Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Paul R. Halmos

Zpomalil se rozvoj matematiky? (1. část)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 36 (1991), No. 5, 262--276

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139659

Zpomalil se rozvoj matematiky?

(1. část)

Paul R. Halmos, Santa Clara, USA

Paul Halmos získal tři akademické stupně na univerzitě v Illinois; brzy poté, co dosáhl posledního, stal se na několik let asistentem Johna von Neumanna. Od té doby vyučoval na mnoha univerzitách (mj. v Chicagu, Michiganu a Indianě) a hostoval na mnoha dalších (mj. v Miami, v Montevideu, na Havaji, v Edinburghu a v Západní Austrálii). Od r. 1985 působí na univerzitě Santa Clara. Jeho matematické zájmy zahrnují ergodickou teorii, algebraickou logiku a operátory v Hilbertově prostoru.

Prolog. Víme vůbec něco, co neznal ještě Dedekind? Asi bychom měli vědět. Dedekind zemřel v únoru 1916. Šest týdnů předtím, v silvestrovský podvečer roku 1915 byla v Columbusu v Ohiu založena Matematická asociace Ameriky (MAA). V souvislosti s oslavami tohoto diamantového výročí, pořádanými v srpnu 1990 zde v Columbusu, jsem na sebe vzal úkol referovat o tom, zdali a jak se změnila matematika během 75 let existence MAA. O předložení takové zprávy se teď pokusím.

Nepokouším se v této zprávě někoho učit matematiku, ani její historii — pouze se snažím podělit se s vámi o zajímavý pohled na rozvoj matematiky v posledních 75 letech. Každý by mohl zjistit totéž co já, pokud by strávil několik měsíců prohlížením existujících svazků časopisu *Mathematical Reviews* a několika tuctů dalších časopisů; jenže každý se o to nepokoušel a já ano — a jsem připraven vám povědět, co jsem zjistil.

Základní otázka, kterou jsem si položil, by mohla být vyjádřena takto: kdyby vám nějaký stroj času umožnil setkat se znovu s Dedekindem, co byste mu mohli sdělit o pokrocích v matematice, které se udály od jeho doby? Ve snaze nějak uspořádat možné odpovědi, navrhuji rozdělit je do tří skupin: pojmy, exploze a vývojové etapy.

První skupina se skládá z nových pojmů, které Dedekind nemohl předvídat nebo očekávat. Z nových slov, která všichni dnešní matematikové již mnohokrát slyšeli a o kterých by se mnozí z nás rádi dozvěděli více.

(Příklad: teorie katastrof.) Explozí rozumím úsek matematického vývoje, který je ryzí matematikou, uznávanou celou odbornou veřejností, ale který současně dává odpověď na tak staré a slavné problémy, že se stane senzací nejen pro vědecký časopis *Transactions*, ale na jeden den i pro noviny *Times*, na týden pro týdeník *Time* a na mnoho měsíců pro studentské matematické kroužky. (Příklad: věta o čtyřech barvách.) Třetí navrhovaná skupina zahrnuje hluboké a v některých případech dokonce úžasné matematické pokroky (nikoliv však exploze) takového druhu, že možná nejsou vhodné do *Timesů*, ale svým tvůrcům mohou přinést Fieldsovu medaili. Příklad: nezávislost

---

P. R. Halmos: *Has Progress in Mathematics Slowed Down?* The American Mathematical Monthly *97* (1990), No. 7, 561–588. Přeložili Oldřich Kowalski a Ivan Netuka.

hypotézy kontinua. Mimochodem, ne všichni průkopníci, o kterých se dále hovoří, dostali Fieldsovu medaili a ne všichni nositelé Fieldsovy medaile jsou uvedeni v tomto článku. Z kvalitativního hlediska jsou však obě skupiny v podstatě stejné. Mnohá (ale ne všechna) z uvedených témat již byla a jiná nepochybně brzy budou zpracována ve formě přehledných článků v časopise *Monthly*.

Uvádím celkem 22 témat: 9 pojmů, 2 exploze a 11 vývojových etap. Jestliže by někdo jiný vybral 22 témat, je zde naděje, že průnik by byl značný (10 témat? 18?) a značný by mohl být i rozdíl. Na tom není nic špatného. Některá témata, která by sem mohla (či měla?) být zahrnuta, ale uvedena nebyla, jsou exotické sféry, Hauptvermutung*), NP-úplnost, pseudodiferenciální operátory a simplexová metoda. Jedna věc je jistá: ať již bychom pojednali o jakýchkoli tématech, ne všechna by byla stejně důležitá. Některé z výsledků, které probírám, jsou výsledky typu „ano nebo ne“ (jako je řešení pátého Hilbertova problému), v některých případech jde o metodu (jako je rychlá Fourierova transformace), v jiných jde o přístup (jako je nestandardní analýza) a další jsou gigantickými teoriemi (jako je Atiyahova-Singerova věta o indexu). Každé z vyjmenovaných témat bylo zařazeno proto, že je buď důležité, nebo je zábavné, nebo přinejmenším mělo velkou publicitu a v každém případě si zaslouží pozornost. Všechny náměty mají alespoň jedno společné: žádný z nich nepatří k tomu, co se občas nazývá aplikovanou matematikou, a speciálně žádný z nich nespadá do informatiky. Měl jsem pro to dva důvody: první důvod je, že neznám příslušný obor, a druhý důvod je, že o těchto disciplínách bude určitě pojednáno v jiných přehledných referátech.

Délka zpracování témat kolísá od jednoho odstavce až po tucet odstavců. Tato délka byla v každém případě určena složitostí tématu, tím, co jsem se byl schopen o něm dozvědět, a ovšem do jisté míry i mou osobní preferencí. V matematické vědě zřídka najdeme něco, co by bylo současně zajímavé i elementární; pokud jsem něco takového našel, snažil jsem se to uplatnit, i když jsem tím trochu odbočil od svého hlavního záměru.

Jestliže některou matematickou partii, o které pojednávám, již znáte, pak si z mé informace nic neodnesete, ale pokud ji neznáte, ocitáte se v nebezpečí, že se něco dovíte. Pravděpodobně se nedozvíte přesné znění věty (matematika není konec konců sbírkou vět, ale souborem myšlenek) a zcela určitě se nedozvíte důkaz. Účelem jednotlivých pojednání není ani tak věci vysvětlovat jako spíše dávat do souvislosti. To může znamenat mnoho různých věcí; jednou z nich je, že pokud pojednáváme o zobecnění něčeho, měli bychom se přinejmenším zmínit o nejjednodušších netriviálních projevech toho něčeho. Jiným projevem mého záměru je, že jednotlivá pojednání jsou psána v próze; obsahují velmi málo obvyklých zkratkovitých symbolů z matematické literatury. Použijeme-li dnes velmi oblíbené fráze, pak tato pojednání mají za cíl přispět k matematické „kulturní gramotnosti“: neobjasňují skutečnou podstatu tématu, ale poučí vás do té míry, že lépe pochopíte případnou poznámku, kterou někdo náhodou utrousí při odpoledním čaji.

