Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Arend Heyting
O intuicionismu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 17 (1972), No. 1, 4--15

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139642

O INTUICIONISMU

A. Heyting

V roce 1956 vyšla z pera A. Heytinga, profesora matematiky na universitě v Amsterodamu, nevelká knížka o intuicionismu (A. Heyting, Intuitionism, An Introduction, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1956). V roce 1965 vyšel tento spis v ruském překladu (A. Gejting, Intuicionizm, Vvedenie, překladatel A. A. Jankov, redaktor publikace A. A. Markov, Biblioteka sbornika „Matematika", Izd. MIR, Moskva 1965) a A. A. Markov k němu připojil komentáře.

Heytingova publikace je velmi zajímavá a poučná. Mohou ji s porozuměním číst nejen matematikové všech specializací, ale i ti, kteří se zajímají o logiku a o filosofii přírodních věd, a nejsou při tom profesionálními matematiky. Než o tom dejme hovořit následujícím úvodním odstavcům.

Našim čtenářům předkládáme z citované knížky kromě zmíněných úvodních odstavců český překlad první kapitoly, nazvané „Disputace". Český překlad by pořízen z ruského vydání.

Josef Veselka

Poznámka redakce PMFA: Autoři českého překladu doplnili překlad odkazy na literaturu. Redakce se domnívá, že čtenář, kterého naše ukázka zaujme, sáhne po originálu nebo po ruském překladu celé knihy, kde najde dostatečně obsáhlý přehled literatury. Proto jsme odkazy z překladu vypustili.

Úvodní slovo matematické redakce sborníku Matematika

V knize A. Heytinga lze vidět monografii o základech matematiky. K otázkám základů matematiky (teorie matematického důkazu, problém existence v matematice) se v ní přistupuje z hlediska intuicionismu, matematického směru, jehož je autor významným představitelem.

Kniha je napsána ve formě živého rozhovoru představitelů různých stanovisek k otázkám základů matematiky. Redaktor publikace, A. A. Markov, představitel konstruktivistického směru, o kterém se A. Heyting nezmiňuje, se k rozhovoru připojuje. Ve svých komentářích nejen uvádí dalšího diskutéra, ale snaží se také odstranit některé autorovy nepřesnosti.

Kniha je určena širokému čtenářskému publiku, od matematiků všech specializací po všechny, kteří se zajímají o matematickou logiku a o filosofické problémy v přírodovědě.

Z úvodního slova autora

Abych čtenáři ušetřil čas, který by vynakládal na řešení hádanek, ujišťuji ho, že osoby zúčastněné na rozhovoru nejsou ani karikaturami žijících nebo zemřelých lidí, ani jejich dvojníci. Představují jen jakési nositele idejí — nic více. Do jisté míry to platí i o INTOVI, který reprezentuje intuicionismus. Pro větší jasnost jsem ho někdy přiměl hovořit kategoričtěji, než bych to činil sám, kdybych vyslovoval svá vlastní mínění. Diskuse je přísně omezena intuicionismem. Jiných koncepcí matematiky se dotýká jen potud, pokud tyto koncepce v sobě obsahují protiintuicionistické prvky. Odmítám proto jakoukoli výtku, pokud jde o neúplnost ve výkladu jiných stanovisek.

Během výkladu se ukazovalo, že je nezbytné podávat důkazy i tam, kde se tyto důkazy liší od dobře známých klasických důkazů jen nevelkými doplňky, neboť není vhodného způsobu ukázat, kam tyto doplňky zařadit. S hromaděním látky jsem postupně zhušťoval styl výkladu, v dobré víře, že se čtenář postupně naučí chápat specifické potíže intuicionismu ...

... Možná, že někde jdu starými metodami, poněvadž neznám metody dnešní. Jedním z cílů knížky je pomoci matematikům v otázce, které z jejich výsledků by bylo možno dokázat intuicionisticky. Intuicionismus se může úspěšně rozvíjet jen tehdy, když se matematikové různých specializací budou o něj zajímat a aktivně v něm pracovat. K tomu, aby bylo možno vybudovat dobře vymezenou intuicionistickou matematiku, je především nutné dobře znát dnešní obory klasické matematiky a za druhé, vědět ze zkušenosti, kde jsou intuicionistická „nebezpečí". V této knížce se snažím o to druhé. Věřím, že se najdou čtenáři, kteří se s větším úspěchem, než se to podařilo mně, vyrovnají s podrobnostmi teorie, a podají intuicionistický výklad jiných matematických disciplín...

A. Heyting

Úvodní slovo A. A. Markova, redaktora publikace

Kniha, kterou dostává čtenář do rukou, je věnována systematickému výkladu intuicionismu, matematického směru založeného počátkem tohoto století pracemi Brouwera, Weyla a autora této knihy. I když jsou dnes intuicionistické názory sdíleny jen nemnoha matematiky, zdaleka nemají pravdu ti, kteří vidí v intuicionismu jen jakousi „kuriozitu". Jde o to, že mnoho intuicionistických názorů přijali a osvojili si matematikové konstruktivistického směru, který neuspokojuje matematiky „množinového myšlení", dnes vládnoucího. Tito matematikové sdílejí zejména kritický postoj intuicionistů k principu „tertium non datur"*).

