František Kuřina

Představivost a vyučování matematice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 36 (1991), No. 2, 117--122

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139671

Tedy 79 % ze všech vítězů z mého materiálu lze počítat mezi matematiky. Z těch, kteří alespoň jednou získali první cenu, je v této kategorii 90 %, zatímco za matematiky může být považováno 76 % z těch, kteří získali druhou, nikoli však první cenu, a 72 % těch, pro něž nejlepší dosažený výsledek byla třetí cena. Ze studentů, kteří více než jednou získali cenu, se stalo matematiky 87 %.

Většina držitelů první ceny byla v počátečních letech MMO ze SSSR a z Maďarska. Se zřetelem na výše popsané rozdělení nepřekvapí konstatování, že asi 90 % ze sovětských a maďarských vítězů je zastoupeno mezi matematiky. Takřka totéž platí o bulharských, polských, českých, rumunských a jugoslávských vítězích. Z nějakého důvodu najdeme mezi matematiky zřetelně menší procento vítězů z NDR.

S několika vítězi MMO se lze setkat mezi zvanými řečníky Mezinárodních kongresů matematiků. Celkem se mi jich podařilo najít alespoň osm, což jsou 4 % z mých 195 vítězů: Tadeusz Figiel, Tadeusz a Henryk Iwaniec, Laszlo Lovasz, George Lusztig, Michal Misuriewicz, Andrej Suslin a Dan Voiculescu. Zdá se, že pouze jediný z nositelů Fieldsovy medaile, Grigori Margulis, byl vítězem některé z MMO.

Z profesionální dráhy dřívějších účastníků MMO lze určitě získat ještě více poučení. Bylo by možno prozkoumat matematické disciplíny, v nichž vítězové pracují, porovnat jejich dráhu s matematiky, kteří v soutěžích nevynikli, atd. Protože by výchova budoucích matematiků měla být považována za rozhodující součást matematického vzdělávání, hluboké pochopení získané z takového zkoumání by docela dobře mohlo být užitečné. Doufám, že by se některý zájemce o dlouhodobý průzkum výjimečně talentované mládeže mohl na toto téma soustředit a dále ho rozvinout. Za nejdůležitější studii bych považoval tu, v níž by řada účastníků byla přímo dotázána na jejich vlastní názor na významnost soutěže pro jejich život a profesionální dráhu.

Literatura

[1] E. Morozova a V. Petrakov: *Měždunarodnyje matematičeskije olimpiady.* Moskva, 1968.

Přeložil Ivan Netuka

PŘEDSTAVIVOST A VYUČOVÁNÍ MATEMATICE

František Kuřina, Hradec Králové

Známý americký matematik a antropolog polského původu Jacob Bronowski ve své knize Vzestup člověka [1] napsal:

To, čemu říkáme kulturní vývoj, je ve své podstatě vývojem lidské představivosti ... Vznik vědy a umění lze připsat téže lidské vloze: schopnosti představit si názorně budoucnost, předvídat, co se může stát, a připravit se na to, umět budoucí děje zobrazit a přeměňovat ve vlastní mysli, na osvětlené ploše temné jeskyně nebo televizní obrazovce.

Může matematika přispívat k rozvoji lidské představivosti? Může matematika přispívat k předvídání?

Podle profesora Vopěnky je matematika metodou předvídání pomocí formálních kalkulů. Možnostem uplatnění takových kalkulů však musí předcházet vytýčení cesty k jejich aplikacím, určení postupu od známého k neznámému, od přítomnosti k budoucnosti.

Na elementární úrovni, kterou zde máme především na mysli, se uplatní představivost při řešení úloh, při popisu reality pomocí matemtických pojmů, při tzv. matematizaci reálné situace. Jak známo, právě tato stránka činí ve vyučování největší potíže a jakoby zákonitě jí věnujeme ve výuce malou pozornost.

V matematice se obvykle chápe představivost, vybavování neznámého, úzce, a to jako geometrická představivost. Ta je ovšem složkou prostorové představivosti a tu lze považovat za součást představivosti neboli fantazie v obecném slova smyslu. Představivost je ovšem předpokladem a podstatnou složkou tvořivosti ve všech oborech lidské činnosti.

Představivost se uplatňuje rovněž při samotném tvoření pojmů. Prvním stupněm tohoto procesu je patrně vytváření představ. Představivost se uplatňuje i při tvorbě jazyka, při komunikaci. Představivost je složkou rozumového vývoje člověka.

