Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jiří Bečvář

Vztah mezi modernizací výuky matematiky na vysokých školách technických a na SVVŠ

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 12 (1967), No. 1, 8--28

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139572

VYUČOVÁNÍ MATEMATICE A FYZICE

VZTAH MEZI MODERNIZACÍ VÝUKY MATEMATIKY NA VYSOKÝCH ŠKOLÁCH TECHNICKÝCH A NA SVVŠ*)

JIŘÍ BEČVÁŘ, Liberec

I.

1. Tendence modernizovat výuku matematiky se netýkají jen základního a středoškolského vzdělání, nýbrž zasahují i na vysoké školy. Ústřední komise JČMF pro vyučování matematice na vysokých školách technických uspořádala na toto téma již dvě konference. Lze říci, že problém modernizace matematiky je na technikách předmětem značného zájmu. Přitom otázky, které klade, jsou často zásadního rázu a týkají se nejen specifických úkolů výuky matematiky na technikách, nýbrž výuky a pojetí matematiky vůbec. Znalost potíží, na které se při jejich řešení naráží, může být užitečná i pro posouzení vhodnosti různých způsobů řešení analogických otázek na středních školách. Věnuji proto dost místa výuce matematiky na technikách a současným předpokladům pro její modernizaci.

Zdá se mi účelné předeslat k možnému pojetí modernizace výuky matematiky několik všeobecných a většinou triviálních poznámek; nebudu se k nim později již vracet. Je především třeba odlišit tyto dva možné obsahy slova „modernizace“: a) zavedení nových partií, b) nové pojetí výkladu tradičních partií. Elementy lineárního programování lze docela dobře vykládat, aniž by se přitom podstatně použilo modernějších matematických prostředků; na druhé straně rovinná geometrie může v novém pojetí dostat podobu, která se značně liší od tradičního školského pojetí.

Dále není lhostejné, k čemu vlastně výuka matematiky na určitém druhu školy směřuje (to se týká i jejích jednotlivých partií): zda a) matematika je chápána jako součást všeobecného vzdělání, které otevírá dveře pozdějším, byť zatím nespecifikovaným aplikacím, a které přitom je v dané době pokládáno za tak základní součást obecné erudice, že na něj klademe důraz i za předpokladu, že nebude v každodenní praxi určitého jednotlivce použito; nebo zda b) výuka matematiky je zaměřena k tomu, aby dala do ruky nejefektivnější nástroje specialistovi, který je zaměřen na určitý

*) Text referátu, předneseného na pracovní poradě o modernizaci vyučování matematice na školách 2. cyklu, kterou ve dnech 24. a 25. května 1966 uspořádala JČMF ve spolupráci s MŠK ve Štiříně. Některé části tohoto referátu obsahově navazují na referát, který autor přednesl na 2. konferenci o vyučování matematice a deskriptivní geometrii na vysokých školách technických (Žilina, 9.–11. září 1965).

druh činnosti. Příklad: Kdy stačí, aby se inženýr seznámil pouze se strojovým kódem konkrétního počítače? A kdy je účelné, aby studoval principy syntaxe a sémantiky obecných programovacích jazyků?

Konečně významnou součástí modernizace výuky matematiky by patrně měl být i výzkum v oblasti psychologie matematického myšlení a soustavné uplatňování jeho výsledků. Pedagogická empirie bezpečně vede ke zjištění, že to či ono je obtížné; často se podaří obtíže překonat nebo obejít, ale zřídka se to děje na základě exaktní analýzy. Prací v tomto směru není mnoho, je však možno leccos užitečného načerpat už z těch, které jsou k dispozici; viz např. práce ve sborníku [1] a do jisté míry i knihy Pólyovy [2], [3]. Úspěch modernizace výuky matematiky podstatně závisí na podílu těch, kteří jí vyučují. Tento úspěch by nebylo lehké zajistit, jestliže by pedagogika byla hlavně jen uměním.

2. Úhrnný počet hodin, které se dnes v průběhu studia věnují matematice na většině vysokých škol technických, převyšuje počet hodin v kterémkoli jiném předmětu. Na VŠST v Liberci je to bez deskriptivní geometrie zhruba 550 hodin. Už z toho plyne, že příspěvek matematiky k výuce na technikách rozhodně není zanedbatelný. Existují předměty vysokoškolského studia (a dokonce i celé obory), které je možno víceméně úspěšně absolvovat, aniž by přitom bylo třeba speciální přípravy a znalostí už ze střední školy. Matematika k nim rozhodně nepatří. Právě okolnost, že v uplynulých letech nebyla v matematice příprava ze střední školy (zvlášť z průmyslových škol) uspokojivá a že kromě toho vzhledem ke směrným číslům byli na techniku přijímáni i studenti bez náležitých předpokladů, působí stále řadu obtíží; je jedním z důvodů, proč je stav výuky matematiky na většině technik značně vzdálen ideálu. Jestliže se stále znovu a téměř v masové míře musíme potýkat s tím, že studenti nejsou schopni upravit algebraický výraz, neznají bezpečně vzorec pro řešení kvadratické rovnice, mají potíže s logaritmy, s obloukovou mírou a s goniometrickými funkcemi polovičního úhlu, jestliže zjišťujeme, že studenti mají zcela mlhavou představu o tom, co je dvojnásobný kořen algebraické rovnice a že zápasí s matematickým vyjádřením nepřímé a dokonce i přímé úměrnosti, nemůžeme zatím očekávat výsledky výuky matematiky na technice s přílišným optimismem. Jde tu o znalosti základní matematické abecedy a zdá se mi, že se matematika na technice, se svým zaměřením na aplikace a s nutností počítat příklady, bez těchto znalostí nikdy nemůže obejít, a to ať už se bude vykládat tradičním nebo modernizovaným způsobem; bude vždy nutno vyžadovat, aby tyto znalosti poskytla žákům již střední škola.

3. Snahy o modernizaci výuky matematiky neprobíhají ve vakuu, na jejich uplatnění má vliv současná situace na školách a mezi uživateli matematiky. Vyjděme zde z toho, jaký je stav na technikách. Především je třeba konstatovat, že by pro zvládnutí základního kursu matematiky, tak jak je zatím na technice podáván v prvním dvouletí, ve většině případů dokonale stačilo, kdyby student přišel na školu se znalostmi absolventa bývalé reálky. Matematika (především matematická analýza) se na technice sice vykládá přesněji, než tomu bylo dříve (její součástí jsou např. i elementy klasifikace množin v euklidovském prostoru apod.), ale k nějakým revolučním změ-

nám, které by odpovídaly současnému stavu teoretických matematických prací, zde zatím zpravidla nedochází.

Jeden z důvodů, proč tomu tak je, záleží nesporně v tom, že je třeba přihlédnout k předpokladům, se kterými studenti na školu přicházejí. Hlavní důvod, proč výklad matematiky se zde v podstatě drží tradičního schématu, je však nejspíše ten, že se vcelku nezměnil okruh a charakter aplikací, ke kterým směřuje. Derivace i nadále má především vystihnout rychlost změny určité veličiny; harmonický pohyb zůstává harmonickým pohybem, popsaným klasickou diferenciální rovnicí; rovnice kmitů struny se odvozuje v podstatě stejně jako před sto a více lety, Riemannův integrál stačí plně pro všechny běžné aplikace. Inženýr, který by dobře ovládal byť „jen" klasickou matematiku, by byl za dnešní situace např. v průmyslu výjimečným zjevem, stále ještě s neomezenými možnostmi uplatnění. (Inženýr v provozu ovšem dokonce potřebuje nejvýše logaritmické pravítko.)

Za těchto okolností není nikterak nepřirozená otázka, zda je na technikách vůbec účelné obsah a způsob výkladu matematiky „modernizovat", tj. přiblížit koncepcím matematiky poloviny 20. století. Jestliže schází zázemí vhodných aplikací, nemusí být pro studenta (a inženýra) elegance a obecnost moderních matematických pojmů dostatečným argumentem, tím spíš, že náplň tzv. odborných předmětů a způsob, jak se v nich látka zpravidla vykládá, zatím posluchače výrazně zaměřují jiným směrem. Dokonce je situace taková, že nelze říci, že by se matematice, přes značný počet úhrnných hodin, přiznával rozhodující vliv na utváření skutečného profilu průměrného absolventa. To se projevuje i formálně: pouze výjimečně jsou partie matematiky součástí závěrečné státní zkoušky. Mezi matematiky a vyučujícími ostatních předmětů panuje nejčastěji určitý druh příměří, které počítá s tradicí vymezenými, disjunktními sférami zájmu a s předpokladem, že matematika ve vyšších ročnících v podstatě vyklidí pole. Plody úsilí prvních dvou až tří let se rychle vytrácejí a posluchači ve vyšších ročnících odcházejí ze zorného pole matematika, aniž mu poskytnou možnost ověřit si konečné výsledky jeho práce. Modernizace matematiky na technice tedy nádavkem naráží i na problém současného postavení matematiky na technikách vůbec. Protože o něm byla řeč podrobněji na jiném místě [4], omezím se v dalším pouze na ty z jeho stránek, které mají přímý vztah k otázkám modernizace.