Již proto není rozumné řadit intuicionismus do kategorie „kuriozit". Redaktor překladu, předkládaného čtenáři, sám představitel konstruktivistického směru v matematice, viděl svůj hlavní úkol v konfrontování stanoviska intuicionismu se stanoviskem konstruktivismu v matematice. Tomuto úkolu je také věnována většina poznámek redaktora, uvedených na konci knihy.

Vzhledem k nenucené diskusní formě autorova výkladu uvádí redaktor ve svých komentářích ještě jednoho účastníka disputace — pana KONA, který reprezentuje konstruktivistický směr v matematice**).

A. Markov

* * *

*) Zákon vyloučeného třetího, vyloučení třetí možnosti, dvojhodnotová logika. Například, jsou-li a, b reálná čísla, je podle principu tertium non datur buď $a = b$, nebo $a \neq b$. Nic „třetího" nemůže být. P. p.

**) Markovovy komentáře označujeme dále jen slovem „komentář" v závorkách. P. p.

Účastníci disputace: pánové KLAS, FORM, INT, LET, PRAGM, SIGN*).

(Komentář) FORM, INT, PRAGM a SIGN představují „formalistu“, „intuicionistu“, „pragmatika“ a „significistu“. KLAS je představitelem klasické matematiky. Pro redakci je obtížné vysvětlit smysl jména BUKV (v anglickém originále „Letter“**)). V dalších komentářích často vystupuje ještě jeden účastník diskuse – KON – představitel konstruktivistického směru v matematice.

DISPUTACE

KLAS: Jak se Vám vede, pane Inte? Vy jste si v tomto krásném počasí nikam nevyjel?

INT: Všelicos mne napadlo; přemýšlel jsem o tom v knihovně.

KLAS: Pracovitá včeličko! A jak se máte jinak?

INT: Celkem dobře. Neměl byste chuť na skleničku?

KLAS: Děkuji. Vsadil bych se, že jste se věnoval svému koníčku – odmítání principu *tertium non datur* – a podobným věcem. Nemohu pochopit, proč se na logiku můžeme spolehnout kdekoli, jen ne v matematice.

INT: Na toto téma jsme již hovořili. O myšlence, že by snad mohla být pro popis některých druhů objektů vhodnější jiná logika než běžná, se diskutovalo čas od času i před intuicionismem. Ale teprve Brouwer jako první objevil objekt, který opravdu vyžaduje jinou formu logiky. Tímto objektem je myšlenková matematická konstrukce. Příčina je v tom, že v matematice máme již od samého počátku co dělat s nekonečnem, zatímco obyčejná logika je vytvořena jen pro úvahy o konečných souborech.

KON (komentář): Buďte zdrávi kolegové! Slyším, že tady pan Int vykládá své krédo. Má naprostou pravdu v tom, že matematické konstrukce vyžadují zvláštní logiku. Nemohu však souhlasit s tím, že matematika má „od samého počátku“ co dělat s „nekonečnem“. „Nekonečno“ se zavádí do matematiky abstrakcí. Používá se abstrakce potenciální uskutečnitelnosti a abstrakce aktuálního nekonečna. Podstata druhého z těchto pojmů není mi jasná, podstata prvního spočívá v abstrahování od praktických hranic našich konstruktivních možností podmíněných omezeností času, prostoru a materiálních prostředků, jimiž disponujeme. Myšlenkové konstrukce, o nichž právě hovořil pan Int, jsou potenciálně uskutečnitelné. Jako pravzory mají

---

*) V ruském překladu se debatér LET jmenuje BUKV — podle ruského „bukva“ = hláska. V angličtině se hláska nazývá „letter“. Překladatelé zvolili proto jméno LET. Viz také následující komentář v textu. P. p.

**) Viz předešlou pozn. P. p.

prakticky uskutečnitelné materiální konstrukce. Zkoumání potenciálně uskutečnitelných konstrukcí vyžaduje zvláštní logiky – konstruktivistické matematické logiky.

KLAS: Já vím, ale podle mého názoru je logika univerzální a platí jak pro konečno, tak pro nekonečno.

INT: Musíte pochopit, v čem spočíval Brouwerův program. Brouwerův program spočíval ve zkoumání myšlenkové matematické konstrukce jako takové, bez vztahu k takovým otázkám, jako je povaha konstruovaných objektů, nebo zda tyto objekty existují nezávisle na našich poznatcích o nich. Že tento názor vede přímo k odmítnutí principu *tertium non datur*, mohu nejlépe ukázat na tomto příkladě:

Porovnejme tyto dvě definice:

