Hirsh Cohen

Aplikace matematiky, výpočty a složitost problémů [Dokončení]

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 20 (1975), No. 4, 197--203

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139519`

Pri čítaní klasických článkov, kde boli položené základy kvantovej fyziky, sa nemožno ubrániť obdivu k práci a veľkosti ducha ľudí, ktorí ju vytvorili.

Nedávno som kdesi v novinách čítal, že na rakete, ktorá mala obzrieť jednu z planét a potom sa stratiť nenávratne v kozme, bola (pre ten málo pravdepodobný prípad, že by raz raketu našla nejaká civilizácia) doska s posolstvom. Na doske boli znázornené spektrálne čiary atómu vodíka. Myslím si, že to bolo dobré posolstvo a že poznanie spektier a štruktúry atómov hovorí čosi o našej civilizácii a o jej kultúre.

Literatúra

[1] HEISENBERG, W., Zeit. f. Phys. 33 (1925) 879.
[2] VAN DER WAERDEN, B. L., *Sources of quantum mechanics.* Amsterdam: North Holland 1967.
[3] LUDWIG, G., *Wellentheorie, Einführung und Originaltexte.* Berlin: Akademie — Verlag 1970.
[4] LADENBURG, R., Zeit. f. Phys. *4* (1921) 451.
[5] KRAMERS, H. A., Nature 113 (1924) 673 a Nature 114 (1924) 310.
[6] BORN, M., JORDAN P., Zeit. f. Phys. *34* (1925) 858.
[7] DIRAC, P. A. M., Proc. Roy. Soc. *A 109* (1926) 642.
[8] BORN, M., HEISENBERG, W., JORDAN, P., Zeit. f. Phys. *35* (1926) 557.
[9] PAULI JR, W., Zeit. f. Phys. *36* (1926) 336.
[10] EINSTEIN, A., Phys. Zs. *18* (1917) 121.
[11] DE BROGLIE, L., Annales de Physique *3* (1925) 22 (preklad do nemčiny možno nájsť v [2]).
[12] SCHRÖDINGER, E., Annalen der Physik *79* (1926) 361, ibid *79* (1926) 489, ibid *79* (1926) 734.
[13] BORN, M., Zeit. f. Phys. *38* (1926) 803 (viď aj [2]), ibid. 37 (1926) 863.
[14] OREAR, J., *Základy fyziky,* Bratislava: ALFA 1975.

Aplikace matematiky výpočty a složitost problémů*)

Hirsh Cohen, New York

2. Aplikovaná matematika výpočtů. Časopis Mathematical Tables and Aids to Computation založený profesorem ARCHIBALDEM z Brownovy university, který se poprvé objevil v roce 1943, byl patrně vhodně nazván a jeho obsah byl tehdy přiměřený jeho názvu. Jeho první čísla obsahovala jen informace o nových i starších tabulkách a uspokojovala potřeby poměrně malého počtu lidí, jichž se týkala. Postupně se začaly objevovat některé nové algoritmy a později byl časopis přejmenován na Mathematics

*) Dokončení překladu, jehož první část jsme otiskli v čísle 3/1975. (Pozn. red.)

of Computation. Dnes existují doslova tucty časopisů, které se z rozmanitých hledisek zabývají výpočty. Jen málo z nich se soustřeďuje na pouhé numerické problémy a v některých z nich nenajdete ani zmínku o numerických metodách. Jejich čtenářská obec je obrovská stejně jako šíře vyšetřovaných výpočetních problémů.

Podíváme-li se na věc z méně učeného hlediska, můžeme se ptát, na čem vlastně všechny počítače v současné době pracují. Ukazuje se, že asi z 20 % jsou počítače využity pro vědecké problémy. Více času se stráví tříděním. Stále roste množství výpočtů, které se týkají signálů, zpracování obrazů a jiných otázek rozpoznávání tvarů a znaků. Avšak většina veškeré výpočetní kapacity se spotřebuje na uchovávání a vyhledávání dat pro množství obchodních transakcí. Zde je množství matematické manipulace malé a vůbec ne složité – např. trochu účetnické matematiky – ale jde o obrovský a neustálý proud takového zpracování dat. Moderní systémy sdílejí čas centrální jednotky, a mohou tedy sloužit většímu počtu zadavatelů. Vzniká tak soustava, která je zdrojem obrovského toku informací, v níž řada činností postupuje v diskrétních krocích, a je opravdu nesmírně složitá, posuzujeme-li ji jako celek.

