Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Grath, James H
Kvantová teorie a operace spojení v teorii svazů

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 37 (1992), No. 6, 311--324

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139625

3. Včas si klást otázky. Odpovědi však nehledat pomocí složitých výpočtů, nýbrž spíše hledat zjednodušující model, který vystihne podstatu věci.

Přeji mladým adeptům fyziky, aby tohoto návodu použili, pokud se spokojí s tím, že jeden milión amerických dolarů je čeká takřka až na konci vědecké kariéry.

Při psaní tohoto článku jsem měl informace z [5] a [6] a materiálů zapůjčených M. Glogarovou.

L i t e r a t u r a

[1] De Gennes, P. G.: *Superconductivity of Metals and Alloys.* W. A. Benjamin, Inc. New York, Amsterdam, 1966.
[2] De Gennes, P. G.: *The Physics of Liquid Crystals.* Clarendon Press, Oxford 1974.
[3] Wilson, K. G.: Pokroky matematiky, fyz. a astronomie, *31* (1986), 1.
[4] De Gennes, P. G.: *Scaling Concept in Polymer Physics.* Cornell University Press, Ithaca, London, 1979.
[5] Friedel, J.: Europhysics News, *23* (1992), No. 1, 15.
[6] Levi B. G.: Physics Today, prosinec 1991, 17.

Kvantová teorie a operace spojení v teorii svazů

James H. Grath

James H. McGrath učí filozofii na Centrální Michigenské univerzitě. Vedle základů fyziky a formální logiky zahrnují jeho vědecké zájmy etiku a vojenský profesionalismus.

Kvantová teorie před nás staví jeden dramatický problém. Jejím předpovědím nelze nic vytknout, ale jakýkoli pokus vysvětlit kvantové jevy se příčí zdravému rozumu. Pokud je kvantová teorie správná, něco, co považujeme za nesmysl, musí být pravda; a teorie nám napovídá, co ze zdravého rozumu hodit přes palubu. Tímto problémem se zabývali někteří z největších myslitelů našeho století.

V roce 1933 byl John von Neumann, tehdy třicetiletý, nejmladším členem nově založeného Ústavu pro pokročilá studia. Rok před tím poskytla kniha *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* užitím vlastností Hilbertova prostoru rigorózní axiomatizaci intuitivních metod používaných do té doby v nové kvantové teorii.

James H. McGrath: *Quantum Theory and the Lattice Join.* The Mathematical Intelligencer Vol. *13.*, No. 3, 1991. Přeložil Pavel Jiráček.

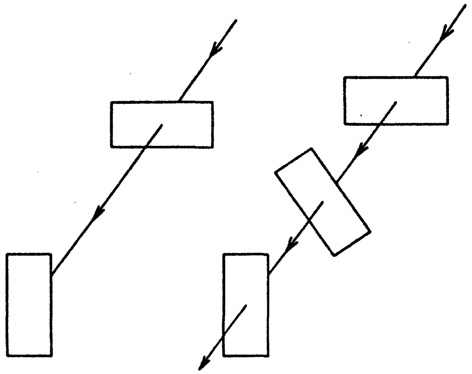
V roce 1933 ukončil také studium na Harvardu Garrett Birkhoff, syn George Davida Birkhoffa, a začal pracovat v oblasti abstraktní algebry a teorie svazů. Spolupráce těchto dvou vedla pak v roce 1936 k napsání článku *Logika kvantové mechaniky*, který inicioval řadu výzkumných programů v oblasti nyní nazývané kvantová logika.

Známý svaz vlastností, který je dědictvím po Georgeovi Booleovi a který nám každodenně dobře slouží, je nutno podle Birkhoffa a von Neumanna díky kvantové teorii nahradit novým kvantovým svazem vlastností, odrážejícím strukturu Hilbertova prostoru. V tomto článku se pokusím podat neformální vysvětlení tohoto návrhu; v závěru pak uvádím příslušnou literaturu, můj článek (9) podrobně zpracovává tuto problematiku.

Možná, že je na místě malé varování. Hodnota tohoto příspěvku pro matematika může spočívat v tom, že ocení důmyslnou strategii, s jakou Birkhoff a von Neumann využívají fyzikálních nebo filozofických nuancí běžných matematických pojmů. Matematika sama je poměrně přímočará, avšak tyto nuance jsou obtížněji uchopitelné.

Rozluštění jedné hádanky

Zde je malá hádanka pro čtenáře. Vezměte troje obyčejné polaroidní sluneční brýle. Dejte nejprve dvoje brýle za sebe. Dívejte se těmito brýlemi u otevřeného okna a otáčejte jedněmi z nich. Světlo se částečně tlumí, a když jsou skla orientována navzájem kolmo, vůbec nepropouštějí světlo. Dále umístěte třetí brýle před nebo za původní zkříženou dvojici. Otáčejte jimi. Nic se nezmění, stále žádné světlo neprochází. Vložte teď třetí brýle diagonálně mezi první dvoje. Nyní určitá část světla prochází. Tato záhada je vyobrazena na obr. 1. Šprýmař varuje farmáře, kteří mají dvojitě oplocené pozemky, aby nepřidávali třetí plot. Riskovali by tak vpád různé havěti!



Obr. 1. Hádanka s polaroidem. Dva polaroidy nepropouštějí žádné světlo. Přidáme-li třetí, světlo začne procházet. Proč? Vysvětlení přinesly pionýrské práce Birkhoffa v teorii svazů a von Neumanna v teorii Hilbertových prostorů.

Od počátku 19. století, s pracemi Younga a Fresnela, začali fyzikové považovat polarizaci za vlastnost světelných vln. Příkladem mechanické příčné vlny je vibrující provaz. Představme si provaz vlnící se podél osy z, může tedy kmitat v libovolném směru v rovině xy. O světelné vlně šířící se ve směru osy z a kmitající podél osy y (podél osy x) říkáme, že je vertikálně (horizontálně) polarizovaná. Klasická fyzika rozvinula model polarizovaného světla, který vycházel z popisu kmitajícího provazu.

