Zbyněk Nádeník

O čtvrtém Hilbertově problému

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 17 (1972), No. 1, 16--23

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139641`

O ČTVRTÉM HILBERTOVĚ PROBLÉMU

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

„Problém o přímce jako nejkratším spojení dvou bodů" – tak zní název čtvrté Hilbertovy úlohy. Ale „přímka jako nejkratší spojnice dvou bodů" je tak elementární představa, že by bylo divné, kdyby první reakcí nebyly otázky: Co je to vůbec za problém? Proč jej matematikové považují za významný? Pokusíme se na ně odpovědět.[1][2]

Nejdříve naznačíme, co čtvrtému Hilbertovu problému předcházelo.

V horizontální rovině zaveďme pravoúhlé souřadnice x, y s počátkem O a položme na ni polovinu kulové plochy se středem S a poloměrem r tak, aby se jí jižním pólem dotýkala právě v bodě O; rovník, který už k naší ploše – označme ji třeba Ω – nepočítáme, je pak s rovinou rovnoběžný (viz obr. 1). Zvolme na ploše Ω libovolný bod B a polopřímkou SB jej promítněme na rovinu do bodu B^*. Naopak bodu B^* v rovině je přiřazen bod B plochy Ω jako jediný její průsečík s úsečkou SB^*. Toto zobrazení studoval už J. L. LAGRANGE (1736 – 1813) v díle o zeměpisných mapách. Poloha bodu B na ploše Ω je tak jednoznačně určena bodem B^*, který je ovšem dán pravoúhlými souřadnicemi x, y. Můžeme tedy dvojici čísel x, y považovat i za souřadnice bodu B na ploše Ω; říká se jim Beltramiho parametry. Mysleme si dále na ploše Ω dva různé body P, Q. Jejich nejkratší spojnicí je oblouk hlavní kružnice, jejíž rovina je určena body S, P, Q. V naší projekci přejde tento oblouk do úsečky spojující body P^*, Q^*. Pro

---

[1]) Použitá literatura:

G. DARBOUX: *Théorie générale des surfaces.* Díl III, Paris 1894, kniha VI, kapitola III.

D. HILBERT: *Grundlagen der Geometrie.* 7. vydání Leipzig—Berlin 1930 (ruský překlad 1948), § 5 a dodatek I.

D. HILBERT: „Mathematische Probleme". Nachr. Kön. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse (1900). Problem von der Geraden als kürzester Verbindung zweier Punkte, 267—269.

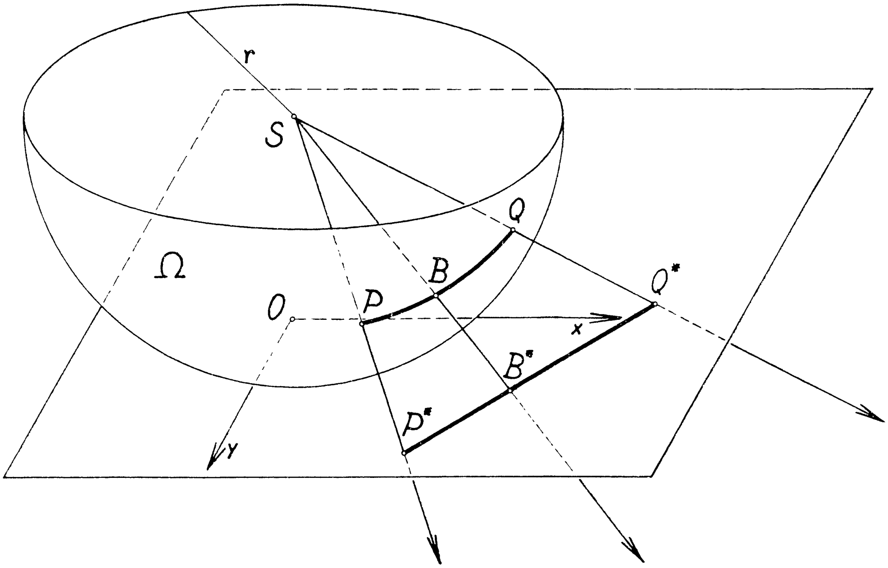
»Проблемы Гильберта«. Москва 1969. Sborník, redigoval П. С. Александров. Příspěvek »К четвертой проблеме Гильберта«, autor И. М. Яглом.

