A. Pełczyński

O některých Banachových problémech

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 19 (1974), No. 5, 262--270

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139680`

O některých Banachových problémech*)

A. Pełczyński, Varšava

V tomto roce uplyne 80 let od narození Stefana Banacha a 40 let od vydání jeho monografie *Théorie des opérations linéaires* [1]. V této monografii byly zformulovány základní pojmy a výsledky teorie normovaných prostorů, považované dnes už za klasické. Vedle toho obsahuje kniha řadu problémů různého stupně obtížnosti, z nichž část zůstala dodnes nerozřešena, ačkoliv tyto problémy byly předmětem intenzívního úsilí mnoha matematiků. Některé problémy mají dnes ryze „sportovní" charakter, zatímco jiné leží v ohnisku rozvoje funkcionální analýzy.

Ve svém referátu bych se chtěl podrobněji zmínit o těchto problémech:

1. *Problém aproximace a problém existence báze.*

2. *Problémy metrické a izomorfní* (= lineárně topologické) *charakterizace Hilbertových prostorů v třídě všech Banachových prostorů.*

I. Problém aproximace a problém existence báze

Při vyšetřování vlastností lineárních operátorů (krátce jen *operátorů*) je výhodné vyjádřit daný operátor jako limitu operátorů o jednoduché struktuře. Protože nejpodrobněji jsou prostudovány operátory konečněrozměrné, má smysl ptát se, kdy lze daný operátor vyjádřit jako limitu operátorů konečněrozměrných. Protože limita (v operátorové normě) posloupnosti konečněrozměrných operátorů je kompaktní operátor, vzniká přirozeně otázka: Kdy má daný Banachův prostor Y následující vlastnost, zvanou *vlastnost aproximace*:

(A) *Pro každý kompaktní operátor $T : X \to Y$ z libovolného Banachova prostoru X existují konečněrozměrné operátory $F_n : X \to Y$ tak, že*

$$\lim_{n \to \infty} |||F_n - T||| = \lim_{n \to \infty} \sup_{\|x\| = 1} \|F_n x - Tx\| = 0 .$$

Připomeňme, že operátor $T : X \to Y$ se nazývá *kompaktní*, zobrazuje-li jednotkovou kouli $\{x \in X : \|x\| \leqq 1\}$ na relativně kompaktní podmnožinu prostoru Y. Operátor $F : X \to Y$ se nazývá *konečněrozměrný*, má-li lineární podprostor (krátce jen *podprostor*) $F(X)$ konečnou dimenzi.

Hypotéza o aproximaci říká toto:

(*) *Každý Banachův prostor má vlastnost aproximace.*

---

*) Referát přednesený dne 12. ledna 1972 na vědeckém zasedání u příležitosti podpisu smlouvy o zřízení Mezinárodního matematického centra Stefana Banacha a otištěný v časopise Wiadomości matematyczne, *XV* (1972), 2—11. Přeložil Alois Kufner.

Nevíme, zda tato hypotéza je pravdivá*). Je spojena s řadou dalších problémů, např. s problémem, zda stopa jaderného operátoru je definována jednoznačně.

Grothendieck ([5]) objevil v roce 1955 řadu hypotéz ekvivalentních s hypotézou o aproximaci. Některé z nich jsou zdánlivě velmi jednoduché. Jako příklad uveďme tyto:

(**) *Pro každou reálnou funkci f, spojitou a omezenou na čtverci $[0,1] \times [0,1]$, a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo n, body $s_1, s_2, \ldots, s_n$; $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1]$ a reálná čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tak, že*

$$\left|f(s, t) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(s, t_i) f(s_i, t)\right| < \varepsilon \quad \textit{pro} \quad (s, t) \in [0,1] \times [0,1] \, .$$

(***) *Pro každou nekonečnou číselnou matici $M = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2,\ldots}$ takovou, že $\sum_i \sup_j |a_{ij}| < \infty$, plyne z podmínky $M^2 = 0$ (tj. $\sum_j a_{ij} a_{jk} = 0$ pro $i, k = 1, 2, \ldots$) rovnost*

$$\operatorname{tr} M = \sum_i a_{ii} = 0 \, .$$

Je třeba zdůraznit, že implikaci (**) $\Rightarrow$ (*) dokázal ještě před válkou S. Mazur. Dodejme ještě, že není těžké dokázat ekvivalenci hypotézy o aproximaci s touto hypotézou:

Libovolný separabilní Banachův prostor má vlastnost aproximace.