I. Číslo p je největší prvočíslo takové, že $p - 1$ je také prvočíslo. Jestliže takové číslo neexistuje, je $p = 1$.

II. Číslo q je největší prvočíslo takové, že $q - 2$ je také prvočíslo. Jestliže takové číslo neexistuje, je $q = 1$.

Klasická matematika vůbec nepřihlíží k zřejmému rozdílu v charakteru těchto dvou definic. Číslo p můžeme stanovit ($p = 3$)*), zatímco metodu pro určení čísla q nemáme, protože není známo, zda posloupnost tzv. prvočíselných dvojčat, tj. prvočíselných dvojic tvaru q, $q + 2$, je konečná či nekonečná. Proto intuicionisté odmítají brát definici II za definici některého přirozeného čísla. Jsou toho názoru, že číslo je skutečně definováno teprve tehdy, když je dána metoda, jak je stanovit. Rozvíjíme-li tuto myšlenku dále, dojdeme k zamítnutí principu *tertium non datur*, neboť kdyby byla posloupnost „prvočíselných dvojčat“ konečná nebo nekonečná, byla by definice II definicí jistého přirozeného čísla.

KLAS: Lze namítnout, že stav našich poznatků o existenci či neexistenci posledního „prvočíselného dvojčete“ závisí na náhodných okolnostech, a že nemá žádný vztah k otázce matematické pravdy. Buď existuje nekonečně mnoho „prvočíselných dvojčat“, a potom je $q = 1$, nebo je jich jen konečně mnoho, a pak je q rovno největšímu z prvočísel takových, že q a $q - 2$ tvoří prvočíselné dvojče. V každém postižitelném případě je q definováno. Jaký má tedy význam otázka, zda je můžeme skutečně určit?

INT: Váš argument je svou povahou metafyzický. Jestliže slovo „existovat“ neznamená „být zkonstruováno“, pak musí mít nějaký metafyzický význam. Úkolem matematiky není tento význam zkoumat a rozhodovat, zda je výhodný. Nemáme nic proti tomu, jestliže nějaký matematik přijímá metafyzické teorie, protože mu imponují; Brouwerův program však vyžaduje, abychom studovali matematiku jako něco jednoduššího a bezprostřednějšího, než je metafyzika. Ve zkoumání myšlenkových matematických konstrukcí musí „existovat“ označovat totéž, co „být zkonstruováno“.

---

*) Je-li p prvočíslo, je p liché, tedy $p - 1$ je sudé, a jediné sudé prvočíslo je číslo 2. P. p.

KLAS: To znamená, že dokud nevíme, zda existuje poslední „prvočíselné dvojče“, II nebude definicí prvočísla, avšak jakmile bude tento problém vyřešen, II se stane okamžitě touto definicí. Dejme tomu, že 1. ledna 1980 bude dokázáno, že množina prvočíselných dvojčat je nekonečná*). Od tohoto okamžiku bude $q=1$. Platilo $q = 1$ před tímto datem, nebo nikoli?

INT: Matematický výrok vypovídá o faktu, že byla provedena určitá matematická konstrukce. Je jasné, že před tím, než byla konstrukce provedena, ještě provedena nebyla. Aplikováno na váš příklad, znamená to, že před lednem 1980 nebyla ještě rovnost $q = 1$ dokázána. To však není to, co máte na mysli. Mně se zdá, že se musíte vrátit k pojmům metafyzickým, aby byl jasný smysl vaší otázky, tj. vrátit se k jistému světu matematických věcí existujících nezávisle na našem poznání, k světu, v němž $q = 1$ je pravdou v jakémsi absolutním smyslu. Já však opakuji, že matematika nemá záviset na takových pojmech, jako jsou tyto. Ve skutečnosti jsou všichni matematikové, i intuicionisté, přesvědčeni, že matematika má v jistém smyslu vztah k věčným pravdám. Když se však pokoušíme upřesnit, v jakém smyslu, ukazuje se, že jsme vtaženi do chaosu metafyzických obtíží. Jediný způsob, jak se tomu vyhnout, je odstranit tyto potíže z matematiky. Právě to mám na mysli, když říkám, že studujeme matematické konstrukce jako takové, a že se klasická logika pro toto studium nehodí.

KON (komentář): Můj názor na formulaci II se trošičku liší od názoru pana Inta. Podle mého mínění nemusí nutně každá definice vymezovat neprázdnou množinu objektů jí definovaných. Někdy může být konstrukce takového objektu problémem, a dokud nebude tento problém vyřešen, nebudeme oprávněni tvrdit, že takový objekt existuje. Takový problematický charakter má právě definice II. Dnes není určeno, tj. není zkonstruováno číslo q, charakterizované touto definicí. Bude určeno až tehdy, až bude vyřešen problém „prvočíselných dvojčat“; a teprve potom budeme oprávněni říci, že číslo q existuje. Co se týče „věčnosti“ matematických pravd, domnívám se, že jde o otázku nejen metafyzickou, ale dokonce bezobsažnou. A existence v matematice – to je potenciální uskutečnitelnost konstrukce.

KLAS: Přicházejí naši přátelé, kolegové Form a Let. Kolegové, máme zde nanejvýš zajímavou diskusi o intuicionismu.

LET: Copak je možné s naším dobrým starým Intem hovořit o něčem jiném? Toto téma ho úplně uchvátilo.