4. Z předchozího plyne, že rozhodujícím motivem pro modernizaci není zatím na technice přímá poptávka; není jím však ani nějaká neudržitelná úroveň výuky matematiky a neadekvátnost jejího pojetí vzhledem k dosud převládajícím aplikacím. Motivy jsou poněkud jiné, nejsou však o to méně důležité.

Jedním z nich je okolnost, že matematice na technikách vyučují výhradně profesionální matematikové. Jsou absolventy universit a prošli školením, které jim dalo příležitost seznámit se bohatou měrou se silou a přitažlivostí moderních matematických koncepcí. Jestliže předpokládáme, že ne všichni z teoreticky fundovaných absolventů budou zase zpět vstřebáni universitami nebo vědeckými ústavy, nýbrž že alespoň část z nich bude vyučovat na technikách, pak působení těchto matematiků nemůže zůstat bez vlivu. Je těžko si představit, že by všechny cenné motivy, ze kterých abstraktní koncepce moderní matematiky vyrůstaly, měly svůj význam jen pro profesionálního matematika, a že by se člověk, který je poznal, alespoň z části nesnažil předat je studentům. (Domnívám se, že už za současného stavu k tomu dokonce i základní kurs matematické analýzy dává jistou příležitost, a to i za předpokladu, že studenti budou mít tradiční středoškolskou přípravu a že okruh aplikací, na kterých se prokazuje účinnost nových pojmů, bude uzavřen víceméně uvnitř matematiky samotné.) Zde totiž skutečně v řadě případů nejde o „ospravedlnění" nového pojetí pomocí vnějších aplikací, nýbrž o to, přizpůsobit výklad posunutí významu starých pojmů v nové matematice a revidovat názory na důležitost, resp. absolutnost určitých pedagogických postupů, jejichž oprávněnost se často opírá především o tradici. Je třeba přihlédnout i k tomu, co je pro proces aplikace matematiky typické: že se zpravidla realizuje jen v určitých izolovaných bodech, kde se matematika a konkrétní oblast stýkají. Většinou je to při formulaci problému, která obsahuje i vstupní data, a pak zase až při interpretaci výsledného řešení, s příslušnými výstupními daty. Vše ostatní probíhá převážně v matematické oblasti a je často především součástí profese matematika, jak vhodně si organizuje pojmy a cesty k řešení.

Uvedený motiv pro modernizaci vyrůstá víceméně zevnitř matematiky a rozhodně by nebylo snadné, snažit se pomocí něho přesvědčit nematematika; není také myslím třeba se o to pokoušet. Lze totiž uvést i jiné motivy, které i když jsou příbuzného rázu, jsou navenek přesvědčivější, neboť mají konkrétnější dosah. Jedním z nich je např. okolnost, že výklad numerických metod velmi naléhavě vyžaduje zavedení některých pojmů z funkcionální analýzy (lineární vektorový prostor, různé druhy konvergence). Podobně i některé speciální přednášky z matematiky v nejvyšších ročnících, např. z teorie integrálních rovnic nebo okrajových úloh, pojednávají o matematických objektech, jejichž studiem byly nové matematické pojmy přímo uvedeny v život; bylo by pak nepřirozené těmto pojmům se vyhýbat.

5. K předchozím motivům přistupuje další, patrně nejdůležitější. Je to vlastně souhrn motivů, které vyvěrají z kvalitativních změn v charakteru vědy po druhé světové válce, z matematizace řady disciplín a ze situace, kterou s sebou přináší masové rozšíření počítačů. Školský tradiční systém reaguje na podobné změny obvykle velmi pomalu a u nás to souvisí i se známým celkovým zpožděním v ekonomice, průmyslu atd. Dnes však již začíná být jasné, jaké by byly následky, kdyby se i nadále udržoval současný stav. Přitom pronikání matematiky do nových oblastí, jak známo, nespočívá ani tak v tom, že by stále větší uplatnění nalézaly kuželosečky či integrály, nýbrž v tom, že v souvislosti se vznikem nových koncepcí teorie informace, teorie diskrétních soustav, kybernetiky, se matematickému zpracování stává přístupnou řada oblastí, kde dříve převládala subjektivní empirie nebo technická dovednost.

Tento proces a jeho perspektivy dávají matematice vnější impuls ve dvojím směru. Jednak je to nutnost rozšířit látku o netradiční partie, mezi nimiž významné postavení mají partie diskrétní matematiky (relace, logika, grafy, algoritmy, ev. Markovovy řetězce a hry). Za druhé se ukazuje, že tyto nové partie jsou většinou přirozeně vázány na netradiční abstraktnější pojmy moderní matematiky; dostáváme tak nový motiv pro užití těchto pojmů i při výkladu tradiční látky, nemá-li jít o zcela izolované věci. Přirozeným pojítkem jsou zde právě prostředky teorie množin, algebry, logiky apod. Je pozdě osvojovat si je až ve zralém věku, neboť zkušenost svědčí o tom, že např. řada inženýrů má skutečně potíže, jestliže se s nimi mají dodatečně seznámit. Chápání matematiky nejen jakožto výpočetního prostředku, ale jako nástroje pro popis pojmových struktur, byť kombinovaných s kvantitativními znaky, vyžaduje brzkou průpravu a zvyk.

6. Očekávané aplikace v netradičních oblastech a představa nového pojetí matematického popisu reality jsou tedy už samy o sobě silným argumentem pro nutnost modernizovat výuku matematiky. Jestliže ho kombinujeme s argumenty, které se opírají o „vnitřní" změny v matematice (odst. 4), je opodstatněné tvrzení, že nejen výuku matematiky je třeba modernizovat, ale že její nové pojetí je na místě pokládat i za budoucí nedílnou složku všeobecného vzdělání. Citujme, co v tom smyslu speciálně o školské matematice říká Dieudonné [5] (vychází ovšem převážně z ocenění vnitřních kvalit matematiky):

„Samozřejmě nejde o to, abychom od samého začátku postavili děti tváří v tvář velmi abstraktním pojmům, nýbrž jde o to, aby si je postupně osvojily v souhlase se stupněm rozvoje svých rozumových schopností a aby se jim tehdy, když struktura jejich myšlení vyspěje, matematika ukázala ve své skutečné podobě. Jaký cíl sledujeme vlastně v našem civilizovaném světě, když je učíme matematice? Jistě to nečiníme proto, abychom je seznámili s určitým množstvím víceméně rafinovaných tvrzení o osách úhlů v trojúhelníku nebo o posloupnostech prvočísel, pro která nikdy nenajdou nejmenšího použití (alespoň pokud se nestanou profesionálními matematiky), nýbrž proto, aby se naučily ovládat své myšlení a řídit je metodou, které používají matematikové, a také proto, že takové cvičení je nejlepším prostředkem pro rozvíjení jasnosti ducha a přesnosti myšlení. Především tato metoda by se měla stát základem výuky a vykládaný materiál pouze vhodně vybranou ilustrací."

S posledním tvrzením je možno nesouhlasit (viz vpředu, odst. 2, o znalostech matematické „abecedy"). Všimněme si však jiné věci. Zdá se mi, že modernizace matematiky na nižších stupních škol má mnohem volnější ruce než např. na technice. Mozek studenta na technice není už ani zdaleka tabula rasa a také cíl je mnohem užší a utilitárněji se posuzuje, takže výběr aplikací nelze volit s přílišnou libovůlí. Viděli jsme sice, že pole aplikací moderních koncepcí je, resp. bude potenciálně velmi rozsáhlé, na technice nás však hlediska ekonomie nutí brát značný ohled především na ty aplikace, se kterými se inženýr určitého typu pravděpodobně setká. U některých oborů zatím bohužel prakticky nelze počítat s bezprostředními aplikacemi toho druhu, o kterých byla především řeč. Pro modernizaci matematiky zbývá pak argument onoho nepříliš určitě vymezeného „všeobecného vzdělání". Hlavní problém přitom spočívá v tom, že jeho uplatnění je značně komplikováno skutečností, že náplň výuky na technice tvoří převážně matematická analýza, u které její složitost a problémy tzv. přesnosti znamenají, že každý krok směrem k moderním koncepcím znamená značný skok, provázený nemalými potížemi, pokud jde o dostatečnou motivaci. Řešení bude na řadě škol asi zatím dost kompromisní, už proto, že to není jen záležitost matematiky.

Plný zdar úsilí o modernizaci výuky matematiky na technice závisí nesporně i na tom, zda se změní pojetí výuky některých důležitých odborných předmětů. Zatím existuje málo podkladů pro víru, že by k něčemu takovému v dohledné době mohlo dojít; iniciativa matematiků je celkem osamocená. Přesto se však domnívám, že existuje prvek, jehož vstup do hry může celou situaci pozitivně ovlivnit a vést ke sblížení matematiky s odbornými předměty na zcela nové úrovni. Je to zavádění počítačů. Je přece jen již v dohledu a zkušenosti odjinud ukazují, že tam, kde nejde pouze o komerční exploataci a rutinní úlohy – a tak by tomu mělo být na vysokých školách – přináší kontakt užitek oběma stranám. Pokud jde o vliv procesu zavádění počítačů na průběh modernizace výuky matematiky v užším slova smyslu, domnívám se, že počítače zde nesehrají pouze zmíněnou úlohu prostředníka, ale že jejich intervence se projeví i v souvislosti s některými změnami v názoru na povahu matematiky samotné a na interpretaci a dosah některých jejích základních teoretických koncepcí. O tom bude podrobněji zmínka v odst. 10.