Polaroidní látky byly objeveny v roce 1929 Edwinem Landem. Z pohledu klasické fyziky se o polariodech předpokládalo, že mají význačný směr — osu propustnosti. Hledělo se na ně jako na filtry, které propouštějí veškeré světlo polarizované rovnoběžně s osou propustnosti a absorbují světlo polarizované kolmo. Vzhledem ke světelné vlně reprezentované kmitajícím provazem se takovýto polaroid chová jako plot z latěk.

Podle tohoto klasického modelu dvoje zkřížené polaroidní brýle blokují veškeré světlo, protože jejich osy propustnosti jsou k sobě kolmé. Pokud je první osa vertikální, propouští vertikální, ale nikoli horizontální světlo. Osa druhých brýlí pak musí být horizontální. Na tyto druhé brýle nedopadá žádné horizontální světlo, a proto takto uspořádaný pár nic nepropustí.

Proč však tři polaroidy světlo propouštějí? Aby zodpověděla tuto otázku, dovolávala se klasická fyzika Maxwellovy elektromagnetické teorie, kde je příčná světelná vlna reprezentována vektorem elektrické intenzity **E**. Množina vektorů **E** tvoří lineární vektorový prostor s ortonormální bází. Vysvětlení využívá vektorů této báze: libovolný vektor **E** může být rozložen do dvou vzájemně kolmých složek. Vertikálně polarizované světlo propuštěné prvním polaroidem může být rozloženo do 45° složky, kterou nazveme *diagonální* světlo, a 135° složky, kterou nazveme *příčné světlo*. Takto rozložený paprsek dopadá pak na druhý, diagonální polaroid. Zde diagonální světlo projde a příčné světlo je absorbováno. Diagonální světlo propuštěné druhým polaroidem může být rozloženo do horizontální a vertikální složky. Ve třetím, tj. horizontálním polaroidu, je vertikální složka absorbována, ale horizontální projde. Vlnová teorie 19. století tedy vysvětluje naši hádanku. Tři polaroidy dělají to, co dva nedovedou: propouštějí světlo.

Žádné jednoduché kvantové vysvětlení tohoto paradoxu, na kterém by se fyzikové shodli, však neexistuje. Autorem jednoho z nich je matematik a fyzik z Cambridge, laureát Nobelovy ceny z roku 1933, P. A. M. Dirac. V první kapitole své knihy *Principy kvantové mechaniky* považuje Dirac polarizaci za vlastnost fotonů. Zmiňuje se o „experimentu, v němž se dopadající svazek skládá pouze z jednoho fotonu“ a považuje jej za „velmi obecný případ neplatnosti klasické mechaniky vln“. Zejména: „Fotony pozorujeme pouze jako částice.“ Bez vln se naše klasické vysvětlení zhroutí a zbývá otázka, „jak lze tyto výsledky vysvětlit pomocí fotonů?“ Pokud neexistují *žádné* vlny, *čemu* přísluší vlastnost polarizace? Podle Diracova kvantového modelu „musíme polarizaci připsat samotnému fotonu“. Pokud je však polarizace vlastností fotonů, musí to být zvláštní druh vlastnosti, který bude vykazovat jisté „anomální chování“.

Modely a stavové prostory

V roce 1936, kdy vyšel Birkhoffův a von Neumannův článek, napsal Erwin Schrödinger, kterému byla udělena Nobelova cena v roce 1933 společně s Diracem, stať *Současná situace v kvantové mechanice*. Schrödinger připravil půdu pro Birkhoffa a von Neumanna tím, že poukázal na rozdíl mezi vysvětlením nějakého jevu a předpovědí nových jevů. Jak v klasické, tak v kvantové fyzice existují dva způsoby, jak reprezentovat „přírodní objekt". Pokud je účelem něco objasnit (jak tomu bylo v předcházejícím odstavci),

> ... definujeme nějakou reprezentaci přírodních objektů založenou na experimentálních datech. Abychom ukázali, že tím nemyslíme, že přesně takto fungují věci v reálném světě, nazýváme tuto myšlenkovou výpomoc *obraz* neboli *model*.

Pokud je účelem předpovídat jevy, používají fyzikové stavový prostor. Nejprve idealizují „přírodní objekt" jako fyzikální systém, který může být plně charakterizován svým okamžitým stavem. Potom přidruží tento stav k nějakému bodu ve stavovém prostoru teorie. Birkhoff a von Neumann vysvětlují, jak takovýto proces funguje:

> ... bod stavového prostoru sdružený s fyzikálním systémem v čase t_0 spolu s předepsaným matematickým „zákonem pohybu" určují jiný bod stavového prostoru v libovolném pozdějším čase t. Tento předpoklad evidentně vyjadřuje princip *matematické příčinnosti.*

Jednoduchým klasickým fyzikálním systémem je dělová koule. Její okamžitý stav je určen šesticí reálných čísel, která obvyklým způsobem reprezentují hybnost a polohu. Tento stav je sdružen s bodem v šestirozměrném euklidovském prostoru a matematickým zákonem pohybu může být 2. Newtonův zákon. Foton je kvantový systém. Jeho okamžitý stav je zcela určen energií, směrem pohybu a polarizací. Tento kvantový stav je sdružen s bodem v Hilbertově prostoru, což je stavový prostor kvantové teorie. Pohybovým zákonem může být Schrödingerova rovnice.