INT: Uchvátí-li vás někdy krása předmětu, věnujte mu svůj život.

FORM: Výborně! Já se jenom divím, jakou krásu může mít taková neurčitá věc, jako je intuicionismus. Ani jeden z vašich termínů není jaksepatří definován, nemáte přesná pravidla pro dedukci. Proto nebude nikdy možno rozhodnout, které z vašich úvah jsou správné, a které nikoli.

---

*) V ruském překladu je 1. ledna 1970. Kniha vyšla ovšem v roce 1956, ruský překlad v roce 1965. P. p.

V běžné hovorové řeči nemá ani jedno slovo přesně vymezený a stabilní smysl. Vždy zůstává prostor pro volnou hru představ, a to prostor tím větší, čím je pojem abstraktnější. Proto si lidé někdy vzájemně dobře nerozumějí a k tomu dochází i v neformalizovaných matematických úvahách. Jediný způsob, jak dosáhnout absolutní přesnosti, je v tom, zbavit matematickou úvahu jakéhokoli obsahu a zkoumat ji samu o sobě jako posloupnost znaků, bez ohledu na jakýkoli význam, který tyto znaky mohou mít. Pak lze zformulovat přesná pravidla pro odvozování nových tvrzení z tvrzení již známých a vyhnout se neurčitostem, které vyplývají z mnohoznačnosti jazyka.

INT: Mně se zdá, že rozdíl mezi formalisty a intuicionisty je hlavně rozdílem ve vkusu. Vy také používáte v teorii, kterou nazývá Hilbert metamatematikou, logických úvah, ale kladete si za cíl oddělit je od čistě formální matematiky a omezit se proto na úvahy co možná nejjednodušší. My se naproti tomu nezajímáme o formální stránku matematiky, nýbrž právě o ten typ úvah, kterých se používá v metamatematice. Snažíme se jej prozkoumat do nejzazších důsledků. Dáváme mu přednost proto, že jsme přesvědčeni o tom, že zde jde o jednu z nejzákladnějších schopností lidského rozumu.

FORM: Jestliže se nebudete přít s formalismem, nebudu se já přít s intuicionismem. Formalisté patří k nejmírumilovnější části lidstva. Jakákoli teorie může být formalizována, a pak se stane předmětem našich metod. I intuicionistickou matematiku lze takto vykládat a bude tak učiněno.

KLAS: To znamená, že intuicionistickou matematiku je nutno studovat jako část matematiky. V matematice zkoumáme důsledky presumpcí. Intuicionistické presumpce mohou být sice zajímavé, ale nemají žádné právo na monopol.

INT:Vždyť my o to neusilujeme. Spokojíme se s tím, když přiznáte naší koncepci oprávněnost. Musím však odmítnout tvrzení, že intuicionismus vychází z jistých, více méně libovolných předpokladů. Jeho předmět – konstruktivní matematické myšlení – jednoznačně určuje jeho předpoklady a zařazuje jej nikoli do klasické matematiky, nýbrž vedle ní. Klasická matematika zkoumá zcela jiný předmět, ať je jakýkoli. Proto také není možná dohoda mezi formalismem a intuicionismem na podkladě formalizace intuicionistické matematiky. Je ovšem pravda, že i v intuicionistické matematice lze ukončenou část teorie formalizovat. Je však nutno prozkoumat, v čem je smysl takové formalizace. Na formální systém se můžeme dívat jako na lingvistické vyjádření matematického myšlení v určitém vhodném speciálním jazyce.

Přijmeme-li toto stanovisko, narazíme na překážku v podobě odvěké mnohovýznamnosti jazyka. Protože význam slova nelze fixovat natolik přesně, aby bylo možno vyloučit jakékoli nedorozumění, nemůžeme si nikdy být matematicky jisti, že formální systém správně vyjadřuje naše matematické myšlenky.

Přijměme však druhé stanovisko. Formální systém sám o sobě můžeme pokládat za nanejvýš jednoduchou matematickou strukturu. Její objekty (znaky systému) jsou spjaty s jinými, často velmi složitými matematickými strukturami. Formalizovat lze takto uvnitř matematiky samé a formalizování se pak stává mocným matematickým nástrojem. Nemůžeme si samozřejmě být jisti, že formální systém představuje beze zbytku nějakou oblast matematického myšlení. Objev nových metod nás může v kterémkoli okamžiku donutit formální systém rozšířit.

FORM: Tato situace je známa již několik let. Gödelova věta o neúplnosti ukázala, že jakýkoli bezesporný systém, který formalizuje teorii přirozených čísel, může být doplněn různými způsoby, aniž přestane být bezesporným.

INT: Rozdíl je v tom, že intuicionismus se rozvíjí nezávisle na formalizování, které může jen následovat matematické konstrukce.

KLAS: Nejvíce mne překvapuje to, že vy oba jako byste vycházeli z ničeho. Zdá se mi, že stavíte vzdušné zámky. Odkud víte, že jsou vaše úvahy správné, nemáte-li po ruce neomylné kritérium logiky? Včera jsem mluvil se Signem, který je ještě větším relativistou, než kterýkoli z vás. Vykrucuje se tak šikovně, že na něj neplatí žádný argument a sám nedochází k žádnému pevnému závěru. Obávám se, že je to osud každého, kdo odmítá opírat se o logiku, tj. o zdravý rozum.