[2]) Až na několik málo řádků zůstaly zcela stranou situace v prostorech dimenze $n \geqq 3$ a souvislosti s diferenciální geometrií, představované Finslerovými prostory. Náročný přehled o čtvrté Hilbertově úloze, z ní vzniklé problematice a jejím řešení podává H. BUSEMANN v článku »О четвертой проблеме Гильберта«, Успехи мат. наук *XXI* (1966), čís. 1 (127). Stručně, ale velmi přístupně a přehledně referuje o všech Hilbertových problémech L. BIEBERBACH: „Über den Einfluss von Hilberts Pariser Vortrag über mathematische Probleme auf die Entwicklung der Mathematik in den letzten dreissig Jahren", Die Naturwissenschaften *18* (1930).

souřadnice x, y jakéhokoliv jejího bodu B^* ovšem platí

$$(1) \qquad ax + by + c = 0\,,$$

kde a, b, c jsou jisté konstanty – je to samozřejmě rovnice přímky, která spojuje body P^*, Q^*. Současně je to vztah, kterému musí vyhovovat Beltramiho parametry bodů nejkratší spojnice na ploše Ω mezi jejími body P a Q. Je tedy přirozené označovat tuto nejkratší spojnici rovněž jako „přímku". Můžeme pak říci, že – v Beltramiho parametrech – je nejkratší spojnice dvou bodů na ploše Ω přímka.



Obr. 1.

Lze i pro nikoliv kulovou plochu zavést parametry, v nichž nejkratší spojnice dvou jejích bodů je určena lineární rovnicí (1) a v nichž tedy nejkratší spojnice je přímka? Na tuto otázku odpověděl E. Beltrami (1835—1900) v roce 1866. Lze to učinit — podobně jako jsme to udělali výše u kulové plochy – právě jen na plochách, které mají konstantní Gaussovu křivost[3]). Připojme, že do rámce tohoto obecného teoré-

[3]) Nechť $\boldsymbol{r}(x, y)$ je třikrát spojitě diferencovatelný průvodič proměnného bodu plochy a nechť vektory $\boldsymbol{r}_x$, $\boldsymbol{r}_y$ nejsou kolineární. Výraz

$$ds^2 = d\boldsymbol{r}\,.\,d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_x\,.\,\boldsymbol{r}_x(dx)^2 + 2\boldsymbol{r}_x\,.\,\boldsymbol{r}_y\,dx\,dy + \boldsymbol{r}_y\,.\,\boldsymbol{r}_y(dy)^2$$

se nazývá čtverec lineárního elementu, protože udává diferenciál oblouku té čáry plochy, pro jejíž body zde platí spojitě diferencovatelný vztah $y = y(x)$; koeficienty diferenciální formy napravo se značí E, F, G. Gaussovou křivostí v bodě plochy o parametrech x, y se rozumí jistý výraz složený ze součinitelů E, F, G a jejich prvních i druhých derivací. Nemění se při takové deformaci plochy, při níž jsou na ní zachovány délky. Např. válcovou plochu lze bez změny délek rozvinout na rovinu; má totiž v každém svém bodě nulovou Gaussovu křivost jako rovina.

mu patří i Beltramiho objev z roku 1868 o reálné interpretaci neeuklidovské Lobačevského geometrie na plochách konstantní záporné Gaussovy křivosti.