Schrödinger dále formuloval problém týkající se každého kvantového systému. Fyzik zkonstruuje nějaký model tak, že postuluje množinu vlastností, o kterých předpokládá, že jsou vlastní přírodnímu objektu. Potíže vznikají, když je tato množina postulovaných vlastností srovnána s množinou měřených vlastností, které poskytuje kvantová laboratoř. (Pro laboratorní předpovědi existuje předpis nazývaný *Bornovo pravidlo*, pomocí kterého lze získat při daném měření ze stavového prostoru pouze pravděpodobnost některé z vlastností systému. Množina měřených vlastností je menší než množina postulovaných vlastností daného modelu. Schrödingerem předložený problém je podmínkou konzistence. Ty vlastnosti, které jsou postulovány navíc a které dávají kvantovému modelu jeho schopnost vysvětlovat, nesmí být v rozporu s „žádným kvantově teoretickým tvrzením".

Nyní už je připravena půda pro Birkhoffa a von Neumanna, aby navrhli model, vysvětlující tyto kvantové hlavolamy. Jejich model se vyhýbá neobvyklému „anomálnímu chování", které předpokládal Dirac. Dotýká se však Schrödingerova problému konzistence a příliš potlačuje náš zdravý rozum. Jeho ospravedlnění je výsledkem výzkumů, které provedli Birkhoff v oblasti teorie svazů a von Neumann v oblasti teorie Hilbertových porstorů.

Birkhoffovy svazy

Brzy pak v krátké historii teorie svazů zdůrazňoval Birkhoff nutnost dvojího rozlišování svazů. Ačkoli je v matematické praxi obvyklé nezabývat se takovýmto rozlišováním, zde poskytuje rozhodující perspektivu, máme-li ocenit Birkhoffův-von Neumannův program.

V článku *Co je to svaz?* napsaném v roce 1943 pro The American Mathematical Monthly se Birkhoff pokusil „vytvořit obecnou *teorii svazů* obsahující mnoho speciálních případů". Příklady takovýchto speciálních případů zahrnují „reálná čísla, nezáporná celá čísla a podmnožiny libovolné třídy". Obecná teorie svazů má podle autora výhody „jednoty a hospodárnosti" pouze proto, že je odlišná od jakéhokoli speciálního případu; je charakterizována pouze „určitými společnými formálními vlastnostmi".

Abychom stanovili první rozlišení, můžeme říci, že obecná teorie svazů se zabývá třídami izomorfních svazů (nebo soubory takovýchto tříd), z nichž každá obsahuje různé speciální případy (třídy jednoho souboru se liší pouze svým stupněm). Pracovat v obecné teorii svazů znamená pro matematika zaměřit se na nějakou třídu, která může být plně definována svou strukturou nebo svými „formálními vlastnostmi". Avšak při studiu nějakého speciálního případu jde matematikovi o (i) strukturu jeho třídy izomorfie, (ii) jeho konkrétní množinu prvků a (iii) operátory definované na těchto prvcích.

V přehledném článku *Svazy v užité matematice*, předloženém Americké matematické společnosti v roce 1961, zdůraznil Birkhoff druhé rozlišení. To činí rozdíl mezi speciálními případy: některé patří do „čisté matematiky", zatímco jiné lze nalézt v „užité matematice" (a matematické fyzice). Příklady posledně zmiňovaného jsou „Reynoldsovy operátory a ergodická teorie, které mají speciální fyzikální využití v turbulenci tekutin a stochastických procesech". Speciální příklady z čisté matematiky zahrnují ty, které byly citovány v roce 1943. Druhé rozlišování je ovšem relativní z hlediska úhlu pohledu. Matematik může studovat speciální případ jako čistý případ bez ohledu na jeho aplikace, zatímco tentýž speciální případ by mohl použít nebo aplikovat fyzik. Může se ovšem stát, že matematik pohlíží na speciální případ jako na definovaný na jedné množině, zatímco fyzik jej vidí definovaný na jiné množině.

Připomeňme, že *svaz* je částečně uspořádaná množina, na které jsou pro každé dva její prvky definovány operace spojení a průseku. Nechť S označuje množinu s prvky A, B, ... a znak $\leqq$ její částečné uspořádání (reflexivní, antisymetrická, tranzitivní relace na S). Každý konečný svaz obsahuje dva speciální prvky 0 a I. Pro každé A platí $0 \leqq A \leqq I$.

Spojení neboli nejmenší horní mez prvků A a B ($C = A \vee B$) je horní mez A ($A \leqq C$) a horní mez B ($B \leqq C$) a splňuje podmínku minimality, tj. $C \leqq D$, kde D je libovolná jiná horní mez A a B. *Průsek* neboli největší dolní mez ($\wedge$) je operace duální ke spojení.

Svaz se nazývá *komplementární*, pokud každý prvek A má alespoň jeden doplněk A^-, kde A^- se nazývá *doplněk* tehdy, když $A \wedge A^- = 0$ a $A \vee A^- = I$. Svaz se nazývá *ortokomplementárním*, pokud existuje zobrazení $A \to A^-$ takové, že $(A^-)^- = A$ a $A \leqq B$ je ekvivalentní $B^- \geqq A^-$. Budeme uvažovat obecný ortokomplementární svaz

$$L = \langle S, \leqq, \vee, \wedge, ^{-} \rangle .$$

Dále budeme uvažovat několik specifických příkladů, které by Birkhoff nazval „aplikované speciální případy“ svazu L. Pouze některé z nich budou splňovat distributivní zákon pro všechny své prvky. Takovéto distributivní ortokomplementární svazy se nazývají *Booleovy svazy* nebo *Booleovy algebry*.

Birkhoff a von Neumann předložili dva návrhy. Jejich klasický návrh užívá tři Booleovy aplikované speciální případy svazu L. Jejich kvantový návrh vychází z argumnetu rozpracovaného von Neumannem a užívá tři nebooleovské aplikované speciální případy svazu L.

Birkhoffův – von Neumannův klasický návrh

Birkhoff poznamenává, že nejstarší částí teorie svazů je Booleova algebra. Ve svých *Zákonech myšlení* z roku 1854 komentuje George Boole svůj první zákon: $xy = yx$. „Tyto symboly jsou komutativní jako symboly Algebry“. A „pokud x znamená ‚bílé věci‘ a y ‚ovce‘, nechť potom xy znamená ‚bílá ovce‘“. Tyto poznámky evokují dnešní pojem Booleovy algebry (neboli distributivního ortokomplementárního svazu) vlastností nebo atributů objektů.