SIGN: Vy o vlku a vlk za humny. Nepomlouvali jste mne tu?

KLAS: Zmínil jsem se o naší včerejší diskusi. Dnes bojuji se dvěma dalšími proklatými relativisty.

SIGN: Rád bych pomohl, ale nejdříve si poslechnu, co říkají vaši oponenti. Dovolte, abych vás seznámil se svým přítelem Pragmem. Velmi rád se této diskuse zúčastní.

FORM: Jak se daří? Vy jste také filosofem vědy?

PRAGM: Nenávidím metafyziku.

INT: V tom případě pěkně vítám, kolego!

FORM: Nechtěl bych hájit svou pozici teď, kdy se naše disputace týká hlavně intuicionismu a kdy se dá tak snadno zamotat. Obávám se však, že se mýlíte co se týče intuicionistické logiky. Ve skutečnosti je již formalizována a mnoho autorů předložilo v této oblasti cenné práce. Intuicionisté si zřejmě cení logiky více, než si myslíte, i když jejich logika se liší od té, na kterou jste si zvykli.

INT: Je mi líto, že vás zklamu. Logika není půdou, na které pevně stojím. A jak by také mohla být? Ona sama by potřebovala fundování, které by obsahovalo mnohem zamotanější a méně jasné principy, než jak je tomu u samé matematiky. Matematická konstrukce musí být pro rozum tak bezprostřední a její výsledek musí být tak jasný, aby nebylo třeba žádného fundování. Můžeme dobře pochopit, zda je ta či ona úvaha správná, aniž použijeme logiky. Stačí jasný, vědecky školený rozum. A přece je pravda, že se vyvinula intuicionistická logika. Abychom mohli ukázat, v čem je její význam, dovolte mi, abych uvedl jeden příklad: Nechť A znamená vlastnost přirozeného čísla být násobkem čísla 8, B vlastnost být násobkem čísla 4 a C vlastnost být násobkem čísla 2. $8a$ můžeme napsat jako $4.2a$. Díky této matematické konstrukci P vidíme, že vlastnost A má za následek vlastnost B neboli $A \Rightarrow B$. Podobně konstrukce Q ukazuje, že $B \Rightarrow C$. Superponujeme-li P a Q, dostaneme $8a = 2 . (2 . a)$, což dokazuje $A \Rightarrow C$. To lze přenést na obecné vlastnosti A, B, C. Jestliže konstrukce P ukazuje, že $A \Rightarrow B$, a konstrukce Q ukazuje, že $B \Rightarrow C$, pak superpozice konstrukcí P a Q vede k $A \Rightarrow C$. Dostali jsme logickou poučku. Postup, kterým byla odvozena, ukazuje, že se svou podstatou neliší od matematických pouček; je pouze obecnější v témž smyslu jako např. tvrzení, že sčítání celých čísel je komutativní" má obecnější charakter než tvrzení, že „$2 + 3 = 3 + 2$". Totéž platí pro každou logickou poučku: ona není ničím jiným než nejobecnější matematickou poučkou. Jinak řečeno, logika je částí matematiky a nemůže sloužit k jejímu fundování. Taková alespoň je koncepce logiky, k níž jsem dospěl přirozenou cestou. Je možné a žádoucí rozvíjet jiné formy logiky pro jiné účely.

Právě ta matematická logika, kterou jsem teď popsal, byla formalizována. Ukázalo se, že vzniklý formální systém má specifické vlastnosti, velmi zajímavé v porovnání s vlastnostmi jiných systémů formální logiky. Tato skutečnost vedla k výzkumům, o nichž se zmínil pan Form. Ale ať jsou jakkoli zajímavé, jejich sepětí s intuicionistickou matematikou je velmi slabé.

LET: Já si myslím, že všechno to jsou pomyslné a uměle vytvořené potíže. Matematika je naprosto jednoduchá záležitost. Definuji určité znaky a stanovím pravidla pro jejich kombinování — to je vše.

FORM: Potom však potřebujete nějaké formy usuzování, abyste dokázal, že váš formální systém je bezesporný.

LET: A proč bych to měl dokazovat? Nezapomínejte, že naše formální systémy jsou určeny pro aplikace a že jsou celkem vzato užitečné. Tento fakt by se dal těžko vysvětlit, kdyby v nich byl odvoditelný každý výrok. Proto jsme prakticky jisti, že si neodporují, což je pro naši práci dostačující. Já nesouhlasím s intuicionistickým tvrzením, že matematika nějakým způsobem souvisí s nekonečnem. Mohu napsat znak, třeba α, a nazvat jej mohutností množiny přirozených čísel. Pak mohu stanovit pravidla pro manipulaci s tímto znakem v souladu s pravidly, kterých používá pro tento pojem pan Klas. Při tom pracuji zcela v oblasti konečna. Objeví-li se pojem nekonečna, úvahy se zatemňují a zamotávají. Proto se mi zdají všechna tvrzení intuicionistů o nekonečnu velmi neurčitá a je dokonce pochybné, zda má takový symbol jako $10^{10^{10}}$ nějaký smysl a není-li jen znakem na papíře, s nímž pracujeme podle známých pravidel.