Z analytického hlediska zobecnil Beltramiho problém G. DARBOUX[4]) v roce 1894. Uvažujme třídu funkcí $y = y(x)$, které na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ mají druhou derivaci a které v bodech x_1, x_2 nabývají předepsaných hodnot $y_1 = y(x_1)$, $y_2 = y(x_2)$, a pak ještě funkci tří proměnných $F[x, y, y']$ spojitou spolu se svými parciálními derivacemi do druhého řádu pro $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$ a všecka y i y'. Přiřadíme-li každé funkci $y(x)$ číslo

$$\int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x), y'(x)] \, \mathrm{d}x\,, \tag{2}$$

říkáme, že na třídě funkcí $y(x)$ jsme definovali funkcionál (2). Vyšetřit jeho extrémní hodnoty je základní úloha variačního počtu. Realizuje-li funkce $y(x)$ extrém našeho funkcionálu, vyhovuje Eulerově rovnici

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \, \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0\,. \tag{3}$$

Jejím řešením se říká extrémály. G. Darboux věc obrátil. K dané dif. rovnici 2. řádu hledal funkcionál, jenž má v ní Eulerovu rovnici. Speciálně se zabýval nalezením funkcionálů, jejichž Eulerova rovnice má tvar $y'' = 0$, takže extrémály jsou přímky $y = \alpha x + \beta$; $\alpha, \beta =$ konst. Na ploše s lineárním elementem[5]) $\mathrm{d}s^2 = E\,\mathrm{d}x^2 + 2F\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + G\,\mathrm{d}y^2$ je délka čáry $y = y(x)$ mezi body s parametry x_1, $y_1 = y(x_1)$ a x_2, $y_2 = y(x_2)$ dána integrálem

$$\int_{x_1}^{x_2} [E + 2Fy' + Gy'^2]^{1/2} \, \mathrm{d}x \tag{4}$$

a v Darbouxově pojetí se Beltramiho problém modifikuje v zjištění, za jakých podmínek pro koeficienty E, F, G se minima funkcionálu (4) – extrémále se pak říká geodetika – dosáhne na přímkách $y = \alpha x + \beta$. Připojme, že Darbouxovo vyšetřování bezprostředně předcházelo vlastním Hilbertovým studiím a že se o něm D. Hilbert ve svém čtvrtém problému též výslovně zmiňuje.

H. MINKOWSKI[6]) (1864—1909) ve svém díle z roku 1896 o geometrii čísel otevřel ohromné možnosti k aplikacím konvexity. Sestrojil v něm i geometrii, v níž vzdálenost byla definována takto (viz obr. 2): Je dána konvexní uzavřená křivka Γ, která je

---

[4]) V jiné souvislosti píše o Darbouxovi autor v článku „Geometrie a geodézie", Pokroky mat., fyz. a astr. *16* (1971).

[5]) Viz pozn. [3]).

[6]) Od roku 1902 až do smrti působil v Göttingen. Konvexní útvary studoval už ve své habilitační práci z roku 1887. Knihu *Geometrie der Zahlen*, 2. vyd. Leipzig 1910, nedokončil.

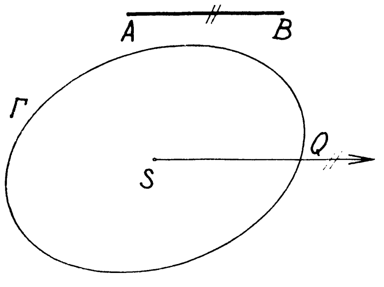
symetrická podle středu S. Vzdáleností bodů A, B se rozumí podíl[7])

$$v_{AB} = \overline{AB} : \overline{SQ}\,, \tag{5}$$

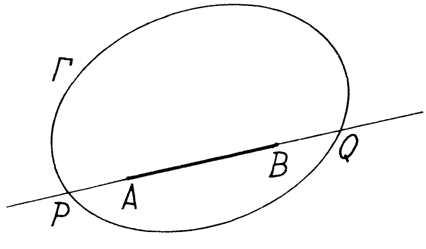
kde Q je průsečík čáry Γ s polopřímkou vedenou ze středu S rovnoběžně s úsečkou AB. Důsledkem konvexnosti čáry Γ je trojúhelníková nerovnost

$$v_{AB} \leqq v_{AC} + v_{CB} \tag{6}$$

pro vzdálenosti mezi třemi body A, B, C. Přejde-li čára Γ v jednotkovou kružnici, zredukuje se Minkowského vzdálenost na délku v obvyklém euklidovském smyslu. Podobně lze postupovat i v prostoru; místo čáry Γ se vezme středově symetrická konvexní uzavřená plocha. Tato Minkowského myšlenka umožnila zobecnit velmi mnoho výsledků z teorie konvexních útvarů a diferenciální geometrie euklidovského prostoru. Vznikla tak nová disciplína — relativní Minkowského geometrie — o jejíž největší rozvoj se zasloužili hlavně japonští a němečtí matematici ve dvacátých letech[8]).