Navíc k těmto vlastnostem, jako je ‚být bílý‘ a ‚být ovce‘ vždy existuje třetí vlastnost, kterou bychom mohli nazvat ‚být bílý *NEBO* být ovce‘ (‚*NEBO*‘ spojuje vlastnosti tak jako ‚nebo‘ spojuje výroky). Z pohledu Birkhoffa soubor takovýchto běžných vlastností je příkladem svazu. Abychom definovali svaz, musíme proto specifikovat: (i) Jeho množinu. S^P je množina našich běžných klasických vlastností. Prvky S^P budou označeny X, Y, Z, ... (ii) Jeho operátory. Například *NEBO* je operátor definovaný na prvcích S^P. (iii) Jeho čistě formální svazové vlastnosti. *NEBO* má formální vlastnosti distributivní operace spojení v ortokomplementárním svazu. Duální operací k *NEBO* je *A*. Obecný operátor doplňku k dané vlastnosti je *NE*. Náš první příklad Booleova svazu je svaz klasických vlastností:

$$CPL = \langle S^P, \leqq A, NEBO, NE \rangle .$$

Východiskem klasického návrhu je kritické hledisko spočívající v tom, že CPL postihuje strukturu světa, který pozorujeme. Kdyby byl svět stvořen jinak, Boole by nám možná odkázal jinou strukturu a tu bychom dnes nazývali Booleova algebra. Tento úhel pohledu je možný proto, že respektujeme Birkhoffovo rozlišování: CPL je aplikovaný speciální případ a ne pouze distributivní ortokomplementární svaz (pojem obecné teorie svazů) nebo prostě množina podmnožin (čistý speciální případ).

Birkhoff a von Neumann dále tvrdí, že poněvadž náhodou žijeme ve světě reprezentovaném booleovským svazem CPL, užíváme *slova* „a“, „nebo“ a „ne“ typicky booleovským způsobem. Jako spojky pravdivostních funkcí ve výrokovém počtu mohou být tato slova považována za svazové operátory definované na oblasti výroků či tvrzení o každodenních klasických vlastnostech. Nechť S^S s prvky x, y, z, ... označuje množinu těchto běžných tvrzení. V takovémto svazu „nebo“ je operátorem na výrocích a má formální vlastnosti operace spojení v distributivním ortokomplementárním svazu. náš známý výrokový počet je proto druhý booleovský aplikovaný speciální případ, svaz klasické logiky:

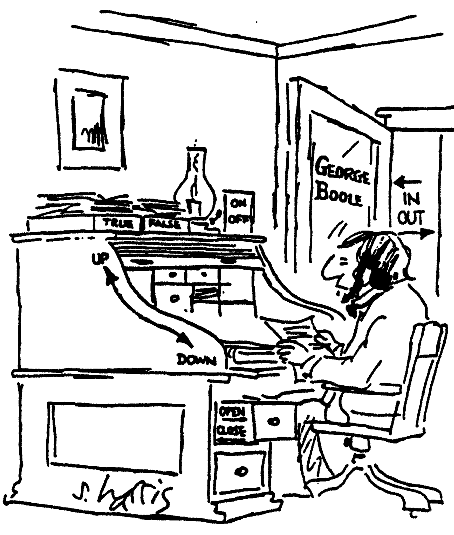
$$CLL = \langle S^S, \leqq, \text{a, nebo, ne} \rangle .$$

Kritické hledisko zde spočívá v tom, že CLL funguje — zachovává pravdivostní hodnotu — pouze proto, že ho užíváme ve světě vlastností reprezentované svazem CPL.

Obrátíme-li nyní pozornost na klasickou fyziku, příslušný stavový prostor, který poskytuje přesné předpovědi v rámci klasické fyziky, je n-rozměrný euklidovský prostor. Množina prvků klasického stavového prostoru nechť je označena S^E. Její prvky jsou X, Y, Z, ... a částečné uspořádání je inkluze množin. Operátory jsou průnik, sjednocení a doplněk množin.

Máme tedy svaz klasického stavového prostoru

$$CSL = \langle S^E, \leqq, \cap, \cup, ' \rangle .$$



CURRENT CONTENTS® ©1989 by ISI®

Birkhoff a von Neumann zdůrazňují, že matematik často studuje pouze čistě formální euklidovský prostor, ale to neznamená, že studuje stavový prostor. Euklidovský prostor se stal stavovým prostorem proto, že mohl být „spojen s realitou“. Abstraktní prostor byl „spojen s realitou“, jak Birkhoff a von Neumann zdůrazňují, pouze proto, že mohl být dán do „vzájemně jednoznačné korespondence“ s „prostorem pozorování“. Prostor pozorování se definuje jako množina všech možných naměřených a předpověděných výsledků nebo vlastností pro daný fyzikální systém. Pro náš jednočásticový systém je to množina všech možných šestic určujících polohy a hybnosti. Důvod, proč tato korespondence je možná, je ten, že „zachovává inkluzi mezi podmnožinami stavového prostoru a podmnožinami prostoru pozorování“. Idea je taková, že stavový prostor je vhodný pouze proto, že má stejnou svazovou strukturu jako klasický prostor pozorování. Avšak svaz prostoru pozorování je právě ten privilegovaný podsvaz svazu CPL, na který klasická fyzika spoléhá. Kritické hledisko spočívá tentokrát v tom, že stavový prostor je vhodný pouze proto, že náš svět je náhodou reprezentován svazem CPL. Mohli bychom říci, že běžná booleovská výroková logika, jakož i booleovský klasický stavový prostor se ukázaly být užitečné z toho důvodu, že náš svět je booleovský. Obr. 2 znázorňuje klasickou polovinu Birkhoffova-von Neumannova návrhu.