Typické příklady separabilních Banachových prostorů mají silnější vlastnosti, než je vlastnost aproximace. Z velkého počtu takových vlastností vytkněme spolu s Banachem ([1]) dvě.

1. Vlastnost omezené aproximace:

(B) *Existuje posloupnost konečněrozměrných operátorů $F_n : Y \to Y$, která konverguje silně k identickému operátoru na Y, tj.*

$$\lim_{n \to \infty} \|F_n(y) - y\| = 0 \quad \textit{pro} \quad y \in Y \, .$$

2. Vlastnost existence (Schauderovy) báze:

(C) *Existuje biortogonální soustava $\{y_n, f_n\}$ tak, že pro každé $y \in Y$ je*

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{m=1}^{n} f_m(y) \, y_m - y \right\| = 0 \, .$$

Zřejmě (C) $\Rightarrow$ (B) (k tomu stačí položit $F_n(y) = \sum_{m=1}^{n} f_m(y) \, y_m$); není též těžké ukázat, že (B) $\Rightarrow$ (A) (víme, že pro libovolný kompaktní operátor $T : X \to Y$ je $\lim_{n \to \infty} |||F_n T - T||| = 0$). Zajímavé ovšem je, že jistá fakta naznačují, že vlastnosti (A), (B), (C) jsou v jistém smyslu „navzájem blízké".

---

*) Dnes už víme (!), viz: Dodáno při korektuře, str. 268. (*Pozn. autora.*) Viz též článek S. Fučíka a A. Kufnera, Pokroky MFA, *19* (1974), 11—18. (*Pozn. překl.*)

Je tu třeba vyzdvihnout především hluboký výsledek, za který vděčíme Grothendieckovi ([5]):

Je-li Y reflexívní Banachův prostor, pak (A) $\Rightarrow$ (B).

V souvislosti s tímto Grothendieckovým tvrzením bych chtěl upozornit na výsledek, k němuž dospěl nedávno FIGIEL ([4]) a který vyvrací jisté Grothendieckovy hypotézy.

Existuje-li Banachův prostor, který nemá vlastnost aproximace, pak existuje reflexívní prostor, který nemá vlastnost (omezené) aproximace.

Souvislost mezi vlastnostmi (B) a (C) ukazuje následující tvrzení, které nedávno nezávisle na sobě dokázali JOHNSON, ROSENTHAL, ZIPPIN ([6]) a PEŁCZYŃSKI ([8]).

K tomu, aby Banachův prostor Y měl vlastnost omezené aproximace, je nutné a stačí, aby prostor Y byl izomorfní (= lineárně homeomorfní) *s jistým podprostorem jistého Banachova prostoru X s Schauderovou bází, který má doplněk v X.*

Připomeňme, že řekneme, že podprostor Z prostoru X *má doplněk v* X, existuje-li projekce $P : X \xrightarrow{\text{na}} Z$, tj. takový lineární operátor P, že $Pz = z$ pro $z \in Z$ *).

Stojí za to ještě dodat, že prostor X s bází z předcházejícího tvrzení lze vybrat nezávisle na Y, tj. univerzálně a jednoznačně (až na izomorfismus). Plyne to z jistého výsledku Pełczyńského ([8], 1969). Označme tento jediný univerzální prostor písmenem B. Jak podotkl W. B. Johnson ([13a]), platí:

K tomu, aby každý Banachův prostor měl vlastnost aproximace, je nutné a stačí, aby prostor B^* (duální k B) měl vlastnost aproximace.

Přejděme nyní k problému existence báze. Na rozdíl od vlastnosti aproximace i od vlastnosti omezené aproximace není obecně snadné ověřit, že konkrétní Banachův prostor má vlastnost (C), tj. sestrojit v tomto prostoru bázi. Přirozenou bázi „jednotkových vektorů" mají jen prostory posloupností. Naproti tomu už konstrukce báze v prostorech funkcí vyvolává řadu těžkostí.