INT: Váš krajní finitismus ovšem poskytuje maximální záruku před nebezpečím nepochopení, avšak podle našeho názoru má za následek takovou negaci chápání, kterou lze jen stěží přijmout. Již děti v obecné škole chápou, co jsou přirozená čísla a akceptují skutečnost, že posloupnost přirozených čísel může být libovolně prodloužena.

LET: Dětem prostě toto chápání vnutili.

INT: To není argument, protože jakékoli sdělení prostřednictvím jazyka lze interpretovat jako vnucování. I Euklides, když ve 20. poučce IX. knihy dokazoval, že množina prvočísel je nekonečná, věděl, o čem hovoří. Elementární pojem přirozeného čísla, známý každé myslící bytosti, je základním pojmem v intuicionistické matematice. My neprohlašujeme, že je definovaný a přesný v absolutním smyslu — to by bylo neuskutečnitelné. Tvrdíme však, že je dostatečně jasný, aby na něm bylo možno vybudovat matematiku.

LET: Mohu namítnout, že nepředpokládáte příliš málo, jak myslí pan Klas, nýbrž příliš mnoho. Vycházíte ze známých principů, které bez zdůvodnění považujete za intuitivně jasné a zároveň zamítáte jiné formy soudů, aniž uvádíte důvody pro tuto diskriminaci. Na příklad většině lidí je princip *tertium non datur* při nejmenším stejně zřejmý jako princip úplné matematické indukce. Proč zamítáte první a akceptujete druhý? Taková neodůvodněná volba druhého z uvedených principů dává vašemu systému naprosto dogmatický charakter.

INT: Intuicionistická tvrzení musí ovšem připadat jako dogmata těm, kteří je chápou jako tvrzení o faktech. Mají však jiný smysl. Intuicionistická matematika spočívá, jak jsem již vysvětloval panu Klasovi, v myšlenkových konstrukcích: matematická věta vyjadřuje čistě empirickou skutečnost, a to úspěšnost určité konstrukce. Zápis, tvrzení „2 + 2 = 3 + 1" je nutno chápat jako zkratku pro výrok: „provedl jsem konstrukce, označené „2 + 2" a „3 + 1", a zjistil jsem, že vedou k témuž výsledku". Teď mi řekněte, kde je zde dogmatický prvek! Není v myšlenkové konstrukci, což vyplývá z jejího charakteru jako činnosti, tím méně pak v tvrzeních o původu konstrukcí, poněvadž tyto konstrukce vyjadřují čistě empirické výsledky.

LET: Ale vždyť vy tvrdíte, že tyto myšlenkové konstrukce vedou k jakémusi druhu pravdy, že to není jen jakýsi solitaire*), nýbrž že musí být v jistém smyslu pro lidstvo užitečné. Jinak byste jednali nesprávně a pohněvali si tím ostatní lidi. Právě v tomto požadavku vidím dogmatický prvek. Matematická intuice vás vede k objektivním a věčným pravdám; v tomto směru je váš názor nejen dogmatický, ale dokonce teleologický.

INT: Moje matematické myšlení je především součástí mého individuálního intelektuálního života a je omezeno mým vlastním rozumem jako všechny moje myšlenky vůbec. My jsme, obecně řečeno, přesvědčeni, že myšlení ostatních lidí je analogické našemu vlastnímu myšlení a že nám mohou rozumět, když vyjadřujeme své myšlenky slovy. Zároveň však víme, že si nikdy nemůžeme být naprosto jisti, že nám porozuměli úplně správně. V tomto ohledu se matematika v podstatě neliší od ostatních předmětů. Považujete-li matematiku za dogmatickou z této příčiny, musíte pokládat za dogmatickou jakoukoli lidskou úvahu. Pro matematické myšlení je charakteristické, že nevyjadřuje pravdu o vnějším světě, nýbrž že je spjato výhradně s myšlenkovými konstrukcemi. Musíme vymezit hranici mezi prostou matematickou praxí a jejím hodnocením. K vypracovávání matematických teorií není potřebí žádných filosofických premis, avšak hodnota, kterou připisujeme této činnosti, závisí na našich filosofických názorech.

---

*) Také „patience" — karetní hra pro jednoho hráče. P. p.

SIGN: Máte zastaralé názory na jazyk. Nestálý charakter, který jste popsal, mají prvobytné jazyky, přičemž běžný hovorový jazyk denního života patří v podstatě ještě k témuž typu, avšak s počátkem vědeckého myšlení začíná i formalizování jazyka. Semiotikové tento proces v posledních desetiletích studovali. Není ještě ukončen, protože neustále vznikají stále přesnější jazyky.