I v tomto směru vykazuje naše škola nedostatky. Obvykle zanedbáváme proces vzniku pojmů u studentů, nesnažíme se rozvíjet představy, vyučování je spíše hra se slovy a vzorci než umění řešit úlohy, v němž hraje představivost výraznou roli.

Doložme tuto tezi příkladem.

Studenti mají řešit úlohu:

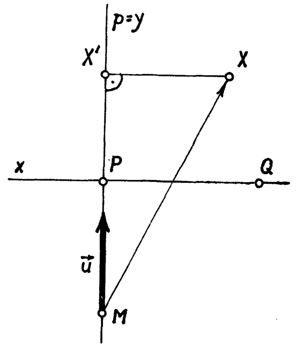
(1) Vyšetřete množinu všech bodů roviny, které mají daný součet k vzdáleností od dané přímky p a bodu Q, který na ní neleží.

Při řešení se vyskytly např. i tyto nedostatky:

Student vhodně umístí přímku p do osy y, bod Q na osu x a k výpočtu vzdálenosti bodu X od přímky p aplikuje vzorec

$$|pX| = \sqrt{\left(\overrightarrow{MX}^2 - \frac{|\overrightarrow{MX} \cdot \boldsymbol{u}|^2}{|\boldsymbol{u}|^2}\right)},$$

kde $\boldsymbol{u}$ je vektor zaměření přímky p, M je její libovolný bod. Vůbec nevidí, že hledaná vzdálenost je $|x|$, mechanicky aplikuje vzorec pro vzdálenost bodu od přímky v trojdimenzionálním prostoru (obr. 1).



Obr. 1.

Pokládám proto za aktuální

a) poznat úroveň geometrické představivosti studentů,
b) vypracovat systém úloh k rozvoji představivosti.

Účinným způsobem posouzení úrovně geometrické představivosti je dialog učitele s jednotlivými žáky při řešení úloh.

Tuto metodu jsme aplikovali na třech příkladech:

(2) Na obr. 2 je nakresleno těleso z neprůhledného materiálu, jehož všechny hrany jsou viditelné. Popište je.

(3) Vypočtěte obsah pravidelného dvanáctiúhelníku vepsaného kružnici poloměru 1.

(4) Nakreslete dva mnohoúhelníky, které nejsou shodné, ale mají po řadě shodné a rovnoběžné všechny strany.

U řady studentů nevedla ani diskuse k správným výsledkům. Např. u úloh (2) a (4) docházejí k závěrům, že požadovaný geometrický útvar neexistuje. Zdá se, že geometrická představivost je svázána s dosavadními zkušenostmi. Obrázek z úlohy (2) navozuje tak silnou představu krychle, že je pro většinu studentů obtížné určit v něm obraz mnohostěnu, jehož jedna stěna má tvar šestiúhelníku, druhá s ní rovnoběžná má tvar čtverce, bočné stěny pak jsou střídavě lichoběžníky a trojúhelníky. V úloze (4) si obvykle představujeme souhlasnou rovnoběžnost příslušných stran a dospíváme tak k nesprávnému závěru. Správný výsledek je nakreslen na obr. 3. V úloze (3) prakticky nikdo ze skupiny studentů nevidí velikost výšky $r/2$ rovnoramenného trojúhelníku OAB a odtud ihned správný výsledek $S = 3r^2$, ale řeší úlohu obvykle velmi složitě.

Úroveň geometrické představivosti je prokazatelně u absolventů naší střední školy velmi nízká.

Diskuse s jednotlivými řešiteli poskytuje řadu zajímavých informací, je však časově náročná. Proto jsme připravili písemnou prověrku představivosti, která obsahovala 12 úloh. Informujeme zde aspoň o šesti z nich.

(5) Nakreslete dva čtverce, jejichž průnikem je a) čtverec, b) trojúhelník, c) pětiúhelník.

(6) Určete úhel tělesových úhlopříček krychle.

Je pozoruhodné, že velká většina výsledků úlohy (5) byly symetrické geometrické útvary, mnoho studentů určilo, že úhlopříčky krychle jsou k sobě kolmé.