V detailech lze další vývoj těžko předvídat a předpoklady pro modernizaci výuky matematiky na technikách se budou lišit podle jednotlivých fakult a specializací. Bude též záležet na tom, zda základní studium bude jako dosud v podstatě jednotné nebo zda se bude diferencovat podle stupně teoretických nároků apod. I nadále budou existovat „provozní" inženýři, u kterých budou nároky na jejich teoretickou průpravu nižší. Při konkrétní realizaci modernizace je pochopitelně třeba začít tam a hodnotit zkušenosti především z těch fakult, kde jsou nejpříznivější podmínky. Teprve pak lze očekávat, že se nové pojetí přirozeným způsobem rozšíří i na takové školy, kde motivy pro modernizaci nejsou silné a kde výsledek modernizace lze chápat především jako už zmíněné přizpůsobení se nové představě o náplni standardního všeobecného vzdělání inženýra, bez rozdílu jeho zaměření. Adekvátnost takového vzdělání vyplývá z reálného předpokladu, že vlivem celkové racionalizace a snahy o efektivnost se podstatně změní současný stav praxe, kdy většina činností se provádí ad hoc a je podrobena tak umělým a nekontrolovatelným vlivům, že prakticky není možný racionální popis a predikce, takže předpoklady pro použití matematických metod jsou minimální.

II.

7. Předpokládejme, že už jsme dosáhli toho, aby na techniku přicházeli studenti vcelku dobře připraveni a že střední škola jim navíc dala základ pro chápání matematiky v novém pojetí. Předpokládejme dále, že by i představitelé odborných předmětů měli k matematice (aplikované) vcelku pozitivní vztah. I za této zdánlivě velmi příznivé situace zůstává výuka matematiky na technice velkým problémem a zvláště při snaze o její modernizaci se to projeví velmi výrazně. Mám především na mysli dilema, které vyplývá nejen z historického vývoje a současné situace, ale které je dáno roz-

dílným stanoviskem a zaměřením matematiků a techniků vůbec a bude patrně přetrvávat i v budoucnosti. V nejvyhrocenější formě je možno ho shrnout v těchto dvou extrémních názorech:

1. Existuje pouze jedna matematika, a to „čistá" matematika, a jen takové může s čistým svědomím učit matematik, který je hoden toho jména.
2. To, co provozují matematikové, když je nikdo nekotroluje, je magie fanatiků. Smyslem a ospravedlněním existence matematiky může být pouze její užitečnost a služba aplikacím.

V této ostré formě nebývají – alespoň na veřejném fóru – oba názory vyslovovány, a to mimo jiné proto, že zástupci jednoho z nich mohou své protivníky odmítnout poukazem na nedostatek kompetence. Přesto je užitečné oba názory takto formulovat, neboť to dovoluje jasněji vidět jejich podstatu a zároveň si uvědomit, za jakých předpokladů a jakými prostředky je event. možno ukázat jejich nesprávnost.

Všimněme si nejdřív druhého z uvedených názorů. Přestože je vyslovován především techniky a lidmi, které žene nutnost dosáhnout v určitém čase hmatatelných výsledků, realizovat a vyrábět, nelze ho zdánlivě lehce obejít konstatováním, že s jeho přijetím by pak vlastně ztratil právo na existenci např. každý základní výzkum. Je totiž známo, že s podobným názorem se v současné době ne právě lehce vyrovnává jako s tajným špatným svědomím řada matematiků, kterým není lhostejný společenský smysl jejich činnosti, a to dokonce i těch, kteří s aplikacemi mají určitý kontakt. Proti tak ostře formulovanému názoru, který redukuje poslání matematiky na její bezprostřední užitečnost, je však možno matematiku nejen pro domo sua, ale i proti jeho přímým zastáncům účinně bránit. Užitečnost je věc velmi relativní. Stačí si uvědomit, jaká kapacita výroby je např. věnována oblasti zábavy, touze po stále nových typech automobilů, tomu, aby se vyhovělo požadavkům módy. Je pravda, že z toho obrovského, stále svou rychlost a nároky stupňujícího kolotoče výroby a soutěže je těžko se vymanit. Je mi však blízký hlas člověka, který má pochybnosti o tom, zda je rozumné hodnotit matematiku především podle toho, nakolik přispívá k návrhu konstrukce stroje pro lisování blatníků, pro výrobu pralinek či nového typu dámských punčoch s tvarovanou patou. Může být příjemné být dobře zásobeným individuem ve spotřební společnosti, ale vzpíráme se tomu, aby její překotný rozvoj byl hlavním cílem existence člověka a pohlcoval veškeré jeho úsilí, a to tím spíš, že je možno mít pochybnosti o stabilitě takového vývoje.

Zpravidla bývá uvedený (druhý) názor formulován méně ostře. V tom případě ho už vůbec nelze brát na lehkou váhu, neboť pak souvisí s posouzením charakteru samotné vědy a jde pak o úlohu, kterou přitom má matematik hrát. Citujme, co říká fyzik J. R. OPPENHEIMER [6]:

„Nesmíme však zapomínat, že věda má dva aspekty. Jeden je hledání pravdy, poznávání přírody a nás samých jakožto části přírody. A druhý, zdroj techniky, chce mít právo změnit svět a uspokojovat naše skutečné i umělé potřeby."

Jestliže nejsme zatvrzele přesvědčeni, že poslední pravdu, nejhlubší poznání a spásu je možno nalézt pouze prostřednictvím matematiky, pak sama skutečnost, že řada inženýrů pracuje s touž láskou, úsilím a inteligencí jako matematikové a že často řeší neméně obtížné problémy, byť v jiné oblasti a často s jinými prostředky, má za následek, že jejich názor na matematiku a požadavky, které na ni kladou, je třeba posuzovat přinejmenším s porozuměním. A jsou i jiné, zásadnější důvody pro takovou toleranci. Omezme se už jen na první část uvedeného citátu a zkusme srovnat úsilí matematiků např. s úsilím teoretických fyziků. Kdo přispěl více „k hledání pravdy, poznávání přírody a nás samých"? Která z obou stran posuzuje smysl a poslání matematiky „správněji"? Zde jde o partnery na stejné úrovni a se souměřitelnou kompetencí. Domnívám se, že pravda jedné strany se nedá dokázat argumentem, neboť přes všechno vzájemné ovlivňování jde o dva specializované druhy činnosti, ve kterých cíle jsou ve všem o kus navzájem posunuty. Matematik je a podle mého názoru vždy zůstane specialistou, kterého nelze nahradit nikým jiným, a totéž platí i pro fyzika. Oba hledají pravdu ve svých oblastech (pomocí specifických prostředků) a oba posunují poznání — byť někdy ve vzájemné spolupráci — nezaměnitelným způsobem.

Matematik by měl umět chápat, co např. má na mysli R. P. FEYNMAN, když ve svých pozoruhodných přednáškách [7] říká (nechci to zde komentovat):

„Fyzika je nejzákladnější a nejuniverzálnější ze všech věd; její vliv na celý vývoj vědy byl obrovský." A o kus dále, když uvedl, že pro nedostatek místa se nemůže věnovat vztahu fyziky k řadě vědeckých disciplín, zvláště pak důležitému vztahu k matematice, poznamenává na okraj: „Matematiku nelze podle našeho názoru pokládat za *přírodní* vědu. Vždyť měřítkem správnosti jejích tvrzení nikterak není zkušenost."

Ze specializovaného poslání matematiky plyne, že její obsah nelze redukovat a usměrňovat pouze současnými požadavky ostatních věd a praxe. Je pravda, že zvlášť ve 20. století se prohloubila propast mezi matematikou a jejími aplikacemi, ale vyrovnání nemůže jít cestou vzájemného sporu, nýbrž na základě jiné organizace výchovy a spolupráce. Atmosféra vhodného pracovního prostředí zde má větší vliv, než se zpravidla bere v úvahu.

8. Věnujme se nyní prvnímu z obou názorů, formulovaných v předchozím odstavci. Je možné, že v uvedené formě ho zastává jen málo matematiků, nicméně není možné popřít, že je blízký charakteru většiny matematické produkce 20. století. To není bez vlivu na názor matematiků, kteří učí na technikách, neboť, jak již bylo řečeno, jsou téměř výhradně absolventy universit. A nelze říci, že by výchova, kterou absolvovali, cílevědomě přispívala k vybudování názoru jiného. K dosažení hodnotných výsledků v kterémkoli oboru nestačí dostatečně vysoký inteligenční kvocient; je k tomu třeba oddanost věci a jistá jednostrannost a úzká zaměřenost myšlení. Je známo, že v matematice to platí snad víc než jinde. To pak přináší i zaujatý pohled na předmět vlastní činnosti. I když se budeme snažit o co možno nestranné hodnocení, není možno nepřiznat, že v kontextu ostatních výkonů vědy je současná budova matematiky přinejmenším svědectvím vskutku obdivuhodných výsledků lidského mozku.