INT: Je-li formalizování jazyka opravdu cestou, kterou se věda ubírá, pak intuicionistická matematika k vědě v tomto smyslu nepatří. Je to spíše přirozená činnost člověka, která ovšem může být sama o sobě zkoumána vědeckými metodami. Byla takovými metodami skutečně zkoumána, a to metodou formalizování intuicionistických úvah a metodou semiotiky. Je však zřejmé, že ani toto zkoumání, ani jeho výsledky nepatří k intuicionistické matematice. Je jasné, že vědecké zkoumání intuicionistické matematiky nepřinese nikdy její přesný a úplný popis, právě tak, jako je nedosažitelná úplná teorie jiných jevů. Ať jsou tato metaintuicionistická zkoumání jakkoli zajímavá a užitečná, nelze je zařadit do intuicionistické matematiky samé. Tyto poznámky se samozřejmě netýkají formalizování uvnitř matematiky samé, což jsem popsal již dříve.

PRAGM: Dovolte mi, abych zdůraznil to, co nyní řekl pan Sign. Věda se dostává dopředu pomocí formalizování jazyka. Používá této metody, protože je to metoda efektivní. Zejména se ukázalo, že moderní, zcela formalizované jazyky jsou nejužitečnější. Ideálem moderního vědce je vytvořit zásobu formálních systémů, z nichž by si mohl vybrat pro libovolnou teorii systém, který by správně zobrazil výsledky pokusu. Formální systémy je nutno hodnotit podle kritéria užitečnosti, nikoli podle neurčitého a libovolného výkladu, který se preferuje z dogmatických a metafyzických důvodů.

INT: Mně se také zdá, že je naprosto spravedlivé hodnotit matematický systém podle jeho užitečnosti. Připouštím, že z tohoto hlediska měl intuicionismus dosud málo šancí na úspěch. Bylo by předčasné zdůrazňovat nečetné a nevýrazné známky toho, že může přinést nějaký užitek ve fyzice. Podle mého názoru má spíše naději, že přinese užitek ve filosofii, historii a v sociálních vědách. Z intuicionistického hlediska je matematika skutečně zkoumáním jistých funkcí lidského rozumu, a jako taková je těmto vědám blízká. Je však užitečnost jediným měřítkem hodnoty? Můžeme uvést oblasti lidské činnosti, které žádným způsobem vědě neslouží, a přece nejsou bez užitku. Je to třeba umění, sport, zábava. Prohlašujeme, že intuicionismus má hodnotu téhož druhu, kterou lze těžko předem popsat, ale kterou zcela jasně pociťujeme, když se jím zabýváme. Víte, jak je pro filosofy obtížné definovat pojem hodnoty v umění, avšak každý vzdělaný člověk tuto hodnotu cítí. Analogické je to i pro hodnotu intuicionistické matematiky.

FORM: Pro většinu matematiků tuto hodnotu osudným způsobem narušuje skutečnost, že ničíte nejcennější matematické výsledky. Moderní základy matematiky by měly zachránit co nejvíce těchto jejích výsledků. Lze toho dosáhnout i konstruktivními metodami, protože jsou možné definice konstruktivnosti odlišné od definice, kterou hájí intuicionisté. Vždyť ani nevelká skupina dnešních intuicionistů není jednotná v názoru na definici konstruktivnosti. Nejvýraznějším příkladem je Griss, který zavrhl pojem negace, který jiní intuicionisté pokládají za zcela jasný. Z druhé strany se zdá pravděpodobné, že poněkud liberálnější koncepce konstruktivnosti by mohla zachránit důležité části klasické matematiky.

INT: Protože intuicionisté hovoří neformalizovaným jazykem, lze očekávat, že u nich dojde k menším odlišnostem v názorech. I když se tyto odlišnosti projevily formou ostřejší, než jsme mohli předvídat, nijak nás nelekají, protože se dotýkají druhořadých otázek, a nikoli základních idejí, kde jsme názorově jednotni. Proto je nanejvýš nepravděpodobné, že by širší koncepce konstruktivnosti mohla nalézt podporu intuicionistů. Co se týče „vivisekce" na matematice, z níž mne obviňujete, je to nutno přijímat jako nevyhnutelný následek našich výchozích hledisek. Lze se na ni také dívat jako na odstraňování nezdravých výtvorů, krásných co do formy, ale v podstatě prázdných. V každém případě je však částečně kompenzována půvabem jemnějšího rozlišování a důmyslnými metodami, jimiž intuicionisté matematiku obohatili.

KON (komentář): Mně se zdá, že pan Int poněkud nedoceňuje svůj intuicionismus. Především, což pak je možné takto oddělovat „humanitní" vědy od věd „přírodních"? Cožpak člověk se svými myšlenkovými konstrukcemi není součástí přírody? Vždyť myšlenkové konstrukce, takové jako např. konstruování stále větších přirozených čísel, jsou obvykle jen abstrakce konstrukcí materiálních, realizovaných v reálném světě, který nás obklopuje. Materiálními vzory takových konstrukcí jsou např. stavby větších a větších domů, stále složitějších strojů ap. Na druhé straně však mohou myšlenkové konstrukce sloužit často jako projekty konstrukcí materiálních. Nejsložitější algoritmy se vypracovávají nejprve jako myšlenkové konstrukce a pak se v našem kybernetickém věku vtělují do práce matematických strojů, které se v mnoha směrech podobají lidskému mozku. Proto zkoumání myšlenkových konstrukcí vůbec není záležitostí, která zajímá jen humanitní vědy.