BIRKHOFFŮV-VON NEUMANNŮV KLASICKÝ NÁVRH

CPL		CSL
Svaz vlastností		Svaz stavového prostoru
X	$\nearrow$	X
X *NEBO NE* X		$X \cup X'$
X *A NE* X		$X \cap X'$
	$\searrow$	CLL
		Svaz výroků
		x
		x *NEBO NE* x
		x *A NE* x

Obr. 2. Booleovský svaz vlastností reprezentuje svět, který pozorujeme. Naše výroková logika a stavový prostor klasické fyziky „fungují“ v našem světě *pouze proto*, že mají tutéž strukturu booleovského svazu jako svaz vlastností. X označuje nějakou vlastnost jako ‚být bílý‘ nebo ‚úhel polarizace vlny‘, x označuje výrok jako např. ‚Toto je bílé‘ nebo ‚Vlna má úhel polarizace Θ‘ a X označuje nějaký prvek prostoru stavů. Druhý řádek reprezentuje triviální vlastnost, kterou mají všechny objekty, tautologii a celý prostor. Na posledním řádku je svazový doplněk druhého řádku: absurdní vlastnost, spor a imaginární prvek.

Von Neumannův argument

Po uvedení své první práce o Hilbertově prostoru v roce 1927 zaměřil von Neumann pozornost na takové specifické problémy, jako jsou základy kvantové statistiky a kvantové termodynamiky, problém měření v kvantové teorii a možnost užití tzv. skrytých parametrů s cílem obnovení „kauzality“ v teorii. Tato práce vedla k jeho knize *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* v roce 1932, kde byla teorie axiomatizována. Axiómy obsahovaly předpoklady, že prvky stavového prostoru, které reprezentují stavy kvantového fyzikálního systému, jsou body Hilbertova prostoru a že měřitelné veličiny systému jsou reprezentovány hermitovskými (obecně neohraničenými) operátory, hustě definovanými v tomto prostoru. (Pro naše účely nám stačí, když Hilbertův prostor bude pouze konečněrozměrný, s dimenzí větší nebo rovnou 3. I tento Hilbertův prostor je fyzikálně dostatečně bohatý, aby reprezentoval ty kvantové stavy, které způsobují problém interpretace teorie.)

V šestistránkové kapitole *Projekce jako výroky* je uveden geniální argument vedoucí ke smělému závěru, který bude o čtyři roky později tvořit základ von Neumannovy spolupráce s Birkhoffem. Argument je rozvinut ve třech krocích. Von Neumann začíná tím, že nás upozorňuje na dva „pojmy, které jsou důležitými objekty fyziky“. První jsou „vlastnosti stavů fyzikálního systému“. Příkladem takové vlastnosti je, jak jsme viděli, „že jisté veličině je přiřazena určitá hodnota“, např. „že polarizacím je přiřazen úhel Θ“. Viděli jsme, že v klasické fyzice tyto vlastnosti vytvářejí klasický prostor pozorování, podsvaz svazu CPL, jehož vlastnosti jsme označili X, Y, Z, ... Von Neumann se nyní zaměřuje na odpovídající množinu vlastností, které považuje za důležité v kvantové fyzice. Budeme označovat tyto kvantové vlastnosti jako M, N, O, ...

Druhým důležitým pojmem je dvouhodnotové měření: „Každé vlastnosti můžeme přiřadit měření, které rozlišuje mezi přítomností a absencí dané vlastnosti." Tato měření „dávají pouze hodnoty 0 a 1". Dají 1, když systém má jistou vlastnost a jinak dají 0. Tyto dva pojmy jsou příbuzné: vlastnosti jsou „charakterizovány stejným chováním" jako jejich měření. Také mohou „nabývat pouze hodnot 0 a 1".

První krok argumentu identifikuje množinu dvouhodnotových kvantových vlastností a odpovídající množinu dvouhodnotových kvantových měření. Druhý krok nyní stanoví, že obě tyto množiny existuje několik významných vzájemně jednoznačných korespondencí. První z těchto korespondencí je uzákoněna jedním z von Neumannových axiómů zmíněných výše: Fyzikální veličiny systému odpovídají množině hermitovských operátorů definovaných v Hilbertově prostoru. Protože obě množiny z prvního kroku jsou dvouhodnotové, odpovídají obě podmnožině hermitovských operátorů, které jsou idempotentní ($E = E^2$). Každý takový idempotentní operátor je ortogonální projektor v Hilbertově prostoru, každá projekce odpovídá podprostoru sestávajícímu z jeho oboru hodnot. Druhý krok klade obě tyto množiny vlastností a měření z prvního kroku do jednoznačných korespondencí s množinami idempotentních hermitovských operátorů, projekcí a uzavřených podprostorů Hilbertova prostoru.

V třetím a rozhodujícím kroku von Neumann navrhuje, že z (jistých) vlastností M, N můžeme vytvořit další vlastnosti ‚M a N' a ‚M nebo N', které jsou „charakteristické pro kvantovou mechaniku". Upřesněme naší notaci. Klasicky jsme z X, Y vytvořili vlastnost X *NEBO* Y. Nyní ze dvou současně měřitelných kvantových vlastností M, N vytvoříme kvantovou vlastnost M $_q$*NEBO* N. Von Neumann explicitně říká, jak to udělat. Rozšíříme korespondence ustanovené v druhém kroku: vlastnosti M $_q$*NEBO* N odpovídá „(idempotentní hermitovský) operátor $E+F-EF$", což je rovněž projektor na Hilbertově prostoru. Navíc, pokračuje von Neumann, další kvantové vlastnosti, které zde budeme označovat M $_q$*A* N a $_q$*NE* M jsou tvořeny podobnými korespondencemi. výsledek tohoto procesu je, uzavírá von Neumann, že

> ...vztah mezi vlastnostmi fyzikálního systému na jedné straně a projekcemi na druhé straně umožňuje zavést jistý ... kalkulus ..., který je charakteristický pro kvantovou mechaniku.