Obr. 2.



Obr. 3.

Od Euklidových *Základů* trvalo přes 2000 let, než se teprve v 19. století dosáhlo významného pokroku v axiomatice geometrie. Z Hilbertových předchůdců se o něj zasloužil M. Pasch (1843—1931) průkopnickým dílem[9]) z roku 1882 a G. Peano (1858—1932) prací[10]) z roku 1889. V roce 1899 publikoval D. Hilbert knižně[11])

[7]) Symbolem $\overline{AB}$ značíme obyčejnou euklidovskou vzdálenost bodů A, B v euklidovské rovině, jak ji známe ze školy. Interpretovat názorně v euklidovské rovině geometrie, o nichž je v článku řeč, umožňují axiómy incidence a uspořádání, které v nich platí stejně jako v euklidovské rovině. Viz o tom dále v citaci z Hilbertovy práce.

[8]) Referují o něm T. Bonnesen (1873—1935) a W. Fenchel (*1905) v monografii *Theorie der konvexen Körper*, Berlin 1934.

[9]) *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Berlin 1882, 2. vyd. 1926.

[10]) *Principii di geometria logicamente esposti*, Turin 1889. Peano je mimo matematiku znám jako pokračovatel Leibnizovy snahy o univerzální řeč. Od roku 1908 byl presidentem „Academia pro interlingua".

[11]) *Grundlagen der Geometrie*, 1. vyd. Leipzig 1899, 7. vyd. Leipzig 1930. Ruský překlad posledního vydání, doplněný rozsáhlými poznámkami, je z r. 1948.

soustavu axiómů rozdělených do pěti skupin: I. axiómy incidence, II. axiómy uspořádání, III. axiómy kongruence, IV. axióm o rovnoběžkách, V. axiómy o spojitosti. Třetí skupina obsahuje pět axiómů: První tři o kongruenci úseček, čtvrtý o kongruenci úhlů a pátý – nejsilnější – je takto spojuje: Jestliže ve dvou trojúhelnících ABC a $A'B'C'$ platí $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ a $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$, pak i $\sphericalangle ABC \equiv \equiv \sphericalangle A'B'C'$. Tedy též $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$, a proto se označuje jako axióm o kongruenci trojúhelníků.

D. Hilbert motivuje svůj čtvrtý problém takto: „Jestliže z axiómů potřebných pro vybudování obyčejné euklidovské geometrie potlačíme axióm o rovnoběžkách..., ale podržíme všecky ostatní axiómy, dostaneme se tak ovšem k Lobačevského (hyperbolické) geometrii; můžeme tedy říci, že tato geometrie je jedna z těch, které jsou euklidovské geometrii nejblíže. Žádáme-li dále, aby nebyl splněn axióm, podle něhož ze tří bodů přímky vždy jeden a jen jeden je mezi oběma ostatními, dostaneme Riemannovu (eliptickou) geometrii, která se tak jeví jako jedna z nejbližších Lobačevského geometrii. ...Nyní se vynořuje obecnější otázka: Lze vytvořit podle jiných plodných hledisek geometrie, které stejným právem následují za euklidovskou geometrií? Tu bych obrátil vaši pozornost na větu, ...která říká, že přímka je nejkratší spojnicí mezi dvěma body. Podstatný obsah tohoto výroku se redukuje na Euklidovu větu, že v trojúhelníku je součet dvou stran vždy větší než třetí strana... Snadno se přesvědčíme, že důkaz Euklidovy věty pouze na základě vět o kongruenci ... úseček a úhlů se nepodaří, že k důkazu je zapotřebí věty o kongruenci trojúhelníků. Tak vzniká otázka o geometrii, v níž platí všecky axiómy obyčejné euklidovské geometrie a zvláště všecky axiómy o kongruenci s výjimkou axiómu o kongruenci trojúhelníků... a ve které nadto je ještě jako zvláštní axióm vzata věta, že v každém trojúhelníku součet dvou stran je větší než strana třetí.