Seznam literatury pro článek tohoto zaměření by mohl být téměř seznamem literatury pro celou matematiku. Jako kompromis mezi tímto a ničím jsem zvolil přesně

*) „Hauptvermutung“, hypotéza říkající, že každé dvě triangulace hladké variety mají společné zjemnění. V obecném případě byla vyvrácena J. Milnorem koncem 50. let (pozn. překl.).

jeden odkaz na konci každého oddílu. Porozumění čtenáře, který využije některého z těchto odkazů, se, jak doufám, zvýší na základě dalšího objasnění, které tam najde. Navíc tam takový čtenář najde další odkazy na články a knihy, které pojednávají o předmětu jeho zájmu.

Ten jediný odkaz za každým oddílem se týká buď slovníku

The Encyclopedic Dictionary of Mathematics

(zkráceně EDM),

který byl zpracován Japonskou matematickou společností a vydán v M.I.T. Press 1980 nebo časopisu

The Mathematical Intelligencer

(zkráceně MI).

Odkazy na EDM jsou uváděny ve tvaru

EDM 146/B

(což se týká hesla označeného jako 146/B) a odkazy na MI jsou uváděny ve tvaru

MI 8/1/40

(což odkazuje na svazek 8, číslo 1, stranu 40).

A to je všechno; teď se dejme do práce a podívejme se, co jsou to ty pojmy, exploze a vývojové etapy.

Pojem 1: Mooreovy-Smithovy limity. Moderní obecná topologie a obzvláště její uplatnění na tzv. slabé topologie v určitých prostorech funkcí nás poučily o tom, že limity posloupností už nejsou pro analýzu dostatečně silným nástrojem. V klasické analýze se učíme, že množina je uzavřená, právě když obsahuje limity všech svých konvergentních posloupností. Existuje ale mnoho důležitých a užitečných topologických prostorů, pro něž takové tvrzení neplatí. Když se však posloupnosti nahradí „zobecněnými posloupnostmi“ (elegantní slovo je „sítě“) a obyčejné limity jsou odpovídajícím způsobem nahrazeny Mooreovými-Smithovými limitami sítí, klasické důkazy opět projdou, často až na terminologii, beze změn, a dávají výsledky stejně užitečné jako klasické posloupnosti.*) (Příklad: množina je uzavřená, právě když obsahuje Mooreovy-Smithovy limity všech svých sítí.)

Jmenovaný Moore z plodného Mooreova-Smithova článku z r. 1922 je velký E. H. Moore (jeden z učitelů R. L. Moorea) a zmíněný Smith je jinak vcelku zapomenutý H. L. Smith. Slovo „síť“ bylo, pokud vím, poprvé užito J. L. Kellym v r. 1950.

Literatura: EDM 89/H

Pojem 2: Distribuce. Množina $\mathcal{D}$ nekonečněkrát diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem v $\mathbf{R}^n$ je ve zřejmém smyslu vektorový prostor. Budeme říkat, že

*) Připomeňme, že množina M s (částečným) uspořádáním $\leq$ se nazývá usměrněná, jestliže pro každé m, $n \in M$ existuje $p \in M$, pro něž platí $m \leq p$ a $n \leq p$. Zobrazení usměrněné množiny M do topologického prostoru X se nazývá *síť* v prostoru X. Nechť (při zřejmém označení) je $\{x_m\}_{m \in M}$ síť v prostoru X a $x \in X$. Říkáme, že síť $\{x_m\}_{m \in M}$ konverguje k x, jestliže pro každé okolí U bodu x existuje $m \in M$ tak, že $x_n \in U$, kdykoli $n \in M$ a $m \leq n$. Poznamenejme, že v topologii se místo pojmu sítě často užívá pojem filtru (pozn. překl.).

posloupnost $\{\varphi_m\}$ takových funkcí konverguje k 0, jestliže nosiče všech φ_m jsou obsaženy v jisté kompaktní množině a nejen posloupnost sama konverguje k 0 stejnoměrně, ale i všechny posloupnosti všech parciálních derivací mají tuto vlastnost.

Je-li nyní f komplexní integrovatelná funkce na $\mathbf{R}^n$, potom rovnice

$$T_f(\varphi) = \int \varphi(x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

definuje spojitý lineární funkcionál na $\mathcal{D}$ a totéž je pravda pro f pouze lokálně integrovatelnou. Jestliže μ je komplexní míra na $\mathbf{R}^n$, pak rovnice

$$T_\mu(\varphi) = \int \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

definuje spojitý lineární funkcionál na $\mathcal{D}$. Je-li např. $\mu(E) = 1$, pokud počátek náleží do E, a jinak $\mu(E) = 0$ (jinými slovy, μ je bodová hmota v 0), potom $T_\mu(\varphi) = \varphi(0)$ pro každou φ, což vám asi připomíná kuriózní chování něčeho, čemu se říkávalo Diracova delta-funkce (což však samozřejmě nikdy žádnou funkcí nebylo).

Všechny spojité lineární funkcionály na $\mathcal{D}$ se nazývají *distribuce*; inspirací pro nositele Fieldsovy medaile Laurenta Schwartze (a dalších velikánů, na jejichž ramenou stanul) bylo pochopení faktu, že pojem distribuce zobecňuje pojem funkce a že v mnoha klasických situacích, v nichž žádná funkce splňující předepsané podmínky neexistuje, může existovat distribuce vyhovující těmto podmínkám a pro všechny praktické účely je stejně tak dobrá. Typickým druhem „předepsaných podmínek“ je parciální diferenciální rovnice, kterou máme řešit — distributivní řešení často dává stejné množství použitelných informací jako poctivé klasické řešení.

Literatura: EDM 130/B

Pojem 3: Metoda Monte Carlo. Vyznačme si na stole soustavu rovnoběžek, vzdálených od sebe, řekněme, dva palce a představme si jehlu (matematicky idealizovanou jehlu, tedy úsečku) o délce jednoho palce. Upusťme jehlu náhodně na stůl a zeptejme se: jaká je pravděpodobnost toho, že jehla nespadne mezi některé dvě sousední rovnoběžky, ale protne jednu z nich? To je slavná Buffonova úloha o jehle a způsob jejího řešení není nijak zvlášť obtížný: najdeme ji jako cvičení v mnoha elementárních učebnicích teorie pravděpodobnosti. Jako odpověď vyjde číslo $1/\pi$.