To vše znamená, že jde o nesmírně důležitou a rozsáhlou činnost dotýkající se matematiky, která zasahuje množství strojů a lidí a jejíž rozsah vzrůstá velkou rychlostí. Roste ve skutečnosti mnohem rychleji než vědecké výpočty založené na zpracování diferenčních polynomů uzlových matic. Dalo by se říci, že nauka o výpočtech tohoto obecného typu je právem jádrem výpočtové matematiky. Avšak je třeba vykonat velmi mnoho matematické práce, pravděpodobně mnohem více než v klasických oblastech matematických aplikací. Zdá se rozumné prosazovat, aby aplikovaná matematika rozšířila svoji působnost a zahrnula jistou část této oblasti. Při nejmenším bychom si měli být velmi dobře vědomi rychlosti růstu i množství a druhu matematické práce, kterou je třeba vykonat ku prospěchu těch, které hodláme vzdělávat v aplikované matematice.

V jiném článku v tomto čísle časopisu*) popisuje profesor Perlis řadu výpočetních problémů v tom širokém smyslu, jaký mám na mysli já. Rád bych zdůraznil některé z nich.

Zaprvé, abychom mohli předat problém počítači, ať již jde o komplikovanou nelineární parciální diferenciální rovnici či o jednoduchý účetní nebo třídicí postup, musíme mít algoritmus. Studium algoritmů jako takových prošlo svou abstraktní fází, ale já bych se chtěl zmínit o některých aspektech algoritmů reálných výpočetních procesů. Je vidět jistý přesun od studií algoritmů na automatech nebo Turingových strojích k algoritmům tak, jak se skutečně používají. Vždycky existovaly a budou existovat algoritmy vytvořené ad hoc k provedení těch či oněch speciálních výpočtů. Avšak především potřebujeme skutečně účinná měřítka kvality skutečných výpočetních algoritmů. Jak zdůraznil Knuth ([14]), můžeme zvolit jeden ze dvou přístupů: buď zkoumat často užívaný algoritmus a analyzovat ho velmi podrobně z hlediska aritmetických operací a požadavků na paměť a potřebné údaje, nebo uvažovat celou třídu algoritmů, které jsou všechny schopny vykonat požadovaný úkol, a vybírat z nich ten „nejlepší“.

Jako příklad prvního přístupu analyzuje Knuth přerovnání prvků uspořádané mno-

*) Míněn Quaterly of Applied Mathematics, duben 1972 (zvláštní číslo). (Pozn. překl.)

žiny, tzn. nahrazení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ množinou $(x_{p(1)}, x_{p(2)}, \ldots, x_{p(n)})$, kde p je nějaká permutace množiny $1, 2, \ldots, n$. Přitom se předpokládá, že p je dáno a že pomocná paměť je konečná. Takový algoritmus by mohl být potřebný při transponování obdélníkové matice nebo při zpětné konečné Fourierově transformaci. Měřítkem pracnosti může být potřebný čas nebo počet sčítání a násobení, počet operací srovnávání nebo požadavky na kapacitu paměti. V tomto případě Knuth zjistil, že potřebný čas je v průměru řádu $n \ln n$ operací, ale nejhorší možnost je řádu n^2. Podobným způsobem byly vyšetřovány i jiné dobře známé postupy jako iterační schémata ([15]), hledání nulových bodů mnohočlenu ([16]) a maticové operace. Byla snaha užívat v tomto výzkumu analytických metod. Jak poznamenal Knuth, často se dospělo k zajímavým „staromódním" algebraickým problémům. Existuje empirická verze tohoto způsobu rozboru jednotlivého algoritmu. Problém se naprogramuje, „sjede" na počítači a změří se čas nutný k dosažení výsledku. To je ve skutečnosti obvyklá cesta, jak vyzkoušet nejen algoritmus, ale i počítače a jejich systémy.