Přitom tyto výsledky vzhledem k svému univerzálnímu charakteru mají potenciálně nesmírné možnosti aplikací. Jiná je ovšem otázka harmonie matematické produkce a vnější poptávky. Zmíněný nesoulad v tomto směru a nutnost jeho odstranění by bylo možno vzít jako argument proti uvedenému (prvnímu) názoru, a to velmi silný. Bezprostředně ho však nepoužiji; odkazuji místo toho na kompetentní článek ČULÍKŮV [8], který obsahuje návrhy na odstranění popř. zmírnění disharmonie, mezi čistou matematikou a jejími aplikacemi.

Pro současnou matematiku není charakteristické jen obrovské množství výsledků. Snad ještě důležitější je její celkový charakter. Uveďme alespoň některé nejdůležitější výsledky, které současné abstraktní, resp. formální pojetí matematiky historicky ovlivnily:

1. Přiznání komplexních čísel a ideálních elementů v geometrii jakožto plnohodnotných matematických objektů.
2. Odstranění bezprostřední závislosti na „reálném" podkladu matematiky objevem neeuklidovské geometrie.
3. Pokusy o to, jak přirozená čísla nejen popsat, ale v jistém smyslu i „definovat" (DEDEKIND, FREGE).
4. Zjištění, že celou matematiku lze ex post „vybudovat" na základě teorie množin.
5. Přeměna axiomatických teorií ve formalizované teorie (HILBERT).

Nehledíme-li ke speciálním současným výsledkům matematické logiky, které ještě dále přispěly k analýze podstaty matematiky, pokud je možná zevnitř, tj. matematickými prostředky, je v oblasti běžné matematické praxe nejucelenějším projevem současné koncepce matematiky její zpracování školou BOURBAKIHO. Lze do jisté míry říci, že teprve v něm se řadovým matematikům dostaly do rukou praktické aplikace toho, čeho ve snaze o vybudování jednotného základu matematiky dříve již dosáhla matematická logika. Každý skutečný matematik je přímo či nepřímo, pozitivně či negativně pojetím této školy ovlivněn. Po staletém úsilí o konsolidaci a zpřesnění matematiky se zde matematikům dostalo oázy jistoty a k tomu i dovršení deduktivní a axiomatické metody: nemáme už jen axiomatizace různých oblastí, ale existují dokonce i axiomatizace množinové, univerzální pro celou matematiku. To nemůže nechat matematika lhostejným. Zároveň to sugestivně vzbuzuje pocit absolutnosti této mohutné budovy, v níž přece nemůže být nic náhodného a vnějšího, když vše do sebe tak obdivuhodně zapadá. Pod vlivem těchto úspěchů vznikla tendence pokládat za přesné pouze to, co je redukovatelné na množinové pojmy, a to bez ohledu na to, jak se takový postup vzdaluje intuici. Např. celá teorie pravděpodobnosti se rozdělila na tu „pravou" a na onu víceméně intuitivní, která se toleruje jen se značným váháním; první je vybudována na základě abstraktní teorie míry a vstup do ní je zpravidla povolen pouze branou HALMOSOVY učebnice.

Nebudu dále pokračovat v popisu tohoto extrémního stanoviska. Má svou přitažlivost a pokoušet se ho logicky vyvracet jeho zastáncům, jestliže neuznávají žádné jiné pojetí za možné, naráží na podobné potíže jako vyvracet solipsismus.

I když patrně trvale bude platit Hilbertův výrok, že ze zahrady teorie množin nás už nikdy nikdo nevyžene, je možno mít opodstatněné pochybnosti, zda je jejími koncepcemi podstata matematiky skutečně definitivně vystižena. To má úzký vztah i k tomu, jakým způsobem chceme modernizovat výuku matematiky. Je totiž známo, že řada modernizačních pokusů si za svůj vzor bere bourbakistické (množinové) pojetí matematiky. Domnívám se, že podstata matematiky se skutečně čistě matematickými, speciálně pak množinovými konstrukcemi zdaleka nevyčerpá.

9. Především je možno se tázat, proč matematik extrémního platonistického (množinového) ražení se spokojuje tou analýzou matematických pojmů, která končí množinovým lešením, a proč není důslednější. Vždyť matematická logika jde hloub a její prostředky nelze nikterak pokládat za méně exaktní, než jsou ty, kterých matematik běžně používá. Dnes už zdaleka nelze odmítat matematickou logiku jakožto spekulativní filosofickou disciplínu. Není sice vždy zcela jasné, jakou interpretaci dát některým jejím překvapivým výsledkům, ale způsob, jakým jich bylo dosaženo, odpovídá všem nárokům, které matematik může klást. (Kromě toho otázky, týkající se formalizovaných abstraktních jazyků, jejich syntaxe a sémantiky, staly se dnes zcela aktuálními i v oblasti matematických strojů a programování.) Výsledky, kterých matematická logika dosáhla zvláště v posledním desetiletí při studiu modelů, velmi přesvědčivě vyvracejí víru, že matematické pojmy mají jednoznačný a absolutní charakter.

Tento poměrně subtilní argument zde však nechci hlouběji rozvádět. (O některých jeho aspektech bude zmínka v odst. 12 v souvislosti s diskusí axiomatické metody.) Existuje však i jiný argument, který záleží v analýze povahy matematických pojmů z toho hlediska, jak se vyvíjejí a jak s nimi sám matematik zachází. Podle mého názoru odtud zvláště plyne to, že i nejčistší matematika má aboslutní charakter jen zdánlivě, že její povaha je velmi proměnlivá a podstatně souvisí s řadou praktických a historických okolností.

Je poučné vrátit se do 19. století a prohlédnout některé práce, na nichž spočíval vznik dnešních koncepcí. Řada základních faktů byla už tehdy známa, ale je pozoruhodné, kolik kolem nich bylo nejistot, týkajících se jejich interpretace a filosofického dosahu, jaké úsilí bylo nutno vynaložit, než se jakožto zásadní prosadilo extenzionální (množinové) pojetí vlastností a relací a než se dospělo k přesvědčení, že axiómy, známé později pod PEANOVÝM jménem, charakterizují uspořádání přirozených čísel. Přitom se nedá říci, že by tyto nejasnosti byly v pozdějších desetiletích úplně vysvětleny, že spory byly vyřešeny vyvrácením nesprávných názorů. Jak je známo i odjinud, řada nejasností byla spíš odsunuta stranou a generace vyškolené už v novém duchu si na nové koncepce pod vlivem pozitivních výsledků, jež s sebou jejich užití přinášelo, prostě zvykly. Např. to, že se dnes všechny pojmy snažíme analyzovat redukcí na extenze (množiny) a že při vyslovení slova intenze, obsah máme nepříjemný pocit, že ztrácíme pevnou a matematicky postižitelnou půdu pod nohama, je podstatně podmíněno historickými okolnostmi. Do množinové éry jsme se narodili a tisícerá neviditelná pouta provázející posunutí významů, jež dáváme matematickým pojmům, představují dědictví, od něhož se lze osvobodit zase jen pohybem myšlení generací.

Zdálo by se, že alespoň v rámci teorie množin je význam, který nakonec matematickým pojmům redukcí na její koncepce dáváme, zcela jednotný. Avšak není tomu tak. I tak elementární pojem, jako je pojem uspořádané dvojice, můžeme v (axiomatické) teorii množin buď vzít za základní, anebo ho známým způsobem definovat: $\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Podobně prakticky pro každou axiomatickou teorii je možno zvolit různé ekvivalentní axiomatizace. Je možno namítnout, že to není dostatečný argument proti tvrzení, že existuje v podstatě jediný, ideální obsah matematických pojmů, neboť samozřejmě tento obsah chápeme operativně, tj. ve smyslu souboru vět, které o daném pojmu a jeho vztazích k ostatním platí, tj. ve smyslu izomorfie. Ale už sám příklad aritmetiky přirozených čísel to vyvrací. To plyne z existence neizomorfních modelů pro různé její axiomatizace (Skolem, Gödel).

Kromě toho jsou uvnitř samotné matematiky možná různá pojetí přirozených čísel, jež odpovídají různým způsobům, jak je zavést, resp. charakterizovat:

1. konstruktivně, tj. přirozená čísla jsou ztotožněna např. s posloupnostmi čárek: $/ / / \cdots / /$;
2. pomocí Peanových axiómů (zde záleží ještě na tom, zda axióm indukce formulujeme s použitím pojmu množina nebo ne);
3. množinově, např. jako kardinální čísla ekvivalentních množin (Frege, Russell; též Dedekind).

Je dnes již jasné, že každý z těchto tří způsobů má jiný intuitivní obsah a i smysl a že je nelze bez ztráty některých podstatných charakteristik funkce přirozených čísel v matematice navzájem převést. (Zdá se, že starší i novější učebnice pro střední školy tento fakt zatím vůbec neberou na vědomí.)