Je to poněkud překvapující? Jak se číslo π vůbec objeví v odpovědi na tuto otázku? V této chvíli to není to hlavní, ale když už byla otázka položena, neuškodí ji komentovat. Odpověď na otázku „jaká je pravděpodobnost?“ závisí samozřejmě na způsobu, jakým se jehla dostane na stůl — nebo vyjádřeno přesněji, na rozdělení pravděpodobnosti, které se mlčky nebo výslovně chápe jako zákonitost, jíž je házení jehly podřízeno. Byla zkoumána různá možná rozdělení pravděpodobnosti a jistě nikoho nepřekvapí, že se dostávaly různé odpovědi. Jedna možnost je předpokládat, že střed jehly může dopadnout se stejnou pravděpodobností do každého bodu některé úsečky, která je kolmá na původní rovnoběžky a je dlouhá, řekněme, tři palce. Nezávisle na tom můžeme dále předpokládat, že úhel, který bude jehla po dopadnutí svírat se zvolenou úsečkou, může být se stejnou pravděpodobností kterákoli hodnota mezi 0° a 180°. Jakmile se takto explicitně zmíníme o úhlech, nemělo by nás překvapit, že se v odpovědi objeví číslo π.

Pokud tuto odpověď přijmeme, má to zajímavý důsledek. Proveďme náš pokus opakovaně mnohokrát za sebou a vypočtěme poměr počtu úspěšných pokusů (kdy došlo k protnutí některé z rovnoběžek) k počtu všech pokusů. Zákon velkých čísel nám pak říká, že tento poměr bude velmi blízký k číslu $1/\pi$. Závěr: hodnota čísla π může být určena fyzikálním (pravděpodobnostním) experimentem bez jakýchkoliv výpočtů (s výjimkou výpočtu převrácené hodnoty na konci pokusu). Tato myšlenka byla známa a využívána již před pár stoletími — byla to první předzvěst moderní techniky známé jako metoda Monte Carlo, která byla v roce 1945 uvedena do praxe Ulamem a von Neumannem.

Metoda Monte Carlo má časté aplikace v situacích, kdy běžné výpočty, jaké problém vyžaduje, se zdají být hrozné: nahraďme původní otázku pravděpodobnostní otázkou, na kterou existuje tatáž odpověď a hledejme odpověď na pravděpodobnostní otázku buď pomocí skutečného experimentu, nebo (spíše) pomocí počítačové simulace náhodného experimentu. Jednoduchým příkladem je výpočet určitého integrálu $\int_0^1 f(x)\,dx$, kde f je omezená funkce (pro určitost, nechť $0 \leqq f(x) \leqq 1$ kdykoli $0 \leqq x \leqq 1$). Postupujme takto: zvolme (sami nebo pomocí počítače) velkou množinu dvojic (x,y) náhodných čísel, kde $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, a pak určeme poměr počtu těchto dvojic, pro které platí $y \leqq f(x)$, k počtu všech dvojic. Vypočtený poměr je pak přibližně roven žádanému integrálu.

Tento příklad je z hlediska teorie až příliš naivní, ale skutečné aplikace ze života jsou svou povahou velice podobné. Abychom vypočítali něco, co je zapeklitě složité (a nevadí, jestliže to něco je už samo nějaká pravděpodobnost), nahraďme původní otázku pravděpodobnostní otázkou (nebo jinou pravděpodobnostní otázkou), která se dá snadněji určit experimentem (nebo spíše počítačově simulovaným experimentem).

Odkud se vzal název Monte Carlo? Patrně má jít o asociaci s názvem jednoho z nejznámějších středisek hazardních her na světě. Název nám napovídá, že když nemůžeme vyřešit nějaký problém, zkusme si s ním trochu pohrát — tj. nahraďme jej problémem typu hazardní hry, který vede k témuž řešení a dává nám lepší šance na úspěch.

Literatura: EDM 378/B

Pojem 4: Kategorie. Pokud rozumíte vektorovým prostorům a lineárním zobrazením, máte z devadesáti procent za sebou cestu k pochopení kategorií. Matematikové si instinktivně byli po dlouhou dobu vědomi toho, že vektorové prostory a lineární zobrazení se chovají „stejně jako“ grupy a homomorfismy a ty se dále chovají stejně jako topologické prostory a spojitá zobrazení — tato souběžnost je veliká a proniká vším. Když víte, co jsou podgrupy, víte, co jsou podprostory a když rozumíte vytváření kvocientových grup, jste v dobrém rozpoložení pro objevení (znovuobjevení) definice kvocientových prostorů.

Teorie kategorií je formalizací tohoto instinktivního chápání. Narodila se (Eilenbergovi a Mac Laneovi) v r. 1945. Kategorie je třída „věcí“ dvojího druhu: objektů a morfismů splňujících tři snadné axiómy. Zhruba shrnuto, tyto axiómy říkají, že morfismy lze skládat, pokud jenom jejich definiční obory a obory hodnot do sebe správně zapadají, že pro každý objekt X existuje identický morfismus z X do X, a že pokud Hom (X, Y) označuje množinu všech morfismů z X do Y, pak $X = X'$ a $Y = Y'$ je jediná možnost, aby Hom (X, Y) a Hom (X', Y') měly stejné prvky.

Vektorové prostory, grupy a topologické prostory zapadají do tohoto schématu, stejně tak i abstraktní množiny, okruhy, diferencovatelné variety, moduly atd. atd. V každé kategorii mohou být definovány speciálnější pojmy než jenom morfismy (jako monomorfismy, podobjekty, direktní součiny a dualita); všechny jsou příjemné i příhodné a žádný z nich nám nepřipraví žádné překvapení.

Důležitou částí teorie kategorií je teorie funktorů. Funktor je způsob, jak objektům a morfismům jedné kategorie přiřadit objekty a morfismy jiné kategorie. Typický příklad: každý vektorový prostor má svůj duál a každé lineární zobrazení má své adjungované zobrazení. Triviální příklad, který se však hodí (nazývaný zapomínající funktor): každý topologický prostor určuje množinu a každé spojité zobrazení určuje zobrazení — pouze zapomeňte na topologii a na spojitost, a tím přejdete z kategorie topologických prostorů do kategorie množin.

Teorie kategorií začala (a takovou i zůstává) jako pohodlný jazyk pro popis mnoha jevů a pro mnohé z nás to je vše, čím je. Pro uchváceného matematika je to předmět výzkumu, v němž lze zkoumat kvocientové kategorie, adjungované funktory, kategorie kategorií a další takové věže spletitých složitostí velkého půvabu — ať to dlouho vydrží.