Druhý přístup je obtížný tím, že je třeba najít celou třídu algoritmů, které řeší daný úkol. To je obtížné pro matematickou operaci jakéhokoliv stupně složitosti. V několika případech se to podařilo, i když, jak se zmíním později, vždy byla nějaká omezení obecnosti. Než přistoupím k těmto příkladům, je důležité uvést zmíněné pojmy účinnosti do vztahu se složitostí, obtížností a omezujícími předpoklady. Hovořili jsme již o explicitním měření výpočetní práce ve smyslu počtu provedených základních aritmetických operací. Nemáme jiná měřítka, snad s výjimkou času, který je potřebí k provedení algoritmu. Zdá se, že jsme v tomto okamžiku schopni měřit obtížnost pomocí základního pracovního úkonu počítače – aritmetických operací. Pojem „nejlepší" v tomto smyslu znamená pak minimum vyžadovaných pracovních kroků. Může existovat dolní mez počtu nutných operací, a tedy definitivní hranice. Na druhé straně může existovat horní hranice ukazující, že není třeba provést víc než jisté množství práce. Z toho plyne, že na této úrovni se složitost opět měří množstvím práce, kterou je třeba vykonat. To nejsou příliš pěkné definice. Kromě toho nemají žádný vztah k množství skutečné energie spotřebované při výpočtu. Taková fyzikální měření výpočetních procesů a fyzikální omezení jejich rychlosti, energie, rozsahu atd. byla studována Landauerem ([17]), Keyesem ([18]), Freiserem a Marcusem ([19]).

Existují rafinovanější definice složitosti funkcí z hlediska jejich vyčíslitelnosti. Řada prací pojednávajících o pokrývání funkcí a funkcionálních prostorů používá k měření složitosti pojmu ε-entropie ([20], [21]). Ať jsou tyto myšlenky matematicky jakkoliv přitažlivé, neměly zatím velký vliv na reálné výpočetní algoritmy.

Algoritmy, které jsou nejlepší ve smyslu nutného počtu operací, mohou být porovnávány s časově nejlepšími pomocí dolních odhadů časů aritmetických operací, které byly stanoveny Winogradem ([22]). Vzorce tohoto typu předpokládají, že fyzikální čas zapnutí každého logického okruhu je znám a pak zjišťují minimální počet logických kroků nutných k provedení jednoduchého sčítání, přenosu, násobení nebo porovnání. Např. minimální čas pro sčítání je dán vzorcem

$$\tau_{\mathrm{add}} \geqq \Delta \log_r 2 \, [\log_2 \alpha(N)] \, ,$$

kde r je počet vstupů do každého z použitých logických obvodů (výstup je jediný), N je rozsah slova, α je funkce závislá na prvočinitelích čísla N a Δ je přepínací čas užitých obvodů. Toto je speciální případ, kdy logika je dvouhodnotová, ale byl vyšetřen i případ d-hodnotové logiky. Bylo dosaženo také výsledků pro ostatní základní aritmetické operace. Jsou velmi obecné v tom, že platí pro jakýkoliv způsob kódování čísel.

Nejlepší algoritmus pro výpočet polynomu (zahrnující skalární součin) libovolného stupně je známý ([23], [24]); pro mnohočlen n-tého stupně je nezbytných n násobení. Má-li být hodnota daného mnohočlenu vypočítávána vícekrát jako v rutinních výpočtech speciálních funkcí, je možno metodu upravit, aby dávala ještě lepší výsledky, než jsou tyto obecně nejlepší pro mnohočleny daného stupně. Výpočty se musí opakovat tolikrát, aby se úprava metody vyplatila. Pokus nalézt dolní hranici pro násobení matic nevyústil v nejlepší algoritmus, ale dospěl k překvapujícímu výsledku, že dvě $n \times n$ matice mohou být vynásobeny méně než n^3 operacemi násobení. Winograd ([24]) nejdříve nalezl algoritmus, který pro velká n vyžaduje $\frac{1}{2}n^3 + n^2 + \ldots$ násobení (počet sčítání se zvětší z $n^3 + n^2$ na $\frac{3}{2}n^3$ + členy nižšího řádu; počítač obvykle sčítá několikrát rychleji, než násobí). Strassen ([25]) pak objevil algoritmus, v němž je počet násobení úměrný $n^{\log_2 7}$. Nebylo dosud dokázáno, že tento algoritmus je nejlepší, ale ukázalo se, že jakmile byly položeny správné otázky, došlo se k zajímavým výsledkům. Vyšetřování nejlepších iteračních metod je v počátcích. Wolfe a Winograd ([26]) uvažovali jistou třídu iteračních schémat a stanovili horní odhady rychlosti konvergence. Co se týče inverze matic a řešení lineárních rovnic, nedosáhlo se příliš uspokojivých výsledků. Ukázalo se ([27]), že omezíme-li se na takové algoritmy, které používají jen záměn řádků, pak n lineárních rovnic vyžaduje přinejmenším $\frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 - n)$ násobení. Winograd ([24]) ukázal, že toto číslo může být zmenšeno na $\frac{1}{6}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{10}{3}n - 8$. Avšak významnějších objevů pro tyto druhy operací se nedosáhlo.