V prostoru $C([0,1])$ všech reálných funkcí spojitých na intervalu $[0,1]$ sestrojil bázi SCHAUDER ([10]) v roce 1927. Později Schauder ([11]) ukázal, že ortogonální soustava Haarových funkcí tvoří bázi v prostorech L_p $(1 \leqq p < \infty)$ všech reálných měřitelných funkcí na $[0,1]$, jejichž absolutní hodnota má p-tou mocninu integrovatelnou vzhledem k Lebesgueově míře. Tyto výsledky později různí autoři zobecnili na případ všech separabilních prostorů $L_p(\mu)$, kde μ je libovolná míra, jakož i na případ prostoru $C(S)$ všech reálných funkcí spojitých na kompaktním metrickém prostoru S.

Značně obtížnějším se ukázal být tento Banachův problém ([1]):

Sestrojit bázi v prostoru $C^1([0,1] \times [0,1])$ *všech reálných funkcí definovaných na čtverci* $[0,1] \times [0,1]$ *a majících spojité první parciální derivace.*

Tento problém rozřešil poměrně nedávno SCHONEFELD ([12]) a nezávisle na něm i CIESIELSKI ([2]). Metody, kterých tito autoři použili, umožnily sestrojit báze i v prostorech funkcí k-krát (spojitě) diferencovatelných na n-rozměrné krychli nebo na n-roz-

*) Podprostor Z, mající doplněk v X, se v originále nazývá „podprzestrzeń *uzupełnialna w X*", v angličtině (většinou) „*complemented subspace*". V české terminologii není — zdá se — zatím běžný žádný termín, který by tuto vlastnost vyjadřoval jediným adjektivem. (*Pozn. překl.*)

měrném toru (viz Schonefeld [13], Ciesielski a DOMSTA [3]). Současně ukázal MITJAGIN ([7]), že prostor $C^k(\Omega)$ reálných funkcí k-krát spojitě diferencovatelných a definovaných na n-rozměrné kompaktní varietě Ω s krajem nebo bez kraje je izomorfní s odpovídajícím prostorem funkcí k-krát (spojitě) diferencovatelných na n-rozměrné krychli $[0,1]^n$. Zkombinujeme-li tento výsledek s výsledky Schonefeldovými, jakož i Ciesielského a Domstovými, dojdeme k existenci báze v $C^k(\Omega)$.

Na zakončení této části referátu bych chtěl ještě připomenout, že nezodpověděna zůstává tato Banachova otázka ([1]):

Existuje báze v prostoru A všech komplexních funkcí spojitých v kruhu $|z| \leqq 1$ *a analytických v jeho vnitřku?*

Norma v A je definována vzorcem

$$\|f\| = \sup_{|z|=1} |f(z)| .$$

II. Charakterizace Hilbertova prostoru

Banachův prostor X se nazývá *Hilbertovým prostorem*, je-li norma v X dána vzorcem

$$\|x\| = (x, x)^{1/2} ,$$

kde $(.,.)$ je kladně definitní symetrická bilineární forma, nazývaná skalárním součinem.

Vzhledem k svému bohatému uplatnění v jiných odvětvích matematiky i v teoretické fyzice zaujímají Hilbertovy prostory výjimečné místo mezi všemi Banachovými prostory. Speciální technika Hilbertových prostorů, za niž vděčíme J. VON NEUMANNOVI, F. RIESZOVI, M. H. STONEOVI a jiným, se opírá především o pojmy ortogonálnosti a ortogonálních projekcí, které jsou přirozeným způsobem definovány pomocí skalárního součinu.

Různé důsledky existence skalárního součinu definujícího normu prostoru však mají čistě metrický charakter. Vzniká tedy přirozená otázka, do jaké míry některé z těchto vlastností samy určují skalární součin. Jinými slovy:

Jak lze „vnitřně", v jazyku normovaných prostorů, definovat Hilbertovy prostory?

Za nejjednodušší a současně i nejelegantnější výsledek v tomto směru vděčíme JORDANOVI a von Neumannovi ([25]).

K tomu, aby Banachův prostor X byl izometrický s Hilbertovým prostorem, je nutné a stačí, aby pro libovolná x, $y \in X$ *byla splněna rovnost rovnoběžníka*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) .$$

Speciálně je tedy Banachův prostor izometrický s Hilbertovým prostorem tehdy a jen tehdy, je-li každý dvourozměrný podprostor tohoto prostoru izometrický s Hilbertovým prostorem.

Protože všechny Hilbertovy prostory pevné dimenze k $(k = 1, 2..)$ jsou navzájem izometrické, jsou tedy v každém Hilbertově prostoru dimenze $>k$ všechny k-rozměrné podprostory izometrické.