Literatura: EDM 53/A

Pojem 5: *K***-teorie**. Jestliže $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ jsou konečněrozměrné vektorové prostory nad reálnými čísly, potom má stejnou vlastnost i jejich direktní součet $\mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$. Na první pohled vypadá tvoření direktních součtů jako naprosto úctyhodná sčítací operace, ale bližší pohled ukazuje, že je zde něco v nepořádku: tato sčítací operace není asociativní. Direktní součet $(\mathbf{U} \oplus \mathbf{V}) \oplus \mathbf{W}$ v mnohém připomíná direktní součet $\mathbf{U} \oplus (\mathbf{V} \oplus \mathbf{W})$, ale, přesně řečeno, není to totéž. Prvky prvního součtu jsou uspořádané dvojice, jejichž *první* složky jsou uspořádané dvojice, kdežto prvky druhého součtu jsou uspořádané dvojice, jejichž *druhé* složky jsou uspořádané dvojice. Pokušení definovat zobrazení, které každému prvku $((u, v), w)$ prvního direktního součtu přiřadí prvek $(u, (v, w))$ druhého, je jistě neodolatelné. Toto zobrazení je izomorfismus mezi zmíněnými direktními součty a přirozený způsob, jak se zbavit neasociativity, je tyto dva izomorfní vektorové prostory ztotožnit. Jestliže to uděláme (a v naší situaci je to zcela normální), vyvstane další malá překážka, které se stejně snadno zbavíme: musíme ověřit, že operace sčítání může být jednoznačně definována pro třídy navzájem izomorfních vektorových prostorů stejně jako byla definována pro jednotlivé vektorové prostory. Musíme tedy ukázat, že jestliže $\mathbf{U}$ a $\mathbf{U}'$ jsou izomorfní vektorové prostory a $\mathbf{V}$ a $\mathbf{V}'$ jsou rovněž izomorfní vektorové prostory, potom direktní součet $\mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$ je izomorfní s direktním součtem $\mathbf{U}' \oplus \mathbf{V}'$. To je pravda a je to téměř zřejmé. Jestliže si to uvědomíme, pak direktní součet dvou tříd navzájem izomorfních vektorových prostorů může být definován tak, že v každé třídě zvolíme jednoho reprezentanta, provedeme direktní součet těchto reprezentantů a pak utvoříme třídu, do níž náleží tento direktní součet.

Velmi dobře — můžeme tedy definovat jakýsi druh sčítání pro vektorové prostory (ano, souhlasím — správně bychom měli mluvit o třídách vektorových prostorů, ale každodenní matematický jazyk stejně mluví i nadále jen o vektorových prostorech a pouze připomíná naší mysli, že rovnost již neznamená poctivou rovnost, ale izomorfismus) — co pak můžeme říci o třídě všech vektorových prostorů vzhledem k tomuto sčítání? Přirozená otázka je, zdali takto dostaneme grupu. První část otázky se zodpoví snadno — existuje jednotkový prvek, to jest, neutrální vektorový prostor s vlastností, že jeho přičítáním k jiným vektorovým prostorům se nic nemění — jde o jednoznačně určený 0-rozměrný vektorový prostor. Druhá část odpovědi je skličujícím způsobem záporná: ne, vektorové prostory vzhledem k operaci direktního součtu netvoří grupu, protože inverzní, tj. záporné prvky zde neexistují.

Tento neúspěch není podstatný — není o nic vážnější než ten, který prožívá malé dítě, když se naučilo sčítat kladná celá čísla, objevilo nulu a je nyní odrazováno svou neschopností postupovat opačným směrem — odčítání nedává vždy smysl. Odečíst řekněme prvek u od prvku $u + v$ je možné, ale odečtení libovolného kladného celého čísla od jiného takového čísla může a nemusí být proveditelné. Podobně by mohl někdo říci, že odečíst prvek U od prvku $\mathsf{U} \oplus \mathsf{V}$ je dovoleno a dává výsledek V, ale co máme dělat v obecném případě a zejména, jak máme odečíst direktní součet $\mathsf{U} \oplus \mathsf{V}$ od prostoru U?

Východisko v případě vektorových prostorů je úplně stejné jako východisko používané pro celá čísla: celá čísla, která neexistují, se vytvoří příkazem nebo explicitní množinově teoretickou konstrukcí. Takto lze dodat záporná čísla a stejně tak „vektorové prostory se záporným znaménkem“ — a výsledek je zcela dokonalá grupa.

Jaká je to grupa? Odpověď je snadné zformulovat a snadné i pochopit — až na označení je to totéž, co aditivní grupa všech celých čísel. Věc je v tom, že jestliže ztotožníme každé dva izomorfní vektorové prostory, pak už není u dvou vektorových prostorů co rozlišovat s výjimkou dimenze (což je nezáporné celé číslo), a tedy způsob dodání „záporných prvků“ k souhrnu všech vektorových prostorů (nebo spíše jejich tříd ekvivalence) je přesně stejný, jako je postup při dodání záporných prvků k nezáporným celým číslům.

Postup uvedený výše může být realizován a ukázal se být plodným i v případě, že těleso reálných čísel je nahrazeno libovolným okruhem. Okruhy se v „reálném světě“ vyskytují častěji než tělesa, ale jejich zkoumání je obtížnější. Algebraická K-teorie je částečným pokusem čelit těmto těžkostem. V případě těles je vše jednodušší proto, že konečněrozměrný vektorový prostor má vždy konečnou bázi. Ne, to není zbytečná mnohomluvnost. Abychom si to uvědomili, zformulujeme tento výsledek jinak: konečně generovaný modul nad tělesem má konečnou bázi. (Připomeňme, že definice modulu je zcela podobná definici vektorového prostoru s tím, že v roli tělesa koeficientů se nyní může octnout libovolný okruh.) Problém je v tom, že odpovídající tvrzení vyslovené pro moduly nad okruhy místo nad tělesy, není vždy pravdivé. Je pravdivé pro „dobré“ moduly, ale přesná defini e toho, co je „dobré“, je technická podrobnost, která může být zcela jistě vypuštěna z přehledného článku, jako je náš. (Podle všeobecně přijaté definice jsou dobré moduly ty, které jsou konečně generované a projektivní.)

Nyní, jestliže vektorové prostory jsou nahrazeny moduly, pak grupově teoretická konstrukce probíhá z velké části podobně. Sčítání je definováno pro „dobré" moduly tak, že tvoříme jejich direktní součty; tuto definici je pak třeba ve výše uvedeném smyslu modifikovat, aby mohla být uplatněna na třídy ekvivalence modulů místo na samotné moduly; výsledkem je roztomilé asociativní sčítání s nulovým prvkem, ale bez inverzních prvků. (Pozor: užitečnou definicí ekvivalence je zde poněkud zeslabená verze izomorfismu, ale hlavní rysy teorie se každopádně nezmění.) Nechť jsou nyní přidány inverzní či opačné prvky, a to příkazem nebo obvyklou konstrukcí vytváření uspořádaných dvojic („rozdílů") a jejich tříd ekvivalence; výsledkem je grupa. Relace ekvivalence, která definuje naši grupu, přiřazuje každému modulu nad okruhem R nějaký prvek této grupy — tento prvek hraje roli zobecněné dimenze modulu. Grupa, která je takto přiřazena danému okruhu R, se označuje $K_0(R)$ a nazývá se Grothendieckova grupa okruhu R — a toto přiřazení je prvním krokem k tomu, čemu se říká K-teorie.

