnom (napr. lexikografickom) usporiadaní možno považovať za bod projektívneho priestoru $P^{n,m}$, kde $(n, m) = \binom{n+m}{n} - 1$. (Ekvivalentne možno Veroneseho zobrazením ([6]) priradiť rovnici nadplochy rovnicu nadroviny v $P^{n,m}$.) Podmienka, aby nadplocha prechádzala daným bodom v P^n, sa vyjadrí homogénnou algebraickou rovnicou medzi koeficientmi formy F chápanými ako súradnice bodu v $P^{n,m}$, čo znamená, že obraz nadplochy – bod v $P^{n,m}$ – je bod istej algebraickej variety v $P^{n,m}$. Podmienka, aby nadplocha obsahovala súčasne dva rôzne body, resp. aspoň jeden z dvoch rôznych bodov, sa vyjadrí incidenciou bodu, ktorý je obrazom nadplochy, s priesekom, resp. zjednotením istých dvoch algebraických variet v $P^{n,m}$.

Ako ukazuje tento príklad, pri riešení problému parametrizácie algebraických variet projektívneho priestoru P^n nad ľubovoľným poľom k (a toto riešenie zahrňuje aj parametrizáciu algebraických variet kategórie a)) treba brať do úvahy stupeň (rád) variety (definícia stupňa napr. v [7]). Druhým diskrétnym invariantom determinujúcim parametrizáciu je rozmer variety (definícia napr. ([7], str. 30). Ďalej, ak je forma F, určujúca v uvedenom príklade nadplochu, rozložiteľná a jej rozklad má tvar $F = F_1^{d_1} \dots F_r^{d_r}$, kde F_i sú ireducibilné formy, treba ireducibilné nadplochy určené formami $F_1, \dots, F_r$ brať nielen ako jednoduché množiny bodov, ale treba ich brať do úvahy s „násobnosťami" $d_1, \dots, d_r$, aby celkový stupeň zjednotenia ireducibilných variet včítane „násobností" sa rovnal stupňu nadplochy. Takto sa prichádza k pojmu cyklu ([8]): cyklus v P^n je prvok voľnej Abelovej grupy generovanej všetkými ireducibilnými algebraickými podvarietami priestoru P^n; má tvar $\sum n_i C_i$, kde C_i sú ireducibilné variety a temer všetky $n_i = 0$. Cyklus sa nazýva efektívnym, ak všetky (celočíselné) koeficienty n_i sú nezáporné a aspoň jeden z koeficientov je kladný; cyklus sa nazýva homogénny, ak všetky v ňom zastúpené generátory (generátory násobené nenulovým koeficientom) majú ten istý rozmer. Rozmer a stupeň cyklu sú definované zrejmým spôsobom: rozmer cyklu sa rovná maximu rozmerov generátorov C_i v cykle zastúpených s nenulovými koeficientami a stupeň sa rovná $\sum n_i \,.\, \mathrm{stup}\ C_i$. Parametrizácia homogénnych cyklov daného rozmeru a daného stupňa sa robí konštrukciou, ktorá pochádza od CHOWA a VAN DER WAERDENA: k danému cyklu sa zostrojí asociovaná forma (iné názvy: adjungovaná, Cayleyho, Chowova, „zugeordnete Form"), ktorej koeficienty v pevnom poradí sú súradnicami bodu (Chowove súradnice cyklu) v priestore parametrov (Chowova varieta) ([9] alebo [7], str. 40). Efektívny výpočet asociovanej formy aj v najjednoduchších prípadoch predstavuje značne zložitý výkon.

V teórii schém úlohu cyklov projektívneho priestoru P^n preberajú uzavreté podschémy priestoru P^n; uzavreté podschémy sú v bijektívnej korešpondencii s triedami ekvivalencie homogénnych ideálov okruhu polynómov $(n + 1)$ neurčitých $k[X_0, X_1, \dots, X_n]$, pričom ekvivalencia je definovaná takto: dva ideály patria do tej istej triedy, ak existuje také číslo m, že sa ideály zhodujú vo všetkých komponentách so stupňom m a vyšším. Diskrétnym invariantom podschémy nahrádzajúcim rozmer a stupeň cyklu je Hilbertov polynóm ideálu ([10]), vyjadrujúci dĺžku homogénnej komponenty ideálu ako funkciu stupňa tejto komponenty. Štúdium systémov uzavretých podschém s tým istým Hilbertovým polynómom vedie k tzv. Hilbertovým schémam. Ak sa pre triedu cyklov reprezentovanú určitou Chowovou varietou utvorí aj Hilbertova schéma, je zaujímavé sledovať vzťahy medzi týmito dvoma útvarmi.