Banach ([1]) klade otázku, zda tato vlastnost charakterizuje Hilbertovy prostory v třídě všech Banachových prostorů. Přesněji:

Budiž X Banachův prostor a k přirozené číslo $\geqq 2$. Předpokládejme, že všechny k-rozměrné podprostory prostoru X jsou navzájem izomorfní a že je $\dim X > k$. *Plyne z tohoto předpokladu, že prostor X je izometrický s Hilbertovým prostorem?*

Tento problém není dosud úplně vyřešen. Jeho historie je zajímavá.

Pro $k = 2$ našli v roce 1935 kladnou odpověď Auerbach, Mazur a Ulam ([14]). Pro libovolný nekonečněrozměrný prostor nalezl v roce 1959 kladnou odpověď Dvoretzky ([19]).

Je-li $\dim X = n$, zůstává tato otázka dosud otevřena, i když k podstatnému pokroku došlo v roce 1967 zásluhou Gromova ([22]), který dospěl ke kladné odpovědi na Banachův problém pro všechny dvojice (k, n), uvedené v této tabulce:

	X — reálný Banachův prostor $\dim X = n$	X — komplexní Banachův prostor $\dim X = n$
k sudé	$n > k$	$n > k$
k liché	$n \geqq k + 2$	$n \geqq 2k$

Nejjednodušším nerozřešeným případem je případ $n = 4$, $k = 3$.

Zmiňme se několika slovy a metodách, jichž bylo při řešení tohoto Banachova problému užito. Snadno lze ukázat, že když X má konečný rozměr n, je problém možno zformulovat tímto ekvivalentním způsobem:

V n-rozměrném lineárním prostoru nad tělesem reálných nebo komplexních čísel je dáno omezené konvexní a středově symetrické těleso tak, že všechny jeho řezy k-rozměrnými nadrovinami, procházejícími středem symetrie, jsou (jakožto podmnožiny k-rozměrného prostoru) *afinně ekvivalentní. Je pak toto těleso elipsoid? Předpokládáme, že $n > k \geqq 2$.*

Je zajímavé, že při řešení tohoto problému z afinní geometrie použili Auerbach, Mazur a Ulam známého Hopfova tvrzení o ježkovi, tj. tvrzení, že na dvourozměrné sféře neexistuje spojité pole nenulových tečných vektorů. Gromov užíval ještě rafinovanějšího topologického aparátu, který se týká strukturální grupy kanonické fibrace nad Grassmanovou varietou.

Dvoretzkého metoda souvisí s jeho tvrzením o skorosférických řezech. Toto tvrzení je velmi zajímavé i samo o sobě a zdůrazňuje speciálnost místa, které Hilbertovy prostory zaujímají mezi Banachovými prostory. Zní takto:

Ke každému $\varepsilon > 0$ a přirozenému číslu k existuje $n = n(k, \varepsilon)$ tak, že libovolné konvexní omezené středově symetrické těleso o dimenzi $\geqq n$ má ε-sférický k-rozměrný řez jdoucí středem symetrie (*ε-sféričnost* zde znamená, že poměr poloměru k-rozměrné koule opsané tomuto řezu k poloměru k-rozměrné koule vepsané tomuto řezu není větší než $1 + \varepsilon$).

V řeči normovaných prostorů lze výsledek Dvoretzkého formulovat takto:

Ke každému $\varepsilon > 0$ a přirozenému číslu k existuje $n = n(k, \varepsilon)$ tak, že pro libovolný normovaný prostor X o dimenzi $\geqq n(k, \varepsilon)$ existuje lineární (ε-izometrický) operátor $T: H_k \to X$ takový, že

$$\|h\| \leqq \|Th\| \leqq (1 + \varepsilon) \|h\| \quad \text{pro} \quad h \in H_k ,$$

kde H_k je k-rozměrný Hilbertův prostor.

Důkaz tohoto tvrzení, ohlášeného v [19], uveřejnil Dvoretzky v práci [20]. Tento důkaz je velmi komplikovaný; opírá se o subtilní odhady jistých integrálů vzhledem k Haarově míře Grassmanových variet, chápaných jako homogenní prostory ortogonálních grup. Obsahuje bohužel mezeru, kterou se podařilo zaplnit teprve v roce 1969 (Figiel [21]). Milman ([30]) podal v poslední době značně jednodušší důkaz Dvoretzkého tvrzení, který se opírá o jisté variační lemma P. Lévyho. Tuto metodu lze přenést i na komplexní prostory, tedy na případ, který Dvoretzky vůbec neuvažoval.