Věnujme ještě pozornost psychologické stránce činnosti matematika, tj. mechanismům, které mu umožňují s matematickými pojmy vůbec pracovat. Domnívám se, že tato stránka je samotnými matematiky neoprávněně podceňována (viz např. Beth [9]); její odsouvání nanejvýš do pragmatiky matematické praxe zkresluje její prvořadý význam. Exaktní a vůbec efektivní myšlení je možné pouze tehdy, jestliže objekty, kterých se týká, „vidíme" jasně a zřetelně (clare et distincte; Descartes). Matematik i s nejabstraktnějšími objekty myšlení musí umět manipulovat téměř tak jako s konkrétními předměty, stoly nebo židlemi, jinak mu ony samy a jejich vztahy unikají z myšlenkového zorného pole. Obtížnost zde záleží v tom, že na rozdíl od konkrétních předmětů, které zůstávají v zorném poli trvale, ať už jsme chvíli nepozorni nebo se paralelně věnujeme jiné činnosti, vyžadují matematické pojmy určitého úsilí, abychom byli schopni během úvahy je fixovat a podle potřeby si je zpřítomňovat. Snadná analýza nás snadno přesvědčí o tom, že mozek používá všech možných prostředků, aby si tento proces usnadnil, konkretizuje si pojmy a jejich relace spojováním s vizuálními, emociálními a někdy zcela kuriózními obsahy a vůbec se neohlíží na jejich čistotu, pokud fungují v této pracovní sféře a ne na papíře matematického časopisu.

(Používání kalkulu a vůbec i vhodné symboliky je právě jedním z prostředků, jak přesunout operování s pojmy do oblasti, kde manipulace s nimi je snazší.) Že nejde o věci nepodstatné, to je výrazně patrné z výzkumů tzv. umělé inteligence (učící se stroje, stroje na dokazování matematických vět, stroje hrající šachy). Zde otázka, *co* je předmětem takové aktivity, je na stejné úrovni s otázkou, *jak* takový proces probíhá, jak a pomocí jakých prostředků je třeba ho programovat, aby byl vůbec schopen realizace. Je podivuhodné, čeho myšlení dosahuje při analýze spletitých situací a při redukci jejich složitosti, která je vzhledem k omeznosti rozsahu aktuálního myšlenkového zorného pole nutná. Lze očekávat, že důkladnější znalost těchto mechanismů přispěje k realističtějšímu pohledu na povahu a možnosti uplatnění matematických koncepcí.

10. Při tvoření nových matematických pojmů hrají nematematické motivy úlohu nejen jako ilustrace, ale často jako jejich přímý zdroj. Autonomní vývoj celých rozsáhlých partií matematiky, zvlášť v našem století, není iluzí, ale skutečností a má i opodstatněné důvody. Na druhé straně vlivy zevně, především z přírodovědné oblasti, lze jen ztěží docenit. Netroufám si posoudit, který z obou motivů je pro matematiku důležitější. Vliv „aplikací" je však tak významný, že je možno ho pokládat za další velmi silný argument přinejmenším proti tomu, abychom se v každodenní matematické praxi a ve výuce drželi pouze striktního stanoviska „čisté" matematiky. Iluze, že to je možné, je vyvolána tím, že obsah výuky tvoří pojmy dávno konstituované a že se nerespektuje složitý a s nematematickými impulsy související proces jejich vzniku, přestože ve zkratce ho každý, pro nějž jde o první osvojení, musí prodělat. Každý, kdo se navíc pokoušel najít matematický popis pro vystižení reality v oblasti, kde matematika zatím nebyla aplikována, zná velmi dobře, jak svízelný je to proces a jak zcela nedostatečně ho k tomu vybavilo standardní matematické školení. (Snad nejklasičtějším příkladem z poslední doby byl pojem informace.) Řadu významných postřehů k tomuto tématu je možno nalézt v článku VON NEUMANNOVĚ [10]. Není to náhodou, neboť von Neumann byl mimo jiné jedním z těch, kteří podstatnou měrou přispěli svými pracemi v oblasti počítačů a teorie složitých soustav (automatů) k novému názoru na to, jak dalece stačí dnes běžné koncepce čisté matematiky k popisu některých procesů, které dřív netvořily náplň běžných aplikací matematiky a které studuje např. kybernetika. Všimněme si tohoto tématu blíže.

Téměř všude, kde se matematika aplikuje, používá se aproximací. Přesto však podstatu nějakého jevu pokládáme za vystiženu teprve tehdy, jestliže máme k dispozici (ideální) uzavřený a úplný matematický model, kterým dovedeme jev zevně, globálně popsat pomocí konečně mnoha relací mezi konečně mnoha pojmy, tedy v jistém, metamatematickém smyslu finitně (viz např. Newtonův druhý zákon), a to i když základ je infinitní a spočívá na představě kontinua. (Jestliže už k popisu jevu použijeme nekonečného procesu, např. rozvoje v řadu či metody postupných aproximací, je tento prostředek ze stanoviska čistého matematika (jinak je tomu u praktiků!) legitimní pouze za předpokladu, že je podán důkaz konvergence.) Oblast všech tzv. exaktních aplikací matematiky se dosud týkala pouze případů, kde se ukázalo, že takový popis je možný a že dává přibližné výsledky, které se shodují s empiricky zjistitelnými fakty. V souhlase s tím se víceméně mlčky předpokládalo, že to je jediný možný exaktní způsob, jak lze matematiky použít při analýze a popisu reality.

O oprávněnosti tohoto předpokladu lze však dnes již přinejmenším pochybovat. Např. studium chování složitých soustav, schopných prakticky neomezeného a v klasickém smyslu někdy i nedeterministického rozvoje, jež mělo dříve k dispozici jako matematický nástroj v podstatě jen prostředky statistiky, je dnes navíc možno opřít o exaktně kontrolovatelný experimentální výzkum funkce jejich částí i celku na finitních exemplářích, modelovaných v počítači. To nás staví před alternativu: Buď a) nepřikládat takovému výzkumu matematický charakter, nebo b) přiznat v matematice právo na existenci i „otevřeným" objektům, s potenciálně neomezeným a apriori neurčitelným počtem relací, pro které pojem završeného matematického modelu není adekvátní. I když v současné době ještě není po ruce dostatečný počet přesvědčivých argumentů, zdá se, že jako výsledek symbiózy matematiků s počítači má v budoucnosti naději na uplatnění druhý z obou názorů.

Tím jsme skončili diskusi ke dvěma extrémním názorům na smysl matematiky, které byly formulovány v odst. 6.

III.

11. Vraťme se ke konkrétnějším otázkám, které se týkají modernizace výuky matematiky. Z předchozích úvah neplyne, že by čistá matematika, speciálně v množinovém pojetí, neměla právo na existenci. Vystihuje však jen jednu stránku matematické skutečnosti, a to tu, která odpovídá globálnímu pohledu na matematické objekty jakožto na hotové věci. Tato stránka matematické aktivity je myslím nepostradatelná. V souvislosti se sporem intuicionismu s množinovým, globálním pojetím k tomu říká B. Russell [11]:

„Můj argument pro zákon vyloučeného třetího a proti definici „pravdy" na základě pojmu „verifikovatelnosti" nespočívá v tom, že by nebylo možné zkonstruovat systém na takovém základě, nýbrž spíš v tom, že je možno sestrojit systém na opačném základě, a že tento širší systém, který zahrnuje neverifikovatelné pravdy, je nezbytný pro interpretaci jistých myšlenek, kterých se žádný z nás, jestliže je upřímný, není ochoten vzdát."

Množinový pohled má svůj právě tak nepostradatelný komplement. Jeho vliv je stále ještě s výjimkou oblasti počítačů působením historických okolností menší, ale není nikterak méně významný. Je to konstruktivistické pojetí matematiky. Zde se zvlášť jasně ukazuje, že matematika spočívá na pojmech s různým intuitivním obsahem a že tento obsah je podstatný. Pojem algoritmu nebo generujícího procesu by pouze v rámci množinových pojmů stěží mohl vzniknout a rozhodně si ho nelze s jejich pomocí osvojit. (Ostatně i množinové pojetí je s konstruktivistickým spojeno; to je ihned patrné, jakmile se na axiomatickou teorii množin začneme metamatematicky dívat jako na formální systém.)