O čtyři roky později, s použitím podprostorů místo projekcí, začne Birkhoffova a von Neumannova spolupráce podobným a stejně odvážným tvrzením:

> Náš hlavní závěr, založený na přijatelných heuristických argumentech, je ten, že je rozumné očekávat možnost nalezení kalkulu ..., který je formálně nerozlišitelný od kalkulu lineárních podprostorů vzhledem k operacím *množinového násobení, lineární sumy* a *ortogonálního doplňku* — a podobá se běžnému kalkulu s operacemi *a, nebo* a *ne.*

Birkhoffův-von Neumannův kvantový návrh

Von Neumann pochopil, že posun od klasického Euklidova stavového prostoru ke kvantovému Hilbertovu stavovému prostoru má dva dramatické důsledky. Za prvé, *podprostory* Hilbertova prostoru odpovídají kvantovým vlastnostem a měřením. A dále, tyto podprostory mají svůj vlastní „kalkulus". Birkhoffův příspěvek byl ten, že identifikoval tento „kvantový kalkulus" jako nebooleovský svaz. Tato spolupráce nyní ukazuje, že abstraktní Hilbertův prostor je „spojen s realitou" a dává přesné předpovědi pouze proto, že nebooleovský svaz jeho podprostorů odpovídá nebooleovským svazům kvantových vlastností a výroků.

Odvážnost tohoto návrhu vyjde najevo, když si připomeneme, že euklidovský prostor je „spojen s realitou" z toho důvodu, že booleovský svaz jeho *podmnožin* odpovídá booleovskému svazu *podmnožin* klasického prostoru pozorování. Hlavní idea kvantové poloviny tohoto návrhu spočívá v tom, že posun od klasických podmnožin ke kvantovým podprostorům nutně vyžaduje, aby booleovský stavový prostor, svaz vlastností a svaz výroků klasické poloviny návrhu byly nahrazeny svými nebooleovskými protějšky. Stručně řečeno, Booleův svaz vlastností a běžná výroková logika jsou překážkou v naší naději na rozluštění kvantových hádanek.

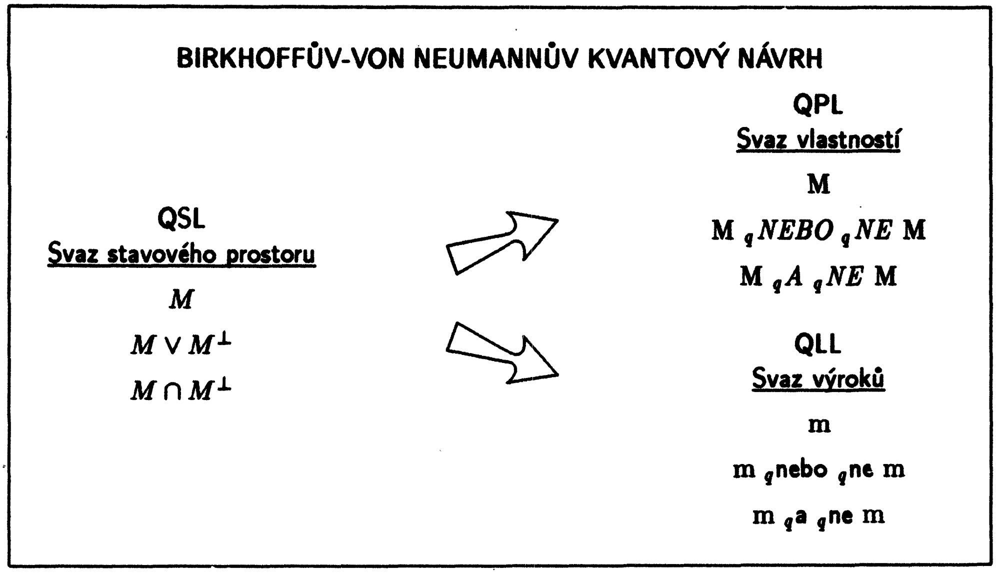
Ovšem aby toto všechno dovedli Birkhoff a von Neumann do konce, museli zcela postavit na hlavu vztahy mezi klasickými svazy. Z klasického hlediska je základem svaz vlastností. A poněvadž se nacházíme ve světě booleovských vlastností, používáme booleovský stavový prostor a výrokovou logiku. Avšak výsledkem problému interpretace kvantové teorie je, že nevíme, jakým druhem vlastností se vyznačuje kvantový svět. Birkhoffova a von Neumannova odpověď je začít s nebooleovským svazem stavového prostoru a potom použít jejich „přijatelných heuristických argumentů" a vyvodit z nich, že svazy kvantových vlastností a výroků by mohly být také nebooleovské. Obr. 3 ukazuje strategii Birkhoffova-von Neumannova kvantového návrhu s použitím notace, která má zdůraznit, že tyto nové svazy jsou kvantové nebooleovské protějšky tří klasických booleovských svazů.

Fundamentálním svazem je nyní svaz kvantového stavového prostoru. (Uzavřené lineární) podprostory Hilbertova prostoru tvoří nebooleovský svaz. Nechť S^A označuje množinu podprostorů s prvky M, N, O, ... Svazový průsek je průnik podprostorů a spojení $M \vee N$ je uzávěr lineárního obalu. Svazový doplněk je ortogonální doplněk podprostoru. Dostáváme tak svaz kvantového stavového prostoru:

$$QSL = \langle S^H, \leqq, \cap, \vee, \perp \rangle .$$

Podle Birkhoffa a von Neumanna přesné předpovědi sdružené s QSL naznačují, že svaz kvantových vlastností má stejnou svazovou strukturu jako QSL. Nechť S^P označuje množinu kvantových vlastností s prvky M, N, O, ... Operátor spojení definovaný na těchto vlastnostech je ${}_qNEBO$. Přidáním průseku a doplňku dostáváme svaz kvantových vlastností:

$$QPL = \langle S^P, \leqq, {}_qA, {}_qNEBO, {}_qNE \rangle .$$



Obr. 3. Fundamentální svaz je nebooleovský svaz podprostorů Hilbertova prostoru, kvantový prostor stavů. „Přijatelné heuristické argumenty" navrhují, že vlastnosti jako ‚úhel polarizace fotonu Θ' a výroky vztahující se k těmto vlastnostem mají strukturu, „která je formálně nerozlišitelná od" tohoto svazu podprostorů. Kvantové vlastnosti a výroky se skládají nebooleovským způsobem, „který je charakteristický pro kvantovou mechaniku", a proto vysvětlují záhady kvantové teorie.