Gromovovy a Dvoretzkého výsledky podávají metrickou charakterizaci Hilbertova prostoru pomocí vlastností podprostoru libovolně vysokého rozměru. Tím se podstatně odlišují od charakterizace Jordanovy a von Neumannovy, která má – jak už bylo řečeno – „dvourozměrný charakter". Dnes existuje velmi mnoho dvourozměrných charakterizací Hilbertova prostoru; těm, kteří se o tuto věc zajímají, lze doporučit Dayovu knihu [18]. Velmi zajímavá „vícerozměrná" – a v podstatě trojrozměrná – charakterizace Hilbertova prostoru pochází od Kakutaniho ([26]) pro reálné prostory a od Bohnenblusta ([16]) pro prostory komplexní.

Budiž X Banachův prostor dimenze $\geqq 3$ takový, že pro každý podprostor E existuje projekce $P : X \overset{\text{na}}{\to} E$ s normou $\|P\| = 1$. Pak je X izometrický s Hilbertovým prostorem.

Tento výsledek souvisí s následujícím Banachovým problémem ([1]):

Budiž X takový Banachův prostor, že libovolný jeho podprostor E má doplněk v X, tj. že existuje projekce $P : X \overset{\text{na}}{\to} E$. Je pak X izomorfní s Hilbertovým prostorem, tj. existuje nějaký Hilbertův prostor H a prostý lineární operátor $T : H \overset{\text{na}}{\to} X$?

Kladná odpověď na tuto otázku znamená, že v libovolném Banachově prostoru, který není izomorfní s Hilbertovým prostorem, existuje lineární podprostor, který nemá doplněk. Ovšem sestrojit příklad takového podprostoru nemajícího doplněk v nějakém Banachově prostoru je úloha netriviální. Takový příklad poprvé podali Banach a Mazur ([15]) v roce 1933 pro případ prostoru $C([0,1])$. Murray ([31]) uvedl komplikovanou konstrukci podprostorů, které nemají doplněk v prostorech l_p a $L_p (p \neq 2)$. K dalšímu pokroku došlo v roce 1941 zásluhou Sobczykovou ([32]), který – využitím jisté vlastnosti involucí souvisejících s Walshovou ortogonální soustavou – nejenže podal velmi jednoduchou konstrukci podprostorů nemajících doplněk v l_p i L_p, nýbrž dokázal také existenci takových podprostorů pro širokou třídu Banachových prostorů (obsahující mj. i Orliczovy prostory), jejichž jednotkové koule mají – nepřesně řečeno – dostatečně mnoho nadrovin symetrie. Teprve v roce 1971 podali Lindenstrauss a Tzafriri ([28]) úplné řešení Banachova problému o doplňkových podprostorech.

Stojí za to zmínit se o metodě, které užili:

Lze poměrně snadno ukázat, že Banachův prostor X je izomorfní s Hilbertovým prostorem tehdy a jen tehdy, je-li

$$K_X = \sup_n \sup_{E \subset X; \dim E = n} d(E, H_n) < \infty ,$$

kde $d(E, H_n)$ je infimum norem takových lineárních operátorů $T : E \xrightarrow{\text{na}} H_n$, že $\|e\| \leqq \|Te\| \leqq \|T\| \cdot \|e\|$ pro $e \in E$, přičemž H_n je n-rozměrný Hilbertův prostor. Tento výsledek je *implicite* obsažen v Grothendieckově práci [23]; explicitně se objevuje v práci JOICHIHO [24].

DAVIS, DEAN a SINGER ([17]) ukázali: je-li X takový Banachův prostor, jehož všechny podprostory mají doplněk, je $C_X < \infty$, přičemž C_X označuje supremum přes všechny konečněrozměrné podprostory prostoru X z infima norem projekcí prostoru X na každý z těchto podprostorů.

Lindenstraussův a Tzafririho důkaz probíhá nepřímo. Autoři ukazují – využívajíce jistým způsobem Dvoretzkého tvrzení o skorosférických řezech –, že když $K_X = \infty$, pak také $C_X = \infty$.