Tendence modernizovat výuku matematiky jsou dnes často zaměřeny převážně na zavedení různých variant bourbakistického pojetí matematiky. To je však jen jedna stránka věci. Kromě hledání a zdůrazňování logických struktur uvnitř klasických partií jako jsou algebra nebo geometrie by modernizační snahy měly být v nemenší míře věnovány tomu, aby si student osvojil co nejrozmanitější intuitivní obsahy, které se k matematickým pojmům váží. Výklad elementů nových matematických partií (např. algoritmy, grafy nebo automaty) a nových aplikací klasických pojmů by ho měl připravit na možnost použití matematiky tam, kde tomu ještě nedávno stála v cestě tradiční a zdánlivá nedotknutelnost a jedinečnost primárního nematematického obsahu. (Takové příklady je možné uvést např. v lingvistice nebo v psychologii.) Snaha stůj co stůj dovést výklad až k základní abstraktní struktuře a na ní zpětně deduktivně budovat může však přitom někdy být i na překážku. Tak např. výklad základů teorie grafů, opřený o geometrický názor a směřující především k demonstraci bohatství interpretací, které pojem grafu vně matematiky má, může někdy dát víc, než když budeme jako základní věc stále zdůrazňovat, že podstatou grafu je odpovídající binární relace, a že tedy je nutno nejdříve probrat příslušné věci z teorie relací. Jako jiný příklad je možno uvést postup, při kterém se budeme snažit vyložit důležitý pojem lineárnosti pouze tak, že vezmeme množinu s unární operací, definujeme lineárnost této operace známými dvěma vztahy a pak jako dobří učitelé ukážeme příklady lineárních operací: lineární funkce, lineární zobrazení uvnitř roviny, lineární operace derivování a integrování, lineárnost diferenciálního operátoru (levé strany lineární diferenciální rovnice) apod., a to podle úrovně znalostí posluchačů. Na základě jednoznačné vlastní zkušenosti mohu říci, že pak ani jeden student nebude schopen odpovědět na otázku, výrazem kterého nesmírně důležitého přírodního principu matematický pojem lineárnosti vlastně je. (Přitom jde o studenty, kteří absolvovali kurs fyziky.)

12. Jak již bylo řečeno, pokusy o modernizaci výuky matematiky na technikách jsou v začátcích. Je obtížné stanovit už dnes konkrétně, jaké speciální předpoklady pro nový způsob výuky matematiky na technice by měla u studenta zajistit střední škola. Něco však přece jen lze říci. Všimnu si několika konkrétních otázek, které je třeba na střední škole řešit:

1. *Matematická „abeceda“*, tj. nejzákladnější matematické vědomosti. Často se tvrdí a některé modernizační pokusy už na základních školách jsou v tom duchu koncipovány, že právě v určení toho, co tuto abecedu tvoří, se moderní pojetí liší od tradičního. Domnívám se však, že bezpečné osvojení takových základních znalostí, o jakých byla řeč v odst. 2, je zcela nutnou podmínkou; nemělo by být žádnými jinými motivy ve výuce zatlačeno do pozadí. Pryč s memorováním, praví se, odstraňme početní dril a nácvik algoritmických postupů, které jsou zvláště v éře vyspělé výpočtové techniky přežitkem, soustřeďme se na pochopení podstaty věci. Obávám se, že

jednostranné uplatnění takových názorů může velmi omezit operativnost matematického myšlení (viz odst. 9), zčásti proto, že řada abstraktních matematických teorií, počítaje v to v podstatě i teorii množin, postrádá výhod existence efektivního kalkulu, jaký má např. klasická analýza. Vezměme extrémní idealizovaný příklad: Naučíme žáka malou násobilku, nevyložíme mu však algoritmus násobení víceciferných čísel; zato mu tak dokonale vysvětlíme distributivní zákon, že v každém konkrétním případě, kdy bude mít víceciferná čísla znásobit, se mu podaří s jistým úsilím si výsledek odvodit. Dosáhli jsme pak žádaného výsledku? Jiný příklad: Ke zkoušce přijde posluchač, který ví, že examinátor klade důraz ne na vzorce, ale na důkazy. Student nezná vzorec pro tvar koeficientu v obecné Taylorově řadě, ale navrhne, že si ho odvodí. Udělá přitom chybu, examinátor je však spokojen. Na námitku, že takovou věc by měl student umět reprodukovat bezprostředně jako základní výsledek, odpoví examinátor, že v případě potřeby si to může student najít ve sbírce matematických vzorců.

Domnívám se, že k efektivnímu použití matematiky je určitá zásoba vědomostí, uchovávaných prostě jako fakty, naprosto nezbytná. Sám profesionální matematik k tomu, aby mohl tvořivě pracovat, potřebuje mít v mozku k dispozici v kondenzovaném, bezprostředně použitelném tvaru velké množství výsledků, které jsou schopné na signál se ihned vybavit a zúčastnit se požadovaných kombinací. Jestliže by bylo třeba vždy od začátku si je odvozovat nebo hledat v knihách, unavil by se mozek dřív, než by byl schopen s vlastní zamýšlenou prací. (Není bez užitku provést srovnání s představou o aktivním ovládání cizího jazyka. Rozhodně nespočívá v tom, že opatříme studenta slovníkem a přehledem gramatiky, kde si může vyhledat vše, co potřebuje.) Je známo, že je účelné znát násobilku automaticky, tj. ne tak, že bychom sice hned dovedli říci výsledek 5×8, ale součin 8×5 bychom si odvozovali na základě znalosti předchozího výsledku a komutativního zákona. Je třeba stanovit, které vědomosti je účelné takto vědomě natrénovat. Je např. známo, že většina studentů zná vztah mezi rychlostí, časem a dráhou bezprostředně pouze v jednom ze tří možných tvarů, např. $v = (s/t)$, kdežto jinou z těchto tří veličin odtud musí teprve vypočítat. Nakonec ještě jednu kacířskou poznámku. Kolik matematických vzorců by měl umět absolvent dvanáctiletky „nazpaměť“? Kromě zcela základních, které souvisí s nejelementárnějšími algebraickými operacemi, snad dvě tři desítky. A přesto je často nezná. Kolik *let* se matematice učil? Kolik *hodin* opakovaného, záměrného tréninku by bylo třeba, aby si je trvale, prakticky navždy zapamatoval?

2. *Logika.* Její aktivní místo v modernizačních snahách není třeba zdůrazňovat; na technice, hlavně při výkladu matematické analýzy, by bylo velmi žádoucí, aby posluchači měli alespoň základní logickou průpravu. Pokud jde o její náplň, domnívám se, že na rozdíl od obecně panujícího názoru by rozhodně mělo být věnováno místo elementárním prostředkům predikátové logiky, bez nichž je výklad logiky umělý a zkreslený. Matematika je v nejširší míře hrou kvantorů „pro všechna“ a „existuje“; osvojuje si je už dítě, spolu se základními prostředky řeči. Naproti tomu by však nebylo vhodné nejdůležitější pojem logiky, tj. pojem logického důsledku

(nezávislého na obsahu) demonstrovat na predikátové logice, neboť to vyžaduje dost komplikovaný pojem modelu. Uvnitř výrokové logiky je to možné, jestliže se nám podaří vhodně vyložit pojem „výroková struktura složené věty". Samu výrokovou logiku je pak možno prezentovat buď s důrazem na její vlastní logický obsah, samozřejmě s použitím extenzionálních ilustrací pomocí Eulerových diagramů apod., nebo jakožto aplikaci „malé teorie" Booleových funkcí. Ta je podkladem celé řady nových aplikací základní důležitosti. Kromě příležitosti osvojit si nová pravidla pro počítání s Booleovými výrazy máme možnost ukázat, že výroková logika, elementární operování s množinovými výrazy (sestavenými z množinových proměnných a znamének pro operace sjednocení, průniku a komplementu) a zjišťování vodivosti v kontaktní síti mají společný matematický základ. Naproti tomu by bylo patrně příliš maximalistickým požadavkem chtít Booleovu algebru převádět na pojem částečného uspořádání.

Ještě dvě poznámky k logice. Pokud jde o vhodné příklady, na kterých mají být logické vztahy a zákony demonstrovány, panuje tradiční přesvědčení, že nejvhodnější příklady poskytuje geometrie. Domnívám se, že to je nesprávné. Především proto, že i elementární geometrická tvrzení mají strukturu, která svádí k neúplné logické analýze; tato analýza nemusí totiž být nikterak snadná. Vezměme např. jednoduchou úlohu „obrátit" větu typu $p \rightarrow q$: „V rovnoramenném trojúhelníku mají výšky, spuštěné z koncových bodů základny na protější strany, stejnou délku". Především je třeba jistého úsilí, aby student při této formulaci poznal, že jde o větu uvedeného typu. A při samotném obrácení je třeba provést tolik verbálních a obsahových transformací složek původní věty, že u studenta to zanechá pocit, že vůbec nejde o formální operování s výroky. V nejlepším případě se podaří, že student, veden intuitivní obsahovou úvahou, vysloví obrácenou větu $q \rightarrow p$ takto: „Jestliže v trojúhelníku výšky, spuštěné z koncových bodů základny na protější strany, mají stejnou délku, pak je trojúhelník rovnoramenný"; místo správného: „Jestliže v trojúhelníku výšky, spuštěné z koncových bodů některé strany na...". Nechci zde tento případ podrobněji rozebírat, zdá se mi však, že i dobrému učiteli může dát dost práce, než se mu podaří formulovat původní větu tak, aby bylo možno ji obrátit beze změny komponent p, q. Hlavní potíž je právě v eliminaci pojmu základny z původní formulace. Je třeba ji vyslovit např. takto: „Jestliže T je rovnoramenný trojúhelník, pak v trojúhelníku T existuje strana taková, že délky výšek spuštěných z jejích koncových bodů na protější strany jsou si rovny". – Kromě toho materiál geometrie, alespoň pokud jde o klasickou geometrii trojúhelníka a podobných útvarů (o některých partiích stereometrie to platí snad ještě více), přes svou zdánlivou názornost může logickému, přesněji řečeno deduktivnímu uvažování, které má především diskrétní a manipulativní charakter, klást značné potíže. Nejde jen o to, že neexistuje odpovídající „syntetický" kalkul; mám spíš na mysli tu okolnost, že organizace jednotlivých elementů úvahy je zpravidla dána a priori globálním pomocným náčrtem, ze kterého tyto elementy nelze dost snadno podle potřeby vyjímat, individuálně je měnit a jasně přitom vidět, který vztah je nahodilý a který zatím není dokázán; zkrátka konstruovat obrázek

„deduktivně“ tak, aby nakresleno bylo pouze to, co je již dokázáno jako správné. Matematik geometrického typu toto vše nepociťuje jako nedostatek, ale není to typ univerzální.