K-teorie dokáže více než tento první krok: obecně přiřazuje každému okruhu R a každému nezápornému celému číslu n abelovskou grupu $K_n(R)$, a to způsobem, který se stává stále více tajemným, jak číslo n roste. Pro $n = 0$ je výsledkem zobecnění dimenze, pro $n = 1$ jde o zobecnění determinantu; na to, co přijde potom, se ani neptejte. Ale každopádně neuškodí, jestliže se zběžně podíváme na případ $n = 1$.

Objekty v centru pozornosti nejsou tentokrát moduly, ale automorfismy modulů. Jestliže okruh koeficientů je těleso, což je pro začátek dobrý předpoklad, potom se můžeme na automorfismy dívat jako na nesingulární matice. Kdy by měly být dva takové objekty pokládány za ekvivalentní? Jedna možnost vycházející z klasické teorie je, že dvě matice nazveme ekvivalentní, jestliže jednu můžeme obdržet z druhé konečnou posloupností elementárních transformací. A elementární transformace? V této souvislosti to znamená, že přičteme libovolný číselný násobek některého řádku (nebo sloupce) k některému jinému řádku (nebo sloupci). Alternativní definice: nazveme danou matici elementární, jestliže je buď rovna jednotkové matici, nebo se od ní liší právě jedním nediagonálním prvkem. Elementární transformaci pak definujeme jako vynásobení, zprava nebo zleva, některou elementární maticí. Protože elementární matice má zřejmě vždy determinant rovný jedničce, plyne odtud, že každá matice patřící ke grupě vytvořené množinou všech elementárních matic má determinant 1 a že ekvivalentní matice musí mít týž determinant. Právě vyslovená dvě tvrzení jsou snazšími polovinami dvou lepších vět, které říkají, že matice má determinant rovný 1, ***když a jen když*** je součinem elementárních matic a že dvě nesingulární matice (nad tělesem) jsou ekvivalentní, ***když a jen když*** mají týž determinant. Shrneme: kvocient grupy všech invertibilních matic podle (normální) podgrupy generované elementárními maticemi je roven (nebo lépe, je izomorfní) multiplikativní grupě všech nenulových prvků tělesa koeficientů.

Cílem tohoto shrnutí bylo získat netriviální tvrzení o determinantech matic s prvky v tělese, ve kterém se slovo „determinant" vůbec nevyskytne. Pro matice s prvky v okruzích činí použití determinantů potíže, ale elementární transformace a elementární matice mají dokonale jasný smysl. Pojem, ke kterému vedou, se musí umět vypořádat se dvěma druhy operací s maticemi: algebraickými operacemi součtu a součinu a geometrickou operací direktního součtu. Nejlepší způsob, jak to udělat, je použít podobné úvahy pro nekonečné matice, z nichž každá je fakticky direktním součtem nekonečné jednotkové matice a konečné invertibilní matice (s prvky v předepsaném okruhu R). Výsledná faktorová grupa (podle podgrupy generované množinou všech elementárních matic) se označuje $K_1(R)$ a nazývá se Whiteheadova grupa okruhu R. Ukazuje se, že je abelovská (což je netriviální věta) a její elementy jsou zobecněními determinantů (matic s prvky v tělese) v témže smyslu, v jakém jsou prvky grupy $K_0(R)$ zobecněními dimenzí (vektorových prostorů nad tělesy).

Použití K-teorie v algebře a topologii je mnoho. Zmiňme se zvláště o tom, že topologická sestřenice výše popsané algebraické teorie se podstatným způsobem podílejí na důkazu Atiyahova-Singerova zobecnění Riemannovy-Rochovy věty.

Literatura: EDM 236/1.

Pojem 6: Rychlá Fourierova transformace. Fourierova transformace g funkce f na reálné ose je obvykle definována rovností

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{ixy}\, dy;$$

přitom se předpokládá, že integrál v nějakém dobrém smyslu existuje. Fourierova transformace je mocným nástrojem moderní čisté analýzy a je také mocným nástrojem klasické analýzy a mnohých jejích konkrétních aplikací. Při jejím použití je samozřejmě žádoucí minimalizovat příslušné výpočty. Není proto překvapující, že se často uplatňují různé aproximace jako nahrazení neomezeného intervalu omezeným a záměna integrálu součtem.

Proto přichází na scénu diskrétní Fourierova transformace — je to transformace, která n-tici $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ komplexních čísel přiřazuje n-tici $(y_0, \ldots, y_{n-1})$ definovanou rovnostmi

$$y_q = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} x_p e^{-2\pi i pq/n}, \quad q = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Tzv. rychlá Fourierova transformace je drobný postřeh — brilantní drobný postřeh — jehož objev se různě přisuzuje dvojici J. W. Cooley a J. W. Tukey (1965) a také C. F. Gaussovi (1805). Postřeh spočívá v tom, že součet, diskrétní Fourierovu transformaci, lze spočíst pomocí vyjádření ve tvaru součtu šikovných dílčích součtů s užitím šikovných algebraických vlastností vyskytujících se kořenů jedničky (čísel $e^{-2\pi i pq/n}$). Obecně rozšířený název pro zmíněné algebraické vlastnosti je „trigonometrické identity". Myšlenka, která takovou šikovnost umožňuje, spočívá v tom, že Vandermondova matice vytvořená z mocnin primitivních n-tých odmocnin z jedničky může být pro některá n faktorizována takovým způsobem, že příslušné matice mají mnoho nulových prvků a v důsledku toho výpočet dílčích součtů spotřebuje méně aritmetiky.

Podle definice diskrétn Fourierovy transformace se výpočet každého y_q skládá z výpočtu $n-1$ součinů (x_p krát $e^{-2\pi i pq/n}$ pro $p = 1, \ldots, n-1$) a pak $n-1$ součtů (částečné součty). Protože máme n hodnot y_q, celková práce znamená $n(n-1)$ sčítání a tentýž počet násobení.

Nejjednodušší verze rychlé Fourierovy transformace se hodí na případ, že n je součinem dvou činitelů, $n = hk$. V takovém případě si může rychlá Fourierova transformace vyžádat pouhých $n(h+k+1)$ sčítání a $n(h+k)$ násobení. Když např. $n = 100 = 10\times 10$, přímá metoda znamená 9 900 sčítání a 9 900 násobení, zatímco rychlá metoda stojí 1 900 sčítání a 2 000 násobení — obrovský rozdíl, který se zvětšuje s rostoucím n a při iteracích procesu.

Je to krásná a užitečná součást té partie matematiky, které se říkávalo numerická analýza (před příchodem názvu informatika). Je to více než trik? Dává nám to jakékoli poučení pro čistou analýzu, pro grupu odmocnin z jedničky? Má to hodnotnou obdobu v jiných grupách?

Literatura: MI 7/3/49

Pojem 7: Nestandardní analýza. Leibniz používal nekonečna a nekonečně malé veličiny, ale připouštěl, že je to poněkud choulostivá půda. Jeho následovníci vyhnali takové věci z matematického nebe a místo toho pracovali s epsilony a deltami. Moderní teorie nestandardní analýzy vytáhla zapovězené pojmy z podsvětí a snaží se je postavit na nohy po boku Cauchyova trůnu.