Zdá se, že existuje silná setrvačnost idejí: symetričnost čtverců se přenáší i na jejich průnik. Výsledky, které takto studenti získali, byly ovšem správné. Kolmost jako význačná vlastnost krychle (kolmost hran a kolmost stěn) byla zcela neprávem mnohými řešiteli přenesena na kolmost tělesových úhlopříček krychle.

Další dvojice úloh je aritmetická.

(7) Proč je každé z čísel 357 357, 491 491, 527 527, ... dělitelné číslem 13?

(8) Proč pro každá kladná čísla a, b, c platí:

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqq 9\,?$$

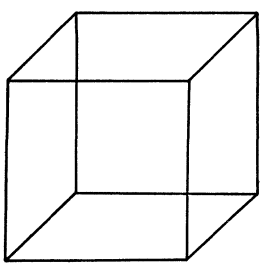
Dosti málo studentů má tak dobré představy o desítkové soustavě, aby viděli v opakujícím se trojčíslí možnost psát

$$357\,357 = 357 \,.\, 1001 =$$
$$= 357 \,.\, 13 \,.\, 11 \,.\, 7\,, \ldots,$$

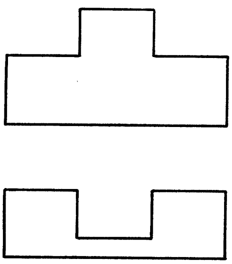
a tím zdůvodnili výsledek.

Jen výjimečně si řešitelé všimli, že nerovnost z úlohy (8) je ekvivalentní s nerovností

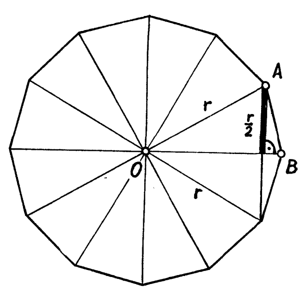
$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geqq 6\,,$$



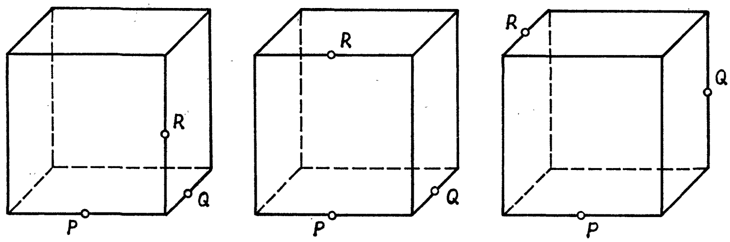
Obr. 2.



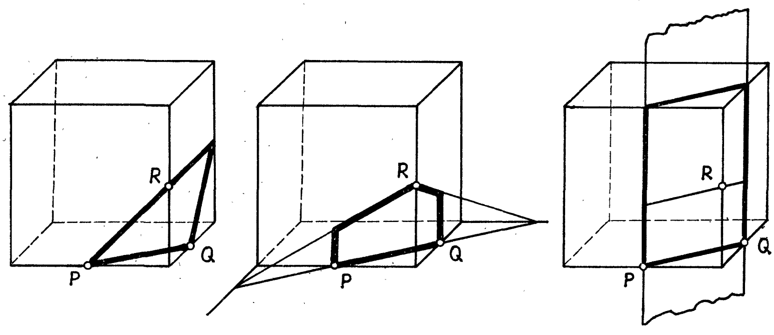
Obr. 3.



Obr. 4.



Obr. 5.



Obr. 6.

o jejíž správnosti usoudíme snadno vzhledem k platnosti tří nerovností typu

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2 \, .$$

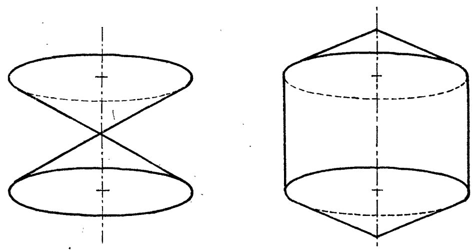
Poslední dvě úlohy, které zde uvedeme, jsou stereometrické.

(9) Určete průnik roviny PQR s krychlí (P, Q, R jsou středy hran podle obr. 5).