Birkhoff a von Neumann dále navrhují, že buď QSL, nebo QPL, nebo oba dva tyto svazy vyžadují revizi naší klasické výrokové logiky. Ve svazu klasické logiky ‚nebo' byl operátor definovaný na klasických výrocích. Výsledné kvantové logické spojky by byly typicky neklasické. Kdybychom například vytvořili kvantové výroky typu ‚m $_q$nebo n' nepříslušela by jim žádná pravdivostní funkce. Navíc kvantová logika sama nemůže být dvouhodnotová. Svaz odrážející navrhovanou kvantovou revizi klasické výrokové logiky je svaz kvantové logiky:

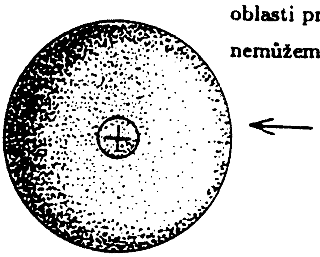
$$QLL = \langle S^S, \leqq, {}_{\mathrm{q}}a, {}_{\mathrm{q}}\mathrm{nebo}, {}_{\mathrm{q}}ne \rangle .$$

Na obr. 2 a 3 jsou znázorněny tautologie a spor v klasické i kvantové logice.

Cena za tento Birkhoffův-von Neumannův návrh je ta, že ačkoli vlastnosti svazu QPL jsou obyčejné (na rozdíl od Diracových představ), kombinují se mezi sebou neobvyklými způsoby (na rozdíl od Booleových algeber). ‚Splňují zákony' svazu QSL. například kvantová vlastnost M $_q$*NEBO* N má formální vlastnosti podprostoru $M \vee N$ podobně jako klasická vlastnost X *NEBO* Y má strukturální rysy podmnožiny $X \cup Y$. Názorněji, kvantová vlastnost vytvořená pomocí $_q$*NEBO* je zobrazena algebraickou sumou v rámci modelu podprostorů v R^2, zatímco klasickou vlastnost *NEBO* představuje sjednocení ve Vennově diagramu.

Obhájci takovýchto modelů kvantových vlastností se pokusili využít vlastností vytvořených pomocí $_q$*NEBO* k vysvětlení principu superpozice, myšlenky, která leží v srdci kvantové teorie. Tato idea vyžaduje podle Diraca existenci „vlastností, které jsou *v nějakém vágním smyslu indeterministické*". Schrödinger tvrdí něco podobného: „Kvantová mechanika má a používá Ψ-funkci (reprezentaci systému ve stavovém prostoru), aby *znázornila rozmazání* všech proměnných *právě tak jasně a spolehlivě*, jako *klasický model používá ostrých numerických hodnot*". (Zdůrazněno v obou originálech!)

Schrödinger vytvořil jiný neklasický model, když dodal, že Ψ-funkce umožňovala zcela intuitivní a vyhovující představy, „například ‚oblak záporné elektřiny' kolem jádra". A určitě stále umožňuje. Úvodní učebnice chemie dnes píší: „V souladu s Ψ-funkcí si můžeme představit elektron jako oblak náboje rozptýlený kolem jádra". Nebo dokonce ještě názorněji: „Elektrony jsou považovány za sféricky symetrickou skvrnu záporného náboje, která obklopuje jádro". Diagram na obr. 4 je typický. Autoři takovýchto modelů se snaží použít rozmazané oblaky k rozluštění kvantových hádanek.



Obr. 4. Rozmazaný neboli rozptýlený model vodíkového atomu, často používaný v učebnicích chemie, je konzistentní s kvantovou teorií, *pokud* u obrázku není chybný popis.

Jsou ale rozmazané vlastnosti konzistentní?

Významného pokroku v této otázce bylo dosaženo užitím různých verzí teorému Kochena a Speckera, který klade specifické podmínky konzistence na rozmazané modely. Definujme *QSL-strukturu* jako svaz podprostorů Hilbertova prostoru dimenze alespoň 3. $L(2)$ nechť je booleovský svaz definovaný na množině 0, 1. Teorém pak ukazuje QSL-strukturu L, která odpovídá fyzikálním pozorovatelným, ale která nepřipouští žádný homomorfismus na $L(2)$. Každý homomorfismus svazů musí podle definice zachovávat $\wedge$ a $\vee$. Zobrazení h svazu L na $L(2)$, které zachovává $\wedge$ (a v důsledku toho také $\leqq$), musí proto narušovat vztah

$$h(M \vee N) = h(M) \vee h(N)$$

pro nějaká M, $N \in L$.

Tento teorém je v rozporu s výše uvedeným třetím krokem von Neumannova argumentu, který předpokládá, že dvouhodnotová měření nebo vlastnosti mají strukturu lineárního podprostoru. Na podobnou nekonzistenci narážíme v klasické fyzice, když zkoumáme model provazu, který může být rozložen do svých ortogonálních komponent. Z teorému plyne, že pokud jsou kvantové vlastnosti *rozmazány* a měření dávají *určité* hodnoty, žádné měření nemůže tyto vlastnosti *odhalit*! (To je verze proslulého Schrödingerova paradoxu s kočkou). Konečně, teorém rovněž ukazuje, že model užívaný chemiky je nekonzistentní, pokud se k němu neopatrně přidá text (jako na obr. 4) „elektron je pravděpodobně někde v této oblasti", ačkoli „ztěží můžeme říci, kde přesně". Rozmazaný model může být užitečný. Musíme ale dbát Diracova varování, že takovýto model „nemůže být založen na klasických představách". Vezměme tedy na vědomí, že pokud má elektron nějakou polohu, neexistuje žádná poloha, kterou by mohl mít.