K nekonečně malým veličinám lze přistupovat tak, že je považujeme za „ideální“ prvky, které se v tomto smyslu podobají bodům v nekonečnu u projektivní roviny. Jakmile se předpokládá jejich existence nebo jsou definovány či sestrojeny, hlavním nástrojem pro práci s nimi je tzv. princip přenosu, který zhruba říká, že cokoli lze ve vhodném formálním jazyku vyjádřit pravdivě o nestandardním světě, zůstává pravdivé o standardním světě.

Základní standardní svět zhruba sestává z „individuí“ (Urelemente), z množin z nich sestavených, z množin množin a z množin množin množin a tak dále ad infinitum. Nestandardní svět má mnoho dalších prvků, zhruba to jsou funkce s hodnotami ve standardním světě nebo (poněkud přesněji) třídy funkcí, které byly vytvořeny ztotožněním vzhledem k vhodné ekvivalenci. V jistém smyslu nové prvky připomínají posloupnosti. Konstantní posloupnost, jejíž konstantní hodnota patří do standardního světa, přebírá roli této hodnoty, ale existují posloupnosti, které jsou nekonečně malé (konvergují k 0) a jiné, které jsou nekonečně velké (divergují k ∞) a v demokracii nestandardního světa se s nimi zachází rovnoprávně.

Připuštění takových světů vede k uspořádaným tělesům, která se podobají tělesu reálných čísel. V dané teorii roli tohoto tělesa přebírají, ale už nejsou archimedovská, tj. nemají s reálnými čísly tu společnou vlastnost, že malá věc, pokud je dost dlouho nasčítávána, se stane velkou věcí. Zdá se, že pro ty, kteří se dobře cítí při užívání formálních jazyků a věří, že nekonečně malé a nekonečně velké veličiny jsou intuitivně jasné a příjemné pojmy, je nestandardní analýza účinným nástrojem. Takoví lidé umějí užívat jazyk nestandardní analýzy k vymýšlení a jsou tím, jak říkají, vedeni k objevům, které by člověku jinak unikaly. Dosud největší jejich ojedinělé vítězství (jediné, které každý na víru obracející článek cituje) je první důkaz věty o invariantním podprostoru pro jisté speciální operátory v Hilbertově prostoru od Allena Bernsteina a Abrahama Robinsona. Vcelku oprávněně se nenechají otravovat tím, že brzy po prvním (nestandardním) důkazu se dospělo k jinému důkazu (úplně standardnímu).

Budoucnost nestandardní analýzy není většině nevěřících stále jasná. Stane se nebo se nestane zavedenou partií matematiky, nahradí nebo nenahradí epsilony a delty?

Literatura: EDM 274/E

Pojem 8: Katastrofy. Představme si parabolu danou rovnicí $y^2 = x$ a uvažujme zobrazení (projekci) $(x, y) \to x$ této křivky do (nezáporné části) x-ové osy. Až na jedinou výjimku má každý bod křivky okolí, které je homeomorfní svému obrazu při projekci, což je otevřený interval přímky. Výjimkou je ovšem počátek: pro žádné okolí počátku není projekce bijektivním zobrazením. Tento jev je popsán rčením, že počátek je singulárním bodem (hladkého) zobrazení jednorozměrné variety (paraboly) do jiné jednorozměrné variety (souřadnicové osy).

Uvažujme nyní kulovou plochu, promítněme ji kolmo do roviny a všimněme si, že lokální chování projekce se mění od bodu k bodu. Každý bod na severní polokouli má okolí, pro něž je projekce homeomorfismem, a totéž platí pro jižní polokouli, avšak v bodech rovníku má projekce druh singularity nazývaný „záhyb“ (fold). Lokálně to vypadá jako „fald“, viďte? Malé okolí bodu na rovníku je při projekci jakoby přeloženo přes sebe.

Dále uvažujme vhodnou kubickou plochu (představme si ji jako rovinu, která je nejprve zčásti přeložena přes sebe a potom zase přehnuta zpět v poněkud odlišném úhlu), promítněme ji kolmo do promítací roviny a poznamenejme, že tentokrát se může projekce chovat špatně více způsoby. V případě kulové plochy měl každý bod roviny, do kterého se promítl některý bod plochy, buďto jeden nebo dva vzory; v případě kubické plochy může být počet vzorů 1, 2 nebo 3. Body, ve kterých jsou 3 vzory, odpovídají regulárním bodům při projekci, body se dvěma vzory odpovídají singularitám typu záhyb a je zde ještě jeden bod s pouze jedním vzorem, pocházející ze singularity zvané hrot (cusp). (Ostatní body s jedním vzorem odpovídají opět regulárním bodům plochy, pozn. překl.) Důvod pro naši terminologii je zde v tom, že body „záhybu“ na ploše se promítají do „polokubické paraboly“ v rovině, jejíž hrot (v obvyklém smyslu toho slova) vznikne ze stejnojmenné singularity.

Matematická část teorie katastrof studuje problém klasifikace singularit hladkých zobrazení (takových, jako jsou výše popsané projekce) mezi hladkými varietami (jako jsou parabola, sféra a kubická plocha). Typický výsledek (v dvojrozměrném případě) říká, že každé hladké zobrazení plochy do roviny má, po případné malé perturbaci, za singularity pouze záhyby a hroty. Ve vyšších dimenzích existují podobné (a překvapivě stručné) úplné seznamy „elementárních katastrof“. Teorie má své počátky ve Whitneyho díle z roku 1955; od té doby byla obšírně pěstována i aplikována několika matematiky. Seznam autorů zahrnuje francouzského matematika Thoma a ruského matematika Arnolda; oba významně přispěli jak k teorii, tak i aplikacím. Všeobecně uznávané aplikace existují například v problémech šíření vln, při studiu elastické stability a v geometrické optice.

Odkud se vzal termín ‚katastrofa“? Údajně byl navržen (Thomem?) jako vhodný způsob popisu překvapivě nespojitých změn v okolním světě. Zde je jednoduchý příklad: zavěste závaží na vodorovný trám a ptejte se, jaké je největší snesitelné zatížení. Intuice a zkušenost napovídají, že jak se zvětšuje zátěž, nic zvláštního se neděje, snad až na mírné prohnutí. Potom trám náhle praskne a závaží spadne — příklad katastrofy. Složitější příklad, o kterém se zmiňuje téměř každý, kdo o tomto předmětu píše, se týká stupně agresivity psa, k němuž se blíží předpokládaný nepřítel. Pes pociťuje současně strach a zuřivost — který z obou pocitů je větší? Jaká bude jeho reakce: útěk nebo útok? Znovu nám intuice a zkušenost napovídá, že pes se nejprve zachová zbaběle a začne couvat. Potom však, protože vzdálenost nepřítele se příliš zmenšila a hrozba se zvýšila nad snesitelnou míru, pes náhle zavrčí a zaútočí — opět katastrofa.