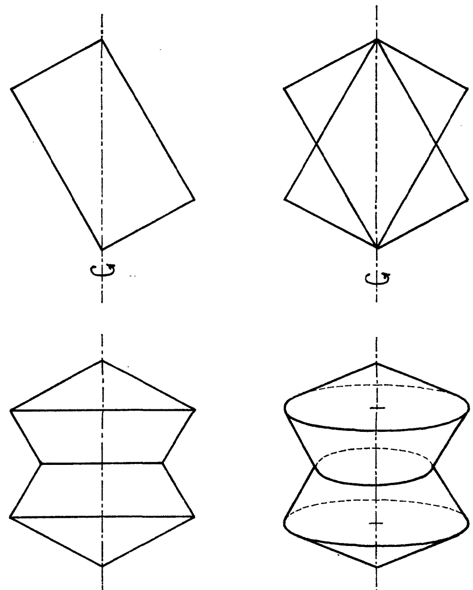
(10) Určete těleso, které vznikne otáčením obdélníku kolem jeho úhlopříčky.

První část úlohy (9) měla testovat, zda řešitel zná pojem průniku. Překvapivě se však vyskytly výsledky, které ukazují na zcela nevyvinutou prostorovou představivost (obr. 6). Třetí část úlohy (9) vyřešilo ze zkoumané skupiny jen několik jednotlivců.

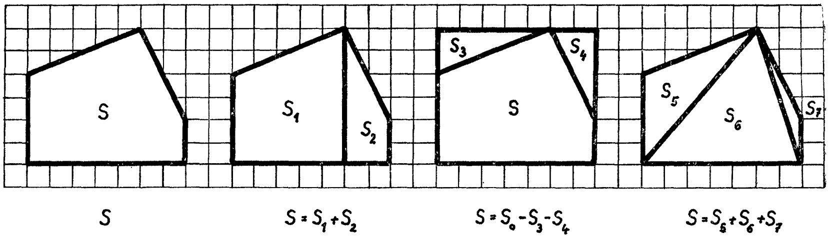
U úlohy (10) kreslila řada studentů nesprávný výsledek např. podle obr. 7. Tato úloha prokázala, že většina studentů si neuvědomuje žádnou možnost vytváření představy: buď výsledek vidí, nebo ne. Přitom je metoda, která vede k postupnému vytvoření správné představy, zcela přirozená např. podle obr. 8. Nejdříve



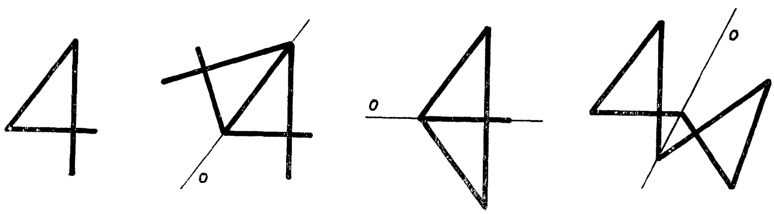
Obr. 7.



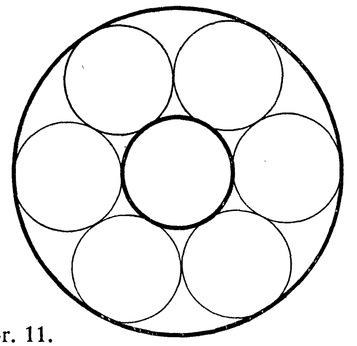
Obr. 8.



Obr. 9.



Obr. 10.


Obr. 11.

nakreslíme výchozí situaci, pak výchozí situaci spolu s výsledkem otočení obdélníku o 180°, následuje nárys tělesa a jeho názorný obrázek.

Testem, z něhož jsme určité části uvedli, lze určit pořadí úspěšnosti řešitelů, je však obtížné určit, jaké faktory u jednotlivých řešitelů působí. Je zřejmé, že správnost výsledků ovlivní např. úroveň teoretické přípravy v matematice a trénink v řešení analogických úloh. Otázka testování představivosti je tedy podle našeho názoru dosud nevyřešená.

Přesto se lze věnovat velmi intenzívně rozvíjení představivosti a s tím související tvořivost v matematice řešením systému vhodných úloh od nejnižších ročníků.

Uveďme zde několik výsledků podložených dlouhodobou experimentální prací. Výsledky shrneme do sedmi zásad doprovázených ilustrativními příklady.

1. Každou úlohu řešit pokud možno více způsoby. Např. úlohu pro 7. ročník *Vypočtěte obsah pětiúhelníku ve čtvercové síti* můžeme řešit aspoň třemi způsoby podle obr. 9.