Ukazuje se, že taková geometrie vskutku existuje a je to právě ta, kterou vybudoval Minkowski ve své knize *Geometrie der Zahlen*... Minkowského geometrie je tedy rovněž jedna z geometrií, která je euklidovské geometrii nejbližší..."

Hilbert cituje ve čtvrtém problému H. Minkowského a G. Darbouxa, nezmiňuje se však o svém objevu, který v roce 1894 sdělil dopisem[12]) F. Kleinovi. Kleinova definice vzdálenosti v neeuklidovské geometrii Lobačevského – pochází z roku 1871 – je dobře známá (viz obr. 3): Jsou-li A, B dva body uvnitř kružnice nebo elipsy a P, Q její průsečíky se spojnicí AB, pak vzdálenost bodů A, B v pojetí Kleinově je logaritmus dvojpoměru

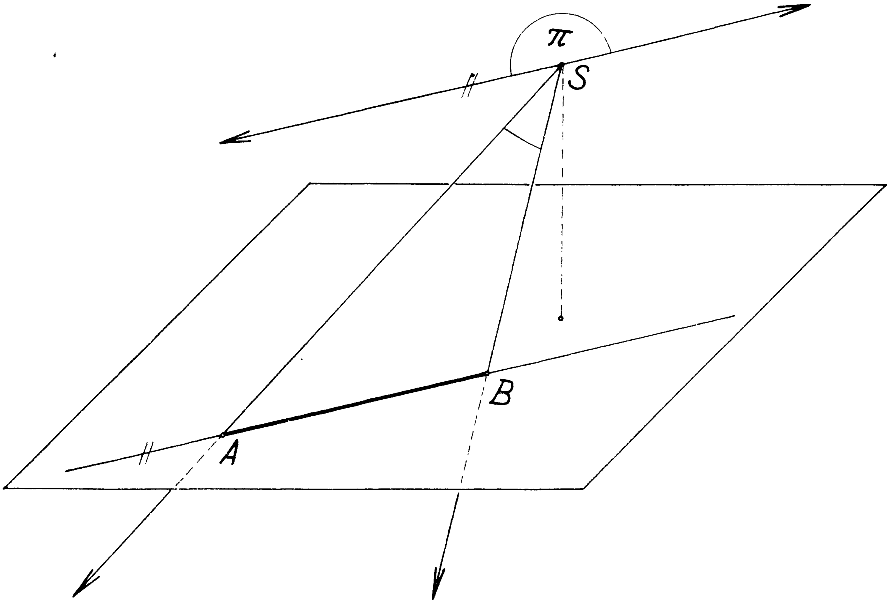
$$v_{AB} = \lg\left(\frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}} : \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}\right). \tag{7}$$

Hilbert zobecnil Kleinovu konstrukci. Místo elipsy vzal libovolnou konvexní uzavřenou křivku Γ a v citovaném dopisu ukázal, že při délce určené jako v (7) platí pro

[12]) Ve výtahu jej publikoval v Math. Ann. *46* (1895) a jako první dodatek v knize citované v pozn.[11]).

strany trojúhelníka ABC z vnitřku čáry Γ nerovnost (6). Geometrii, která vzniká z takto definované vzdálenosti, se říká Hilbertova.

Než přejdeme k nástinu řešení Hilbertova problému, uvedeme jednu metrizaci (tj. zavedení vzdáleností do) projektivní roviny, která nám v zápětí poslouží jako významný příklad. Projektivní rovinu dostaneme z obyčejné euklidovské roviny, když každé osnově rovnoběžných přímek přiřadíme „nevlastní bod v nekonečnu“. Zvolme (viz obr. 4) mimo projektivní rovinu bod S a v ní body A, B, C. Za vzdálenost v_{AB}



Obr. 4.

bodů A, B prohlásíme úhel, který svírají polopaprsky, jež z bodu S promítají body A, B. Trojúhelníková nerovnost (6) je pak elementární vztah mezi stranami trojhranu. Přímka AB – a samozřejmě i každá jiná – má v této metrice konečnou délku rovnu π, totiž úhlu opačných polopaprsků, jež z bodu S promítají jediný nevlastní bod té přímky.