Druhá poznámka se týká logiky v širším slova smyslu, logiky ne už jen jako nástroje matematického myšlení, ale logiky jakožto metodologie vědeckého, resp. obecněji korektního myšlení vůbec. Příprava v tomto směru se u studentů zatím rovná nule a domnívám se, že přes podstatný příspěvek, který zde může modernizovaný výklad matematiky poskytnout, nemůže být cílem matematiky nahradit speciální výuku logiky uvnitř samostatného předmětu. Podobně ani výuka fyziky nedává systematickou informaci o vztahu empirických a exaktních věd, o metodice pokusu a jeho vyhodnocení, o neopodstatněných závěrech, o charakteru hypotéz, o charakteru poznání reality, o nejdůležitějších principech společných všemu vědeckému myšlení. Téměř naprostá nezkušenost a nepřipravenost právě v těchto otázkách, ve kterých se stýká věda, filosofie a logika, působí při výuce matematiky na technice studentům potíže, zvyšuje zdání jejich nezralosti a ztěžuje pochopení současného vývoje vědy a společnosti.

3. *Kdy lze matematické pojmy zavést definicí?* Podle představ profesionálního matematika by bylo ideální, kdyby bylo ve výuce možno nejdříve vybudovat lešení základních univerzálních matematických pojmů a s jejich pomocí pak už všechny ostatní pojmy definovat. V extrémním případě by pak intuitivní obsah, který tyto pojmy provází, byl nejvýš druhotným, posilujícím prostředkem. Takový postup, jak známo, není možný, stojí mu v cestě objektivně existující omezení mentálních schopností dítěte, daná jeho věkem a ne snad jen rozsahem předchozího školení, učiva. Je možno namítnout, že pro střední školu to už neplatí, neboť tam je vývoj mozku co do schopností abstraktního myšlení teoreticky dovršen. Myslím, že už jen ve světle toho, co bylo dříve řečeno o úloze intuitivních obsahů v mechanizmu živého matematického myšlení, tato námitka neobstojí. Je ovšem možno naučit formálnímu osvojení abstraktních pojmů a struktur, ale jejich použitelnost bude asi taková, jako kdybychom naše děti učili sanskrtu. Ať už je „obsah“ matematických pojmů cokoliv (v tomto směru není zdaleka jasno), je psychologickým faktem, že se bez něho neobejdeme; kromě toho ani teoretické snahy o redukci matematiky na formální syntaxi jejího jazyka nedospěly k výsledkům, které by dovolily obsahové pojetí pojmů eliminovat.

Pojmy, které podle mého názoru ve školské matematice nelze jednorázově zavést pouze formální definicí, jsou např. tyto: přirozené číslo, nula, záporné číslo, racionální číslo, úhel, délka úsečky, funkcionální závislost, vektor, posloupnost, řada, pravděpodobnost, algoritmus. K jejich „pochopení“ dochází někdy skokem, většinou však postupně, je to výsledek procesu, který je složitým konglomerátem empirie, interpretací, kalkulu a formálních vztahů. Značnou úlohu zde má opakování a zvyk, stálá přítomnost nového pojmu a učitele, který ukazuje, jak s ním zacházet, co si žák o něm smí a co nesmí dovolit předpokládat. Ani na technice nebudeme zavádět pojem nekonečné řady touto definicí (srov.: Dieudonné [12]), ve srovnání se kterou jsou téměř všechny ostatní běžně užívané definice „nepřesné“:

„Nekonečná řada je uspořádaná dvojice $\langle (r_n), (s_n) \rangle$, kde (r_n) a (s_n), jsou zobrazení množiny přirozených čísel do množiny reálných (resp. komplexních) čísel a platí $s_1 = r_1$, $r_n = s_n - s_{n-1}$ $(n > 1)$."

Při této příležitosti uveďme příklad jiného charakteru, u kterého zkušenost ukazuje, jaké potíže může působit pochopení logicky vcelku nikterak složité matematické formulace:

„Jestliže $a \geq 0$ a pro každé kladné číslo b platí, že $a < b$, pak $a = 0$."

Studentova naivní reakce je často tato: „Proč jsme tedy rovnou neřekli, že číslo a je rovno nule?" Konečně ještě jeden příklad: Pro žáka, který už je zvyklý na zápis rovností a operování s nimi, je celkem běžný úsudek: „Jestliže $a = b$ a $b = c$, pak $a = c$." Naproti tomu může působit potíže vyjádření téhož ve slovním tvaru: „Jestliže dvě čísla jsou rovna třetímu, pak jsou si rovna."

V matematice je třeba si zvykat na spoustu podobných věcí a jejich zdánlivá nepřirozenost je jedním z důvodů její obtížnosti. Není na místě dělat je ještě těžší jejich přehnanou formalizací a přeplněním látky mikrodefinicemi tam, kde je mozek schopen globálního intuitivního pohledu. Domnívám se, že speciálně při zavádění nových pojmů stačí polointuitivní formulace všude tam, kde nemáme zvláštní záměr, kde to přispívá k pochopení a kde názorný obsah je tak pregnantní, že není nebezpečí, že by mohl svádět k chybám (to se do jisté míry týká např. i pojmu vektoru). (Srov. [13].)

4. *Axiomatizace.* Významné místo axiomatické metody v moderní výuce matematiky je mimo jakoukoli diskusi. Nejsem si však jist, zda jsou přitom jednotlivé její aspekty oceňovány správným způsobem.

a) Především axiomatická metoda a deduktivní metoda nejsou totožné věci. Deduktivní metoda logického usuzování má svůj význam i tehdy, když naším bezprostředním cílem není axiomatizace určité oblasti. Často se zdůrazňuje především přesnost a čistota deduktivního uvažování a zapomíná se přitom na to, že deduktivní metoda je též nepostradatelným prostředkem, jak se vůbec orientovat ve složitých situacích. I jednoduchá matematická teorie je soubor nekonečně mnoha vět; nemáme k dispozici letadlo, ze kterého bychom byli schopni globálně tuto strukturu přehlédnout a popsat, nýbrž nalézáme se uvnitř a nezbývá nám než zkoumat tento labyrint pomocí řetězů jednotlivých kroků, jejichž délka je omezena schonostmi našeho mozku. (Prozkoumané oblasti pak kondenzujeme pomocí nových pojmů a struktur, takže na vyšší úrovni jsme schopni znovu s nimi deduktivně operovat jako s novými jednotkami („podprogramy").)

b) Na axiomatizaci určité oblasti je možno se dívat z různých stránek. Především jako na objev, že to, co se na první pohled zdálo nekonečně složité a heterogenní a nevylučovalo, že se na každém novém kroku nesetkáme s nečekanými překvapeními, má ve skutečnosti strukturu, kterou lze poměrně jednoduchými prostředky popsat tak, že všechny částečné struktury (pojmy) a vztahy mezi nimi, které nás zajímají, lze redukovat na konečně mnoho pojmů a relací mezi nimi. To byl asi jeden z hlavních smyslů Euklidovy axiomatizace geometrie. Tento význam axiomatické metody, ať už v matematické nebo nematematické oblasti, nepozbývá zřejmě ani nadále své platnosti.