2. Abstraktní pojmy ilustrovat konkrétními příklady. Např. osovou souměrnost v 6. ročníku ilustrovat úlohou: Doplňte daný geometrický útvar (číslici 4) na útvar osově souměrný podle dané osy.

3. Pracovat s více reprezentanty téhož pojmu. Např. úlohy o objemech a površích těles doprovázet nejen názornými obrázky, ale i půdorysy, nárysy, bokorysy a sítěmi.

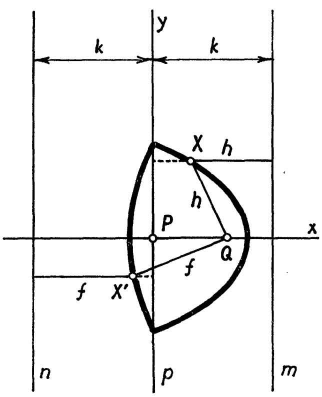
4. Spojovat matematiku s praxí. Např. otázku o vzájemné poloze kružnic ilustrovat úlohou: Jaké podmínky musí platit mezi poloměry r_1, r_2 a počtem n kuliček kuličkového ložiska podle obr. 11?

5. Posílit řešení úloh metodami syntetické geometrie. Např. úloha z příkladu (1) se obvykle řeší analyticky, ačkoli její syntetické řešení podle obr. 12 je velmi elegantní.

Hledaná množina bodů v polorovině pQ je částí paraboly s řídící přímkou m a ohniskem Q, v polorovině opačné k polorovině pQ jde o část paraboly s ohniskem Q a řídící přímkou n.

6. Užívat vhodná grafická schémata a ilustrace. Některé podněty v tomto směru uvádím v publikaci [2].

7. Posilovat úroveň geometrické představivosti u budoucích učitelů. Současná koncepce učitelského vzdělání u nás z hlediska rozvíjení představivosti vůbec nevyhovuje. Proto za nezbytné považuji zařazení kursu syntetické geometrie a posílení studia metod řešení úloh.



Obr. 12.

Rozvíjení představivosti je důležitý úkol, který přísluší všem oblastem matematiky, ale nejen matematiky, a to na všech úrovních vzdělání. V naší škole nevěnujeme této problematice náležitou pozornost. Podle mého názoru bychom měli shromažďovat z této oblasti materiál, rozvíjet spolupráci a posuzovat i z hlediska rozvíjení představivosti nové učebnice. Spolupráci v této oblasti uvítám nejen já, ale i řada dalších didaktiků matematiky.

Literatura

[1] Bronowski, J.: *Vzestup člověka.* Odeon, Praha, 1985.

[2] Kuřina, F.: *Umění vidět v matematice.* SPN, Praha, 1990.

VÝUKA BIOFYZIKY NA MFF UK

Eliška Jelínková,
Praha

Samostatný vědní obor biofyzika se utvářel postupně od dvacátých let. Na konci 50. let byla již biofyzika ve světě etablována jako obor využívající poznatků a metod fyziky, matematiky a chemie k řešení problémů ve vědách biologických a lékařských. Byl podnícen rozvoj genetiky a molekulární biologie. Ne tak v Československu, kde byly zmíněné obory označovány za nežádoucí buržoazní pavědu až do konce období kultu osobnosti v SSSR. Důsledkem toho bylo i studium biofyziky zavedeno na Karlově univerzitě až v roce 1968. Podobně jako jinde ve světě byly u nás koncipovány dva směry výuky biofyziky: směr fyzikální, jehož těžiště je v důkladné výchově ve fyzikálních disciplínách, kdežto v biologii dává pouze základní nutné znalosti, a směr biologický, který naopak akcentuje disciplíny biologické a vychovává biology se znalostí pouze některých fyzikálních disciplín. Učební plány obou směrů byly vypracovány společně pracovníky Fyzikálního ústavu UK na MFF UK a pracovníky PF UK. Po roce 1969 byl kolektiv pracovníků biofyziky PF UK, vedený doc. J. Drobníkem, rozehnán. Pracovníci oddělení biofyziky ve FÚ, odpovědní za výuku i výzkum v biofyzice, dále spolupracovali pouze s některými členy katedry mikrobiologie a genetiky PF UK. Učební plány zaměření biofyzika se dále na obou fakultách rozvíjely nezávisle.

RNDr. Eliška Jelínková, CSc. (1942), je docentkou MFF UK, Ke Karlovu 5, 121 16 Praha 2.