V roce 1900 existovala tak dvě speciální řešení Hilbertova problému — geometrie Minkowského a geometrie Hilbertova. Problémem se však už zabýval Hilbertův žák G. Hamel (1877—1954) v disertaci, kterou v roce 1901 předložil v Göttingen a o dva roky později publikoval[13]). Weierstrassovými metodami variačního počtu – D. Hil-

[13]) „Über die Geometrien, in denen die Geraden die Kürzesten sind“, Math. Ann. *57* (1903). V knize C. Reid: *Hilbert*, New York 1970 je fotografie matematiků v Göttingen z roku 1902. Je reprodukována v katalogu, kterým nedávno nakladatelství Julia Springra vydalo přehled o svých knihách z matematiky od roku 1945. Ve středu sedí F. Klein, vedle něho D. Hilbert, ve třetí řadě uprostřed nejvýš vyniká G. Hamel.

bert se o ně patrně tehdy velmi zajímal, jak lze soudit z několika pasáží jeho přednášky – dosáhl výsledků, které v užším smyslu Hilbertův čtvrtý problém rozřešily. Hlavní Hamelův objev by bylo možné shrnout takto: Libovolná metrizace projektivní roviny nebo její části, při níž přímky jsou nejkratšími spojnicemi, je právě jen dvojího typu: 1. V případě celé projektivní roviny jsou přímky uzavřenými čarami a mají všecky stejnou konečnou délku – příklad jsme uvedli v předcházejícím odstavci. 2. V případě části projektivní roviny je touto částí konvexní oblast afinní roviny a přímky mají nekonečnou délku – to je případ Minkowského nebo Hilbertovy geometrie. Analytický aparát Hamelových důkazů však nezapadal do metod studia základů geometrie a vyžadoval pochopitelně předpoklady o diferencovatelnosti.

K prvnímu systematickému rozvoji této Hilbertovy problematiky došlo v Praze. Je spjat s profesorem matematiky na bývalé německé technice P. FUNKEM (1886 až 1969) a profesorem matematiky na bývalé německé universitě L. BERWALDEM[14]) (1883–1942). P. Funk studoval u D. Hilberta a přenesl z Göttingen do Prahy nejnovější variační teorie. Byl první, kdo zavedl nesymetrickou vzdálenost. V práci[15]) z roku 1929 definoval pro body A, B z vnitřku konvexní oblasti s hranicí Γ v afinní rovině nesouměrnou metriku vzorci

$$v_{AB} = \lg \frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}}, \quad v_{BA} = \lg \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}},$$

kde body P, Q jsou určeny stejně jako v Hilbertově geometrii (viz obr. 3). L. Berwald již v roce 1929 Funkovy výsledky zobecnil do n-rozměrného prostoru a dokázal – připomeňme si úvodní Beltramiho objev – nemožnost prostorů s nikoliv konstantní křivostí, v nichž extrémálami jsou přímky. Příbuznou problematikou se L. Berwald zabýval ještě v sérii prací z let 1934–41 a ve dvou rukopisech. Před svou deportací do Lodže v roce 1941 odevzdal je P. Funkovi, který je publikoval v letech 1946 a 47. Jako výsledek svého čtyřicetiletého působení na technikách v Praze a Vídni napsal P. Funk rozsáhlou učebnici o variačním počtu a jeho aplikacích ve fyzice a technice. Na 7. kongresu rakouských matematiků v září 1968 v Linci charakterizoval P. Funk v obsáhlé přednášce[16]) geometrie s přímkovými extrémálami, v nichž ekvidistanty přímek jsou opět přímky; vrátil se k problematice, kterou se zabýval už v práci[17]) z roku 1930.

---

[14]) Viz autorův překlad jeho nekrologu od M. PINLA (* 1897 v Duchcově, působil rovněž na bývalé německé universitě v Praze) v Čas. pěst. mat. *92* (1967) se soupisem Berwaldových prací.