Zovšeobecnením uvedených postupov sa dostane riešenie v prípade, keď sa projektívny priestor P^n nahradí ľubovoľnou projektívnou varietou, resp. projektívnou algebraickou schémou.

Ústredným pojmom, s ktorým sa narába v teórii priesekov, je pojem rozmeru algebraickej variety (schémy). Okrem už spomenutej definície ([7]) možno rozmer algebraickej variety (schémy) definovať ako maximum dĺžok rastúcich reťazcov ireducibilných algebraických podvariet (uzavretých podschém) obsiahnutých v danej algebraickej variete (schéme). Táto definícia je pre algebraické variety zhodná s predchádzajúcou definíciou a súhlasí aj s topologickou definíciou rozmeru v topológii algebraických variet (tzv. Zariského topológia, v ktorej uzavretými množinami sú algebraické podvariety). Základná vlastnosť k-násobnej podmienky (ekvivalentné k nezávislých jednoduchých podmienok) — určenie (n-k)-rozmernej podvariety na n-rozmernej variete — je v teórii priesekov, po prvý raz korektne uvedenej v [4], dôsledkom tejto všeobecnejšej vety: Ak je W n-rozmerná algebraická varieta (nad ľubovoľným poľom k), U a V jej podvariety rozmerov u, resp. v a priesek $U \cap V$ nie je prázdna množina, každá komponenta (t.j. maximálna ireducibilná podvarieta) prieseku prechádzajúca bodom regulárnym na W má rozmer $\geqq u + v - n$. Rozhodujúcim krokom v dôkaze tejto vety je dôkaz tvrdenia o rozmere komponent prieseku variety nadplochou, čo je práve prípad jednoduchej podmienky (v Schubertovom zmysle). Z významných dôsledkov tejto „vety o rozmere prieseku" treba spomenúť aspoň dva. Prvým z nich je veta o rozmere vrstiev (fibrov) regulárneho zobrazenia f variety U do variety V: Ak rozmery U, resp. V sú u, resp. v, vzor každého bodu variety V je uzavretá podvarieta variety U rozmeru $\geqq t$, kde $t = u - v$ (samozrejme pri splnení predpokladu $\overline{f(U)} = V$, čo je vždy možné). Inými slovami: rozmer vrstvy v regulárnom zobrazení f: $U \rightarrow V$ je funkcia zhora semispojitá na variete V v Zariského topológii. Druhým dôsledkom je klasický „princíp sčítania konštánt" ([7], str. 116).

Druhým ústredným problémom teórie priesekov je definovanie „násobnosti". S oboma problémami — definovaním rozmeru prieseku a násobnosti prieseku algebraických variet — sa v klasickom prípade po prvý raz ucelene zaoberal van der Waerden v práci [3]. Ukázal, že algebraické variety nad poľom komplexných čísel sú triangulovateľné, orientovateľné a neohraničené (unberandet) topologické variety, pre ktoré sa oba uvedené problémy s použitím homologickej ekvivalencie dajú previesť na riešenie tých istých problémov v komplexoch. Algebraická násobnosť prieseku dvoch variet v určitom bode sa definuje ako topologický index daného priesečníka (resp. jeho obrazu) v prieseku príslušných komplexov. Napriek istým nedostatkom bola táto Waerdenova práca (okrem celého radu ďalších) veľmi závažná a podnetná pre ďalší vývoj algebraickej geometrie.