Chtěl bych ještě říci, že nepatřím k té „většině matematiků", o které hovořil pan Form, a pro niž je hodnota intuicionistické matematiky „osudným způsobem" (jak strašné!) narušována tou skutečností, že intuicionismus ničí „nejcennější" matematické výsledky, které nutno „zachraňovat". Co zachraňovat a proč zachraňovat? Jakýmsi „nejcennějším" výsledkům hrozí nebezpečí. Co nevidět se ukáže, že jsou zbaveny obsahu a že všechny pokusy o jejich rozumný výklad jsou odsouzeny k nezdaru. Co je v nich potom cenného a „životně důležitého"? A úplně divná se mi zdá myšlenka pana Forma o „poněkud liberálnější koncepci konstruktivnosti", speciálně vymyšlené na jejich záchranu. Ostatně ať si tuto koncepci vymýšlí. Od toho je přece Form.

FORM: Naše disputace dostala podobu diskuse o hodnotách. Z vašich slov docházím k závěru, že jste ochoten přiznat hodnotu jiných koncepcí matematiky, ale trváte na tom, že i vaše koncepce má svou hodnotu. Není to tak?

INT: Skutečně, jediným pozitivním tvrzením o základech matematiky, proti němuž vystupuji, je tvrzení, že klasická matematika má jasný smysl. Musím se přiznat, že tomu nerozumím. Ale i ti, kteří tvrdí, že to chápou, by se měli snažit pochopit i naše hledisko a zhodnotit naši práci.

LET: To, že si klasická matematika nemůže činit nárok na úplnou jasnost, dokazují paradoxy.

FORM: Zajisté, je to tak. Ale intuicionistická kritika zachází mnohem dále, než je nutné k tomu, abychom se vyhnuli paradoxům. Pan Int je dokonce ani neuvedl jako argument na podporu své koncepce. Pro něho je bezespornost nepochybně jen žádoucím vedlejším produktem intuicionismu.

SIGN: Pane Inte, vy popisujete svou činnost jako myšlenkové konstrukce. Ale myšlenkové procesy lze pozorovat pouze prostřednictvím dějů, k nimž vedou. Ve vašem případě prostřednictvím slov, která říkáte, a vzorců, které píšete. Neznamená to snad, že jediným způsobem, jak studovat intuicionismus, je studovat formální systém, který buduje?

INT: Když se dívám tam na ten strom, jsem přesvědčen, že vidím strom, a je zapotřebí nemalého tréninku, abych nahradil toto přesvědčení poznatkem, že ve skutečnosti vnikají do mého oka paprsky světla, což vede k vytvoření obrazu stromu. Právě tak, kdy se na vás teď obracím, jsem přesvědčen, že vám vykládám své názory, ale vy, jak vidím, mne poučujete, že ve skutečnosti způsobuji kmitání vzduchu, které vás nutí provádět jisté úkony, např. vyvolávat jiné kmitání. V obou případech je první názor přirozený, druhý teoretickou konstrukcí. Příliš často se zapomíná, že pravdivost takových konstrukcí závisí na současném stavu vědy, a že slova „ve skutečnosti" je třeba přeložit jako „v souladu se současnými názory vědců". Proto se raději držím toho názoru, že popisuji-li intuicionistickou matematiku, sděluji určité myšlenky svým posluchačům. Tato slova nelze chápat ve smyslu nějakého filosofického systému, nýbrž ve smyslu denního života.

SIGN: V tom případě by byl intuicionismus jako forma součinnosti mezi lidmi jevem sociálním a jeho zkoumání by patřilo historii civilizace.

INT: Jeho zkoumání, nikoli však jeho praxe. V tom souhlasím s panem Pragmem: *primum vivere, deinde philosophari*, a chcete-li, můžeme to druhé přenechat jiným. Ať se zajímají, jak jsem vytvářel tyto myšlenkové konstrukce a jak je lze interpretovat v nějaké filosofii. Při jejich tvoření mne uspokojuje přesvědčení, že budou přínosem lidskému myšlení.

PRAGM: To je běžná chyba filosofů – hovořit o věcech, které znají jen nedokonale – a my jsme často hned ochotni na tuto diskusní platformu přistoupit. Nemohl by nám pan Int ukázat nějaké vzory intuicionistických úvah, abychom mohli tento předmět lépe posoudit?

INT: Ovšem. Jsem připraven. A jsem dokonce přesvědčen, že několik lekcí povede k lepšímu pochopení intuicionismu než dlouhá diskuse. Prosím, aby ti, kteří se o můj výklad zajímají, šli se mnou do mé posluchárny.

Přeložili Alena Kotlářová a Josef Veselka