Jak se mohlo stát, že hluboká matematická teorie, se skutečnými a cennými aplikacemi, se stala tak spornou jako právě teorie katastrof? Není vůbec nic špatného na větách, které dokázali Whitney, Thom, Arnold a jiní — čeho se pak týkají polemiky? Stalo se to proto, že někteří zastánci této teorie (zvláště sám Thom a Zeeman) popisují a nárokují si aplikace, které se jiným autorům (zvláště Arnoldovi) zdají být přitažené za vlasy a nerozumné. Aplikace údajně existují v ekonomii, embryologii, lingvistice, psychologii a v jiných oborech a zahrnují též jevy, jako jsou volby, duševní poruchy, vězeňské vzpoury, srdeční puls, krachy na burzách a vypuknutí války.

Zde uvádím čtyři z mnoha komentářů, které pocházejí od Arnolda:

„Matematické články zakladatele teorie katastrof, René Thoma, byly vydány ve formě kapesního průvodce — to je něco, co se v matematice nestalo od dob vzniku kybernetiky, od níž teorie katastrof převzala mnohé reklamní praktiky."

„Zvláštní stránkou Thomovy práce v teorii katastrof je jeho originální styl: zavedl módu, podle které není třeba uvádět ani zkratkovité formulace výsledků, natož pak jejich důkazy."

„Jestliže zobrazení, které nás zajímá, je známo do všech podrobností, dostáváme víceméně přímou aplikaci matematické teorie singularit na různé přírodní jevy ... Ve většině prací o teorii katastrof se však uvažují spornější situace, ve kterých nejenže nejsou známy detaily potřebného zobrazení, ale i jeho samotná existence je problematická."

„Nedostatky ... teorie katastrof jsou příliš zřejmé, než abychom o nich museli pojednávat podrobně. Poznamenejme jen, že články o teorii katastrof se vyznačují katastrofálním snižováním úrovně požadavků na přesnost a také požadavků na novost publikovaných výsledků. I když lze chápat negativní reakci specialistů v teorii katastrof na tradiční záplavu přesných, avšak nudných a epigonských matematických prací, jejich nedostatek ohledů k předchůdcům (kteří jsou autory většiny konkrétních výsledků) lze jen těžko ospravedlnit."

Literatura: EDM 410/K

Pojem 9: Chaos. Slova „bod" a „prvek množiny" jsou pro matematika fakticky synonyma. Dovolte mi předložit rozumně složitou množinu, jejíž „body" jsou přece jenom komplikovanější než body, s nimiž se většina studentů obvykle setkává. Začněme s uzavřeným intervalem $I = [0, 1]$ a označme X množinu všech konečných disjunktních sjednocení nedegenerovaných uzavřených intervalů obsažených v I. („Nedegenerovaný" znamená, že jednobodové množiny nepovažujeme za intervaly.) „Bod" bude znamenat v následujícím odstavci libovolný prvek z X.

Nechť T_C je zobrazení množiny X do sebe, které působí na každý bod P tak, že odstraní otevřenou prostřední třetinu každého uzavřeného intervalu, z nichž se P skládá. Uveďme příklad: poněvadž sám interval I je bodem X, obraz $T_C(I)$ má smysl a je roven množině (bodu) $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Co se stane, když se zobrazení T_C množiny X do sebe iteruje? Začněme například s I a postupně vytvořme $T_C(I), T_C^2(I), T_C^3(I), \ldots$. Taková klesající posloupnost konečných sjednocení uzavřených intervalů je důvěrně známá každému, kdo si někdy zapsal přednášku z reálné analýzy: průnik této posloupnosti množin je klasické Cantorovo diskontinuum. (Indexem C chceme připomenout Cantora.)

Takto popsaná transformace je umělý, ale zajímavý a inspirující příklad dynamického systému. Dynamický systém (podle nejobecnější definice) je zobrazení množiny do sebe. Tato definice je však příliš obecná, než aby se moc hodila. Pojem se stává užitečný, když příslušná množina a transformace, která na ni působí, mají určitou matematicky zajímavou strukturu (algebraickou, analytickou nebo geometrickou) a ve všech existujících pracích o dynamických systémech se taková další struktura skutečně vyskytuje.

Pojem „chaosu" je závislý na pojmu dynamického systému. Zhruba řečeno, teorie chaosu je studium chování (špatného chování?) dynamických systémů v nekonečnu. Vezměme libovolnou transformaci T libovolné množiny X do X, vytvořme postupně iterace T, T^2, T^3, ... a pak položme inteligentní otázku, která se jich týká. Příklad: nechť X je reálná osa, definujme Tx jako $\cos x$ pro každé x z X a zeptejme se: co se pro různá x děje s posloupností x, Tx, T^2x, T^3x, ...? Získat odpověď je lehké, ale pokud jste se tím nikdy nezabývali, poradil bych vám nejprve vzít kalkulačku mající tlačítko „cos", začít podle chuti s libovolným počátečním vstupem x a stále opakovaně mačkat „cos". (Výsledek vypadá trochu zajímavěji, když místo stupňů pracujete s radiány.)

Dalším příkladem je výše uvedený dynamický systém T_C. Abychom dostali ještě jiný, a to mnohem hlubší příklad, uvažujme za X uzavřený interval se ztotožněnými koncovými body, takže tentokrát „bodem" je reálné číslo mezi 0 a 1 (včetně) s tím, že 0 a 1 se počítají za stejný bod, a za T_2 vezměme zobrazení „dvojnásobek modulo 1". Tak např.

$$T_2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3},$$

$$T_2\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2} \pmod 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2},$$

$$T_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad .$$

a

$$T_2(\sqrt{2} - 1) = T_2(1{,}414 \ \ldots - 1) = 2\sqrt{2} - 2 \pmod 1 = 2{,}8284\ldots - 2 = 0{,}8284\ldots$$

Co se s posloupností x, T_2x, T_2^2x, T_2^3x, ... děje pro různé hodnoty x? Může konvergovat? Může uzávěr jejích hodnot obsahovat otevřený interval? Tento příklad přes svůj relativně nevinný vzhled je ve skutečnosti dosti hluboký; je to blízký příbuzný jednoho topologicky důležitého příkladu (tzv. Smaleovy podkovy) a jednoho analyticky důležitého příkladu (tzv. jednostranného posuvu).