V běžné praxi se však často tento význam axiomatizace směšuje s jiným, a to s tím, který vystoupil do popředí koncem 19. století v matematické logice v souvislosti se studiem tzv. základů matematiky. Je charakterizován vírou, že např. strukturu množiny přirozených nebo reálných čísel, jak ji dává bezprostřední intuice, lze nejen uspokojivě vystihnout axiomaticky, ale že axiomatizace může tento intuitivní obsah dokonce beze zbytku nahradit, tj. že je jednoznačnou charakterizací aritmetiky přirozených nebo reálných čísel, a to v tom matematickém smyslu, že všechny modely příslušné axiomatické soustavy jsou izomorfní (tak zvaná kategoričnost). Není bohužel už tak všeobecně známo, že tato víra se ukázala nesprávnou. Výsledky Skolemovy a Gödelovy ukazují, že axiomy aritmetiky mohou být splněny neizomorfními modely. Z toho – jestliže jsme přesto přesvědčeni, že naše intuice při chápání přirozených čísel je zcela jasná a jednoznačná – lze činit závěr, že zvolená axiomatizace patrně nebyla dost úplná, že přidáním dalších axiómů, které by vystihovaly vlastnosti přirozených čísel ještě detailněji, bychom mohli dosáhnout kategoričnosti axiomatické soustavy a zvláště i toho, že by všechny její modely byly izomorfní s „modelem", který nám poskytuje intuice. Tento závěr je však nesprávný, neboť z dalších Gödelových výsledků plyne, že vůbec každý dost bohatý axiomatický systém, který používá prostředků dostupných při dnešním pojetí formalizace, je nekategorický. Odtud především plyne, že současné prostředky axiomatické metody charakterizují „obsah" každé dost bohaté axiomatické soustavy neúplně; jinak řečeno soustava nemá jednoznačný obsah. Jestliže přitom věříme (což ovšem je předpoklad značně metafyzický), že intuice určuje přirozená čísla jednoznačně, znamená to dále, že dnešní prostředky axiomatické metody nestačí pro úplnou charakterizaci intuitivního obsahu přirozených čísel. Pravděpodobnější je však patrně druhá možnost, že totiž naše přesvědčení o jednoznačnosti intuitivní představy přirozeného čísla je iluzí založenou do jisté míry na rozporu mezi tím, že našemu bezprostřednímu intuitivnímu chápání je přístupný v základním intuitivním modelu pouze nepatrný zlomek vlastností přirozených čísel, a mezi tím, že přesto neopodstatněně věříme v intuitivní rozhodnutelnost každé otázky o přirozených číslech. (Nekategoričnost axiomatiky aritmetiky přirozených čísel není pak už možno jednoznačně pokládat za její nedostatek.)

Jak je vidět, zdaleka zde nejde o jednoduché a vyřešené otázky. V rámci školské matematiky velmi pravděpodobně nemohou nalézt přímé vyjádření, snad kromě jediného bodu. Neměli bychom se totiž např. u Peanových axiómů stavět při výuce na stanovisko, jako by „definovaly" přirozená čísla, ale měli bychom je spíš uvést jako ty jejich základní vlastnosti, které postačují k tomu, abychom odvodili vše, co budeme o uspořádání přirozených čísel potřebovat vědět. Podobně zavedení abstraktní axiomatické struktury, nevázané na konkrétní obsah, nebude patrně na místě tam, kde sice otázka její kategoričnosti triviálně nepřichází vůbec v úvahu, ale kde v podstatě nebudeme mít přirozenou příležitost pracovat s více než jedním základním modelem (to se může týkat např. pojmu algebraického tělesa).

c) Nejúčinnější uplatnění axiomatické metody je tam, kde jde o vytčení společné struktury obsahově různých oblastí. Typickým příkladem je třeba pojem svazu nebo lineárního (normovaného) prostoru. Motivace zavedení takového pojmu může však být různá. Buď je zavedení motivováno především požadavky ekonomie; nebo nám jde o to, abychom zdůraznili, že vskutku v různých oblastech můžeme nalézt strukturně ekvivalentní vztahy. Nebude pak lhostejné, kdy uvedeme nejdřív konkrétní modely a kdy naopak vyjdeme od axiomaticky formulované struktury.

d) Malá pozornost je ve výuce matematiky věnována pojetí axiomatické metody, které je možno nazvat hypotetické či experimentální. Jeho malé uplatnění při běžném pojetí matematiky má svůj důvod hlavně v tom, že se výklad soustřeďuje na předvedení už hotových výsledků. Počítají se hlavně jednorázové příklady, které slouží k tak zvanému procvičení látky. Hypotetické pojetí se zatím typicky uplatňuje hlavně v poloempirických vědách, kde bývá někdy jediným prostředkem k tomu, abychom zvládli složitou situaci v oblasti, pro kterou nemáme žádnou univerzální axiomatizaci. Zde často nemáme ani empiricky bezprostřední ani deduktivní prostředky pro stanovení pravdivosti určitého tvrzení (na základě jeho odvoditelnosti z axiómů) a zbývá pouze možnost vzít ho za lokální hypotézu a dedukovat z ní tak dlouho, až dojdeme k důsledkům, které jsou buď logicky sporné, nebo připouštějí experimentální verifikaci. Uvedené pojetí axiomatické metody může mít i ve výuce matematiky významné místo, a to zvlášť v souvislosti s probíráním nových partií a aplikací; bude pak i cenným příspěvkem matematiky k obecné metodologii vědeckého myšlení, o které byla řeč vpředu.

5. *Vztah k fyzice.* Koordinovat snahy o modernizaci výuky matematiky s úkoly, které před sebou má výklad fyziky, je patrně nesmírně obtížný problém. Nevidím zatím téměř žádnou cestu, jak ve školské fyzice *bezprostředně* uplatnit ty ze základních pojmů a metod, které tvoří náplň moderního pojetí výuky matematiky. Jestliže vezmeme např. už zmíněné Feynmanovy přednášky, které patrně představují významný pokus, jak elementárním, přitom však uceleným a důkladným způsobem přiblížit výklad výsledkům a koncepcím moderní fyziky, zjistíme, že výuka fyziky stojí především před úkolem, jak zvládnout množství značně heterogenních faktů, které vyžadují navzájem rozdílný intuitivní přístup (teplo, povrchové napětí, elektřina, Huygensův princip, atomy, vypařování). Jejich intuitivní pochopení stojí zcela v popředí a vyžaduje často značného úsilí, přestože zdánlivě jde o jevy, které nás v přírodě bezprostředně obklopují. Převést je na jednotný základ naráží na školské úrovni na známé potíže a nemůže už být vůbec řeči o tom, že by na této úrovni úlohu společného jmenovatele mohly hrát např. struktury moderní matematiky. Samy matematické prostředky potřebné v elementární fyzice jsou zcela primitivní a mají pomocný charakter. Stojí snad ještě za zmínku, že pro studenta, který si zvykl na to, že uvnitř matematiky má tak říkajíc pevnou půdu pod nohama, bývá nezřídka tvrdým oříškem smířit se s tím, že analýza fyzikálních jevů nebývá „úplná“, nýbrž jde v růz-

ných partiích fyziky do různé hloubky. Studentovi je zřejmé, že je logicky možná další analýza a nemusí být ochoten přijmout provizórium předkládaného pojetí, protože mu chybí tlak praktické nutnosti, kterou výklad ve škole nemůže vždy nahradit. Snad právě v tomto bodě by se mohla uplatnit ta stránka matematiky, která vědomě bude rozvíjet schopnosti tvoření matematických modelů skutečnosti a pěstovat „hru na hypotézy".

13. Nechali jsme stranou řadu aspektů modernizace výuky matematiky na středních i vysokých školách, mezi nimi těch, které je třeba brát v úvahu tehdy, jestliže před sebou máme jako speciální cíl výchovu budoucích profesionálních matematiků. Patří sem především otázka výchovy k samostatné tvořivé práci. Nebylo mým cílem rozebírat ji v tomto článku.

Jestliže je vůbec možno z toho, co v tomto článku bylo řečeno, vyvodit nějaký hlavní závěr, vidím ho v tom, že by cíl modernizace výuky matematiky neměl spočívat jen v přestavbě výuky na základě vnitřních požadavků matematiky, ale ve stejné míře i v obohacení výuky o to, co nové aplikace poskytují matematice zevně.

Literatura

[1] *Psichologija myšlenija*. Sborník překladů. Moskva 1965.

[2] Polya G.: *How to solve it*. Princeton University Press, 1948. Ruský překlad: *Kak rešat' zadaču*. Moskva 1959.

[3] Polya G.: *Mathematics and plausible reasoning*, vol. I, II. Princeton University Press, 1954 Ruský překlad: *Matematika i pravdopodobnyje rassuždenija*. Moskva 1957.

[4] Bečvář J.: K současnému postavení a pojetí matematiky na vysokých školách technických. Pokroky MFA *9* (1964), č. 3, str. 172—187.

[5] D'Edonne Ž.: Abstrakcija v matematike i evoljucija algebry. Sborník „*Prepodavanije matematiki*", str. 41—53. Moskva 1960. (Překlad z francouzštiny.)

[6] Oppenheimer J. R.: Počal již věk vědy? Vesmír (1965), č. 11.

[7] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.: *The Feynman lectures on physics*, vol. I. Ruský překlad: *Fejnmanovskije lekcii po fizike* sv. I., str. 55. Moskva 1965.

[8] Čulík K.: O postavení matematiky. O aplikované matematice. Aplikace matematiky *10* (1965), č. 6, str. 504—508.

[9] Bet E.: Razmyšlenija ob organizaciji i metode prepodavanija matematiky. Sborník „*Prepodavanije matematiki*" str. 31—40, Moskva 1960. (Překlad z francouzštiny.)

[10] v. Neumann J.: Matematik. Aplikace matematiky *10* (1965), č. 5, str. 444—451. (Překlad z angličtiny.)

[11] *The philosophy of Bertrand Russell*. Ed. P. A. Schip, str. 682. Tudor Publ. Comp. New York 1951.

[12] Dieudonné J.: *Foundations of modern analysis*. Academic Press, New York — London 1960. Ruský překlad: *Osnovy sovremennogo analiza*, str. 113, Moskva 1964.

[13] Nevanlinna R.: Reform in teaching mathematics. The American Mathematical Monthly *73* (1966), č. 5, str. 451—464.