[15]) „Über die Geometrien, bei denen die Geraden die Kürzesten sind", Math. Ann. *101* (1929).

[16]) „Über zweidimensionale Geometrien mit geradlinigen Extremalen und konstantem Krümmungsmass".

[17]) „Über Geometrien, bei denen die Geraden die kürzesten Linien sind und die Äquidistanten zu einer Geraden wieder Gerade sind", Monatsh. Math. Phys. *37* (1930).

Vidíme tak, že jeden směr Hilbertova čtvrtého problému je vytyčen jmény Darboux – Hamel – Berwald – Funk. Jsou pro něj příznačné aplikace variačního počtu. Jiný směr, založený na axiomatické metodě, je představován jmény Minkowski – Hilbert – Busemann. Poslednímu se podařilo Hilbertovu problematiku nejvíce rozvinout.

Naznačili jsme, jak Hilbertova úloha má mnoho řešení. Toho si už před více než třiceti lety všiml H. BUSEMANN (*1905), dnes jeden z vedoucích amerických geometrů. Připojí-li se další podmínky, zůstává stále ještě velká oblast řešení. Uveďme příklad: Požaduje-li se navíc od geometrie z Hilbertova problému, aby se v ní vzdálenost nezměnila posunutím, dostává se geometrie Minkowského [podle obr. 2 a (5) nemá translace úsečky AB vliv na její délku, neplatí to však už – srv. obr. 3 a (7) – v geometrii Hilbertově anebo o otočení úsečky AB]. Už v knize[18]) z roku 1942 o metrických metodách ve Finslerových prostorech a základech geometrie navázal H. Busemann na geometrii, kterou D. Hilbert popsal v citovaném dopisu F. Kleinovi. Současně v této knize začal se systematickým studiem metrických prostorů, v nichž dvěma body prochází právě jedna geodetika. S rozsáhlou diskusí Minkowského a Hilbertovy geometrie a obecněji projektivních metrik pokračoval v učebnici[19]), kterou vydal v roce 1953 společně s P. J. Kellym. Vyšetřování z první knihy rozvinul v rozsáhlou teorii G-prostorů (písmeno G má upomínat na geodetiku) v monografii[20]) z roku 1955 a jejím doplňku z roku 1970 o syntetické diferenciální geometrii[21]). Významný speciální případ dostaneme, když v G-prostoru jsou geodetikami obyčejné přímky; takovému prostoru se říká Desarguův. Ve své poslední knize dokazuje H. Busemann pro n-dimenzionální Desarguův prostor Hamelův teorém, se kterým jsme se v rovinném případě už seznámili, a odvolávaje se na práce Berwaldovy a Funkovy charakterisuje mezi n-rozměrnými Desarguovými prostory Minkowského a Hilbertovu geometrii.

Dospěli jsme tak až ke spojení linií, které jsme uvedli o dva odstavce výše. Busemannův směr je stále v prudkém rozvoji. Busemannovi žáci tvoří početnou školu; jmenujme z ní aspoň E. Zaustinskyho, autora knihy o nesymetrických vzdálenostech[22]). Přiřkneme-li matematickému problému hodnotu úměrnou množství otázek, které se jeho řešením objevují, pak čtvrtá Hilbertova úloha, která se po sedmdesáti letech rozvíjí v rozsáhlé teorie, jistě nepatří k málo významným.

---

[18]) *Metric Methods in Finsler Spaces and in the Foundations of Geometry*, Princeton 1942.

[19]) *Projective Geometry and Projective Metrics*, New York 1953; ruský překlad 1957.

[20]) *The Geometry of Geodesics*, New York 1955; ruský překlad 1962.

[21]) *Recent Synthetic Differential Geometry*, Berlin 1970; srv. autorovu recenzi v Čas. pěst. mat. *97* (1972), v níž je i vyložen Busemannův pojem G-prostoru a Busemannova teorie postavena i vedle jiných směrů v diferenciální geometrii.

[22]) *Spaces with non-symmetric distance*, Providence 1959.