Příklad dynamického systému, který více než ty předchozí připomíná klasickou analýzu, se dostane takto: zvolme dvojici konstant a, b a definujme $T = T_{a,b}$ v $\mathbf{R}^2$ rovností

$$T_{a,b}(x, y) = (y + 1 - ax^2, bx).$$

Transformace tohoto druhu byly zavedeny a studovány Hénonem. Vzorec z definice nenažene strach ani studentům základů analytické geometrie, ale studium těchto transformací je delikátní a zajímavé. Jejich vlastnosti samozřejmě závisí na parametrech a a, b. Je-li např. $a = 1{,}3$ a $b = 0{,}3$, pak existuje sedmibodová množina v rovině, která představuje „periodický atraktor". To znamená, že iterované obrazy určitého bodu roviny buď utečou do nekonečna, nebo se stále více přibližují k jednomu z těch sedmi bodů, potom k dalšímu, ještě k dalšímu a pak, v osmém kroku, ještě blíže k prvnímu, potom k druhému atd. Jestliže, na druhé straně, $a = 1{,}4$ a $b = 0{,}3$, pak iterované obrazy některých bodů utečou do nekonečna, zatímco pro jiné body se tyto obrazy shlukují ke složitému systému křivek, které představují to, čemu se říká „podivný atraktor" („Hénonův atraktor"). Dobrá definice tohoto pojmu na sebe stále dává čekat. Zdá se, že hlavní vlastnost podivného atraktoru je v tom, že je to nekonečná množina s „citlivou závislostí" na počátečních podmínkách (ať už znamená cokoli). Podivné atraktory se např. vyskytují při studiu turbulence.

Proč se užívá slovo „chaos"? Důvod je patrně podobný tomu, co bylo příčinou, že se katastrofy nazývají katastrofami. Zdá se, že to bude subjektivní (ve skutečnosti ne matematická) reakce na neočekávaný projev nespojitosti. Zdrojem zmatku může být skutečnost, že překvapivá nespojitost může nastat ve dvou rozdílných částech teorie. Dynamický systém často závisí na určitých parametrech (stejně jako Hénonova transformace T_{ab} závisí na a a b) a posloupnost iterací $x, Tx, T^2x, T^3x, \ldots$ dynamického systému T aplikovaného na určité x ovšem vždy závisí na počátečním bodu x. Překvapivá změna chování Hénonových transformací (od periodického atraktoru k podivnému atraktoru) se považuje za chaos — nepředvídatelnost — a samotná existence Hénonových podivných atraktorů, která v definici dynamického systému není nikterak viditelná, se považuje za chaos — nepředvídatelnost. Rád bych zaznamenal hlas odporu proti postoji, který tato terminologie vyvolává. Výsledky netriviální matematiky jsou často překvapivé, a když je ve hře nekonečno, je to ještě pravděpodobnější. Není snadné při pohledu na transformaci říci, co provedou její nekonečné iterace, avšak jen to, že různé vstupy nespojitě vyvolají různé výstupy, neospravedlňuje označit je za chaotické.

Jedna část teorie chaosu si vydobyla popularitu (neblahou proslulost?) a žádné povídání o chaosu se neobejde alespoň bez zmínky o ní. Mám na mysli věc, které se říká „fraktály".

Umělý dynamický systém T_C, kterým jsme výklad zahájili, vedl ke Cantorově množině, která se objevuje v chaosu často a přirozeným způsobem. Zvláštní a důležitou vlastností Cantorovy množiny je to, že její část v intervalu $[0, \frac{1}{3}]$ je podobná celé množině — prostě nafoukněte tuto část pomocí stejnolehlosti $x \mapsto 3x$ a kousek množiny přejde na celou množinu. Podobně je část Cantorovy množiny v intervalu $[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}]$ podobná celé množině. Ve skutečnosti obsahuje každé okolí z každého bodu z Cantorovy množiny podmnožinu podobnou celé Cantorově množině. Iterace transformací mají sklon k vyrábění množin, které vykazují takovou „vnitřní podobnost", tj. množin, které jsou invariantní ke změně měřítka; sám Hénonův atraktor je dalším příkladem.

Pro matematickou veřejnost není tento jev nový. Dlouho bylo známo, že Cantorova množina je prototypem velké skupiny množin získaných různými architektonickými úpravami. Příklad: vynechávejte, řekněme, místo prostřední třetiny prostřední pětinu. Jiný příklad: nahraďte vyňaté otevřené střední intervaly třeba rovnostrannými trojúhelníky. Ještě jiný: proveďte vynechávání středních částí místo na intervalu v obdélnících, kruzích či jiných zajímavých podmnožinách roviny. Všechny takové množiny vykazují lokální vlastnosti, které jsou při prvním setkání atraktivní a překvapující, ale které se po delší známosti stávají tak nepřekvapující, že jsou skoro banální — jsou jako přátelé, jejichž společnost je stále žádoucí, ale jejichž figura a i gesta zůstávají dobře známá, i když zestárnou nebo si nasadí masku.

Cantorova množina je fraktál a takové jsou i variace na dané téma. (Zde nepotřebujeme žádnou definici tohoto obecného pojmu, ale uvedu jen tak mimochodem tuto standardní definici: fraktál je množina, jejíž dimenze v obvyklém topologickém smyslu, která je nejvýše rovna její Hausdorffově-Besicovitchově dimenzi, je ve skutečnosti ostře menší. Topologická dimenze Cantorovy množiny je 0 a její Hausdorffova-Besicovitchova dimenze je $\log 2 / \log 3$.) Důvodem pro popularitu fraktálů je jejich pěkný vzhled. Určité rovinné verze Cantorovy množiny, obarvené či nikoli, se dobře vyjímají na stěně vašeho obývacího pokoje. Změny jejich velikostí a tvarů mohou vytvořit dostatečně hezké obrazy, aby ze stěny či dokonce celého pokoje udělaly muzeum moderního umění.

„Umění" — to je slovo, které je třeba zdůraznit. Velký matematik vytváří nové věty, objevuje jejich krásné důkazy a svými publikacemi se s námi o své výsledky dělí. Velký kuchař vytváří nová jídla, objevuje jejich důmyslné recepty a svými výtvory se s námi o své výsledky dělí. Nekonečná iterace ve stylu Andy Warhola na etiketě polévkové konzervy se může těšit oblibě, a může být uměním, má však málo co do činění s kuchařovým talentem. Nekonečná iterace ve stylu Cantorových množin může být oblíbeným tématem pro konverzaci a může být uměním, ale má málo co dělat s matematickým proniknutím do podstaty věci. Malůvky na polévkových konzervách — to není vaření; obrázky Cantorových množin — to není matematika.

Literatura: MI 2/3/126

Druhá část článku bude otištěna v příštím čísle

Musím sa priznať, že som si vždy veľmi prial poznať hanlivé posudky o sebe; kto mi ich povedal, bol mi viac milejší ako ten, kto mi rozprával o chvále, ktorú mi niekto uštedril inde, hlavne ak sa to stalo od ľudí málo učených alebo so zjavným preháňaním. Dodnes som nebol tak šťastný, aby som napísal čo len úplne krátky článok, na ktorom by som neobjavil, kedykoľvek som sa naň znovu pozrel, nedostatky, ktoré mi pripadali tak veľké, že som sa za ne hanbil. Hlavne pokiaľ ide o moje príhovory.

Bernard Bolzano