Výsledek těchto autorů je příkladem elegantní lineárně topologické charakterizace Hilbertových prostorů v třídě všech Banachových prostorů. Charakterizací tohoto typu je – na rozdíl od charakterizací metrických – známo nemnoho. Pravděpodobně první izomorfní charakterizaci Hilbertova prostoru podal Grothendieck ([31]). Zní takto:

K tomu, aby Banachův prostor X byl izomorfní s Hilbertovým prostorem, je nutné a stačí, aby existovala kompaktní množina S tak, že prostor X i jeho duál X^* jsou izomorfní s faktorovými podprostory prostoru $C(S)$ všech skalárních funkcí spojitých na S.

Velmi zajímavou izomorfní charakterizaci Hilbertova prostoru podal nedávno KWAPIEŃ [(27]). Jde o tento výsledek:

Budiž X Banachův prostor. Uvažujme normovaný prostor $L^2_0(R, X)$, tvořený všemi spojitými funkcemi s kompaktním nosičem, definovanými na reálné přímce R a nabývajícími hodnot z X. Definujme $|f| = (\int_{-\infty}^{\infty} \|f(s)\|^2 \, ds)^{1/2}$ pro $f \in L^2_0(R, X)$. Budiž $L^2(R, X)$ uzávěr množiny $L^2_0(R, X)$ v normě $|.|$. Definujme Fourierovu transformaci $F : L^2_0(R, X) \to L^2(R, X)$ klasickou formulí

$$F(f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} f(s) \, ds \quad \text{pro} \quad t \in R , \quad f \in L^2_0(R, X) .$$

Pak je F omezený lineární operátor tehdy a jen tehdy, je-li X izomorfní s Hilbertovým prostorem.

Chtěl bych ještě připomenout tuto Banachovu otázku ([1]):

Budiž X Banachův prostor o této vlastnosti: všechny nekonečněrozměrné separabilní podprostory prostoru X jsou navzájem izomorfní. Je pak X izomorfní s Hilbertovým prostorem?

Dodáno při korektuře: V květnu 1972 rozřešil problém aproximace švédský matematik P. ENFLO, který sestrojil Banachův prostor nemající vlastnost aproximace ([13b]).

Literatura

[1] S. BANACH: *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warszawa—Lwów 1932.

K části I

[2] Z. CIESIELSKI: *A construction of basis in C^1 (I^2)*, Studia Math. *33* (1969), 243—247.

[3] Z. CIESIELSKI, J. DOMSTA: *Construction of an orthonormal basis in $C^m(I^d)$ and $W_p(I^d)$*, Studia Math. *41* (1972), 211—224.

[4] T. FIGIEL: *Factorization of compact operators and applications to the approximation problem*, Studia Math. *45* (1973), 191—209.

[5] A. GROTHENDIECK: *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. *16* (1955).

[6] W. B. JOHNSON, H. ROSENTHAL, M. ZIPPIN: *On bases, finite dimensional decompositions, and weaker structures in Banach spaces*, Israel J. Math. *9* (1971), 489—506.

[7] B. S. MITJAGIN: *Gomotopičeskaja struktura linějnoj gruppy banachogo prostranstva*, Usp. Mat. Nauk *25* (155), 1971, 63—106.

[8] A. PEŁCZYŃSKI: *Any separable Banach space with the bounded approximation property is a complemented subspace of a Banach space with the basis*, Studia Math. *40* (1971), 239—243.

[9] A. PEŁCZYŃSKI: *Universal bases*, Studia Math. *32* (1969), 247—268.

[10] J. SCHAUDER: *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen*, Math. Zeit. *26* (1927), 47—65.

[11] J. SCHAUDER: *Einige Eigenschaften des Haarschen Orthogonalsystems*, Math. Zeit. *28* (1928), 317—320.

[12] S. SCHONEFELD: *Schauder bases in spaces of differentiable functions*, Bull. Amer. Math. Soc. *74* (1969), 586—590.

[13] S. SCHONEFELD: *A study of products and sums of Schauder bases in Banach spaces*, Thesis, Purdue University, 1969.

[13a] W. B. JOHNSON: *A complementably Universal Conjugate Banach Space and its relation to the Approximation Problem*, Israel J. Math. (v tisku).

[13b] P. ENFLO: *A counterexample to the approximation problem*, Acta Math. *130* (1973), 309—317.