Algebraicky ucelenú a korektnú teóriu „násobnosti prieseku" podal A. Weil v práci [4] (str. 148 a ďalšie) zavedením a využitím symbolu $i(U \,.\, V, X; W)$ pre násobnosť takej komponenty X v prieseku $U \cap V$ na variete W, pre ktorú platí dim $X =$ dim $U +$ $+$ dim $V -$ dim W. Pomocou Weilovej teórie sa podarilo zhrnúť a zovšeobecniť väčšinu výsledkov klasickej algebraickej geometrie týkajúcich sa priesekov variet (napr. známa Bézoutova veta). Ťažkosti, ktoré sa vyskytli so zaručením podmienky podstatnej pre to, aby platila väčšina výsledkov teórie priesekov, totiž, aby variety U a V boli vo „všeobecnej polohe", t.j. aby priesek $U \cap V$ mal patričný rozmer, sa riešia na topologickej základni: v prípade potreby sa variety U, V „presunú" tak, aby sa ocitli vo všeobecnej polohe. „Presunutie" má nasledujúci význam: podvariety U, V sa chápu ako cykly (celú teóriu priesekov možno rozšíriť na cykly ([11])), zavedie sa podgrupa cyklov ekvivalených s nulou a „presunutie" cyklu znamená jeho nahradenie prvkom z triedy ekvivalencie cyklu. (Ide pri tom o racionálnu ekvivalenciu ([11], str. 135). (Súčasná algebraická teória priesekov algebraických variet sa zakladá na priradení istého gradovaného okruhu $A(X)$ ku každej algebraickej variete X. Okruh obsahuje triedy ekvivalencie cyklov. (V prípade racionálnej ekvivalencie je $A(X)$ tzv. Chowov okruh.) Priradenie $X \to A(X)$ je funktor z kategórie algebraických variet do kategórie okruhov a formalizovaný popis jeho vlastností umožňuje prebudovanie teórie priesekov algebraických variet na základe teórie rozmeru okruhu a násobnosti priesekov takých okruhov. Veľmi zdarne sa s týmto problémom vyrovnal J. P. Serre v práci [12], v ktorej buduje teóriu rozmeru a násobnosti pre moduly včítane riešenia homologických otázok a aplikácií na algebraickú geometriu; násobnosť prieseku sa tu vyjadruje pomocou funktora Tor_i. Vôbec, použitie metód homologickej algebry, ktoré v algebraickej geometrii prvý pripravoval Serre svojou dnes už klasickou prácou [13], nachádza dnes v algebraickej geometrii široké uplatnenie a je jednou z hlavných pracovných metód. Pomocou týchto metód sa dosiahli v súčasnej algebraickej geometrii ďalekosiahle zovšeobecnenia, napr. o.i. zovšeobecnenie Riemann-Rochovej vety známe pod názvom Riemann-Roch-Hirzebruch-Grothendieckova veta. Aj túto vetu spolu s mnohými ďalšími vysoko abstraktnými výsledkami treba považovať za výraz súčasného stavu „vyčísliteľnej" geometrie, za stav síce ďaleko presahujúci Hilbertove predstavy pri formulácii pätnásteho problému, no rovnako ako v jeho dobe neuzavretý a podnetný.

Literatúra

[1] *Problemy Gilberta* (zborník), Moskva, Nauka 1969, 47.
[2] Schubert, H., *Kalkül der abzählenden Geometrie*, Leipzig 1879.
[3] Van der Waerden, B. L., *Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie*, Math. Ann. *102* (1930), 356.
[4] Weil, A., *Foundations of algebraic geometry*, New York, Pub. Amer. Math. Soc. 1946.
[5] Grothendieck, A., *Éléments de géométrie algébrique I, II* Paris, Publ. Math. 1960, 1961.
[6] Šafarevič, I. R., *Osnovy algebraičeskoj geometrii*, Moskva, Nauka 1972, 63—4.
[7] Chodž, V., Pido, D., *Metody algebraičeskoj geometrii II*, Moskva, Izd. inostr. lit. 1954, 49.
[8] Lang, S., *Introduction to algebraic geometry*, New York, Intersc. Publ. 1958, 78.
[9] Van der Waerden, B. L., *Einführung in die algebraische Geometrie*, Berlin, Springer, 1939, 153.
[10] Aťja, M., Makdonaľd, I., *Vvedenije v kommutativnuju algebru*, Moskva, Mir, 1972, 145.
[11] Baľdassari, M., *Algebraičeskije mnogoobrazija*, Moskva, Izd. inostr. lit. 1961, 36—8.
[12] Serre, J. P., *Algèbre locale — multiplicités*, Berlin—Heidelberg—New York, Springer, 1965.
[13] Serre, J. P., *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. Math., 61 (1955), 197—278.