Niels Bohr říkával, že každý, kdo není šokován kvantovou teorií, ji nerozumí. Zde jsem se pokusil nabídnout jeden takový šokující příběh. Pokud jeho žánrem je matematické drama, pak hlavním protagonistou je svazové spojení. Všichni jste vítáni připojit se a rozhodnout, zda dramatické události nejsou jen tragickou konfrontací, ve které skvělý teorém o svazovém homomorfismu dovršuje pomstu na tomto pyšném protagonistovi a ničí jeho roli.

Poděkování: Je mi potěšením poděkovat Kenu Smithovi, Basu van Fraassenovi, Mary Wardropové a Lindě Wesselsové za komentář k mým předchozím rukopisům.

Literatura

Birkhoffův a von Neumannův článek a teorém Kochena a Speckera jsou publikovány v Hookerově prvním svazku [7]. Můj článek [9] obsahuje hlavní body důkazu tohoto teorému formulovaného pomocí svazů. Schrödingerův článek (a paradox kočky) je publikován ve Wheelerově a Zurekově antologii [12], věnované problémům interpretace. Stairs [10] intenzivně obhajuje indeterministický model. Stachel (v [4]) a Jammer v [8] obsáhle diskutují Birkhoffův a von Neumannův program, Stachel připojuje jeho ostrou kritiku. Herbertův příspěvek [6] k hádance s polaroidem a k rozmazanému modelu je příhodnou popularizací.

[1] G. Birkhoff: *What is a lattice?*, The American Mathematical Monthly *50* (1943), 484–487.

[2] G. Birkhoff: *Lattices in applied mathematics.* American Mathematical Society proceedings of symposia in Pure Mathematics Vol. II, The American Mathematical Society, Providence (1961).

[3] G. Boole: *The Laws of Thought.* Dover, New York (1854).

[4] R.B. Colondy: *From Quarks to Quasars.* University of Pittsburg Press, Pittsburgh, (1986).

[5] P. A. M. Dirac: *The Principles of Quantum Mechanics.* Clarendon, Oxford (1947).

[6] N. Herbert: *Quantum Reality.* Doubleday, New York, (1985).

[7] C. A. Hooker (ed.): *The Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics, Vol. 1 and Vol. 2.* Reidel, Boston (1975 and 1979).

[8] M. Jammer: *The Philosophy of Quantum mechanics.* Wiley, New York (1974).

[9] J. H. McGrath: *Quantum disjunctive facts.* Philosophy of Science Association proceedings *1*, 76–86.

[10] A. Stairs: *Quantum logic, realism and value definiteness.* Philosophy of Science, *50* (1983), 422–436.

[11] J. von Neumann: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.* Springer-Verlag, Berlin (1932). (Translated by R. Beyer (1955) as *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton.)

[12] J. A. WHEELER and W. H. ZUREK: *Quantum Theory and Measurement.* Princeton University Press, Princeton (1983).

Adresa autora:
Department of Philosophy
Central Michigan University
Mt. Pleasant, MI 48 859 USA

O studiu, fyzice a pochopitelnosti světa — rozhovor s Jiřím Bičákem

Prof. RNDr. Jiří Bičák, DrSc., je teoretickým fyzikem zabývajícím se převážně teorií relativity a gravitace, relativistickou astrofyzikou a kosmologií. Na matematicko-fyzikální fakultě je vedoucím katedry teoretické fyziky a pro studenty mj. vede hezkou přednášku právě z relativistické fyziky. V lednu 1992 oslavil své padesátiny.

Předkládáme čtenářům mírně pozměněnou a autorizovanou verzi rozhovoru, který s ním pro fakultní studentský časopis „Obrázky žlutých růží" uskutečnil student Radek Vystavěl.

Jak a kdy jste se rozhodl dělat teoretickou fyziku? Neměl jste někdy chuť dělat něco jiného?

Měl jsem chuť dělat nejrůznější věci. Ve 2. třídě na obecné škole jsem nadšeně dělal výpisky z Brehmova *Života zvířat*, sbíral a kreslil obrázky zvířat a chtěl se stát cestovatelem. Mám schovány seznamy různých ostrovů a poloostrovů, které jsem si zapisoval a o nichž dnes vůbec nevím, že jsou a kde jsou. Potom, zřejmě vlivem literatury (např. A. Cronina, P. Kruifa atd.), možná i vlivem rodičů, jsem ještě na začátku gymnázia chtěl dělat medicínu. Náhodou jsem se však setkal s člověkem, který překládal odbornou literaturu, a ten mě přesvědčoval, že medicína je sice krásná věc, že ji člověk chce v mládí jistě dělat z těch nejušlechtilejších pohnutek, ale že je vždy něco skryto pod praktickou medicínou, a to je medicína vědecká a ještě hlouběji biochemie. Takže jsem přešel od medicíny k biochemii. Ale ta potřebuje chemii, a pod ní ještě hlouběji jde fyzika. Za mých gymnaziálních let tu byl systém tzv. lidových univerzit — přednášky odborníků i s demonstracemi pokusů na fakultách. Pamatuji, jak jsem v 10. třídě (dnes 2. ročník gymnázia) chodil na matematiku na Karlov, na centimetrové vlny a na elementární částice na jadernou fakultu do Břehové ulice a na chemii na Albertov. Snad čtyři večery týdně jsem trávil mimo domov na přednáškách. Pořádně