K části II

[14] H. AUERBACH, S. MAZUR, S. ULAM: *Sur une propriété caractéristique de l'ellipsoide*, Monatshefte für Mathematik und Physik *42* (1935), 45—48.

[15] S. BANACH, S. MAZUR: *Zur Theorie der linearen Dimension*, Studia Math. *4* (1933), 100—112.

[16] F. BOHNENBLUST: *A characterization of complex Hilbert spaces*, Portugal. Math. 3 (1942), 103—109.

[17] W. J. DAVIS, D. W. DEAN, I. SINGER: *Complemented subspaces and Λ-systems in Banach spaces*, Israel J. Math. *6* (1952), 303—330.

[18] M. M. DAY: *Normed linear spaces*, Academic Press and Springer Verlag, New York 1962.

[19] A. DVORETZKY: *A theorem on convex bodies and applications to normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, *45* (1959), 223—226.

[20] A. DVORETZKY: *Some results on convex bodies and Banach spaces*, Proc. Intern Symp. on Linear Spaces, Jerusalem (1961), 123—160.

[21] T. FIGIEL: *Some remarks on Dvoretzky's theorem on almost spherical sections of convex bodies*, Colloq. Math. *24* (1972), 241—252.

[22] M. L. GROMOV: *Ob odnoj geometričeskoj gipoteze Banacha*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. *31* (1967), 1105—1114.

[23] A. Grothendieck: *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. Sao Paulo *8* (1956), 1—79.
[24] J. T. Joichi: *Normed linear spaces equivalent to inner product spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. *17* (1966), 423—426.
[25] P. Jordan, J. von Neumann: *On inner products in linear metric spaces*, Ann. of Math. *36* (1935), 719—723.
[26] S. Kakutani: *Some characterizations of Euclidean spaces*, Jap. J. Math. *16* (1939), 93—97.
[27] S. Kwapień: *Isomorphic characterizations of inner product spaces by Fourier series with vector coefficients*, Studia Math. *44* (1972), 583—595.
[28] J. Lindenstrauss, I. Tzafriri: *On the complemented subspace problem*, Israel J. Math. *9* (1971), 263—269.
[29] J. Lindenstrauss, A. Pełczyński: *Absolutely summing operators in $\mathscr{L}_p$-spaces and their applications*, Studia Math. *29* (1968), 275—326.
[30] V. D. Milman: *Novoje dokazatělstvo těoremy A. Dvoreckogo o šečenijach vypuklych těl*, Funkcional. anal. i pril. *5* (1971), 28—37.
[31] F. J. Murray: *On complementary manifolds and projections in spaces L_p and l_p*, Trans. Amer. Math. Soc. *41* (1937), 138—152.
[32] A. Sobczyk: *Projections in Minkowski and Banach spaces*, Duke Math. J. *8* (1941), 78—106.

K problematice setrvačné a gravitační hmotnosti

Bohumil Vybíral, Vyškov

1. Úvod

Hmota patří mezi ty základní kategorie, které spojují různé oblasti vědy v jednotný systém. Pojetí hmoty, jako objektivní reality existující nezávisle na našem vědomí přitom leží na hranici fyzikálního obrazu světa a filosofie. Mírou základních vlastností hmoty z fyzikálního hlediska je hmotnost. Pojem hmotnosti má složitý charakter v závislosti na tom, míru kterých vlastností materiálních objektů popisuje. Tak se ve fyzice pracuje s pojmy: setrvačná hmotnost, gravitační hmotnost — aktivní a pasívní, elektromagnetická hmotnost, klidová (resp. vlastní) hmotnost.

Klasické pojetí hmotnosti ve smyslu množství hmoty se neudrželo a ponechává si svůj význam jen pro látku, tj. pro soubor částic majících klidovou hmotnost a pro makroskopická tělesa, a to jen pro případ omezených podmínek pro jejich pohyb v určité vztažné soustavě (podmínka pro rychlost $v \ll c$). V současné fyzice se pojem hmotnost a pojem množství hmoty staly pojmy nezávislými ([1], str. 238). Hmotnost zůstala pojmem pro vyjádření míry setrvačných a gravitačních vlastností hmoty.

Od dob Galileových a Newtonových do současnosti se hledá a ověřuje vztah mezi setrvačnou a gravitační hmotností. Přitom nejde jen o matematickou rovnost těchto