Uvedli jsme několik – dá se říci, že většinu – dosažených výsledků pro numerické algoritmy. Co se týče nenumerických algoritmů, bylo dosaženo jistých výsledků o nejlepších algoritmech pro třídění. Před několika lety zjistil A. Gleason, že používáme-li pouze porovnávání, nelze soubor n prvků roztřídit méně než $\log_2(n!)$ operacemi. Existují konstruktivní důkazy ukazující, že je skutečně možno docílit $\log_2(n!) + 0{,}086 ln$ operací. Avšak tyto odhady jsou založeny doslova na pouhém zjištění počtu porovnání a neberou v úvahu práci nezbytnou k cílovému uspořádání dat. Jsou známy jiné, trochu praktičtější odhady pro některé jednotlivé algoritmy, kde očekávaný počet porovnání dosahuje $\log_2(n!)$ pro velmi veliká n ([28]). Je známo, že nejhorší případ při hledání průměru souboru n numerických hodnot je řádově n ([29]). Tyto problémy vypadají na pohled jednoduše, ale jde o tak často užívané algoritmy, že je důležité udělat něco pro jejich hlubší pochopení.

Můžete se ptát, jak lze rozhodnout, které algoritmy jsou důležité. Na tuto otázku nemáme v současné době žádnou rozumnou odpověď. Existují algoritmy, které se používají velmi často z toho důvodu, že aplikované problémy jsou matematicky formulovány jistým způsobem. Jejich příkladem jsou maticové algoritmy nebo třídění. Existuje dále jiná třída algoritmů, která hraje podstatnou úlohu v řízení samotného počítače; např. jisté programovací algoritmy mohou být v systému s multiprogramováním znovu a znovu používány. Řídicí jednotka velké výpočetní soustavy musí vykonat velké množství výpočtů, aby soustava fungovala. Jednodušší úkony, které se týkají změn indexů nebo přenosu údajů z jedné úrovně paměti do jiné, se mohou používat ještě častěji. Pokud vím, nikdo dosud neanalyzoval pečlivě způsob jejich použití.

Způsob přístupu k analýze reálných algoritmů, který jsem stručně popsal, je pouhým začátkem. Nabízí praktické výsledky pro okamžité použití — jaké je to překvapení, jestliže nové meze jsou lepší než dosavadní algoritmus — a kromě toho se zdá, že umožňuje teoretické proniknutí do výpočetního procesu.

Zmínil jsem se o operačních soustavách. Jsou to veliké technické celky, které pro svoji přípravu vyžadují tisíce řádků ve strojovém kódu. Musí pracovat velmi spolehlivě. Ve skutečnosti dnes existuje a pracuje jen malý počet těchto velkých programovacích systémů, ale v budoucnosti je budeme vyrábět stejně jako vyrábíme dnes jiné rozsáhlé konstrukční celky — velké mosty, závažné stavební projekty nebo dopravní systémy. Zaměstnají doslova tisíce lidí a budou velmi nákladné. Domnívám se, že ve své konstrukci jsou stejně komplikované jako ty největší projekty, které lidstvo uskutečnilo včetně leteckých a kosmonautických systémů. Přesto je známo velmi málo o matematické struktuře takových soustav. Byly uskutečněny jisté simulace, ale je těžké rozhodnout, jak jsou přesné nebo jak spolehlivě předpovídají skutečnou situaci. Provádí se rozbor některých speciálních částí operačních systémů: překladačů, které překládají programy do strojového jazyka, částí paměti a paměťových funkcí. Ale i tyto teorie jsou ve svých počátečních stadiích a neexistují žádné všeobecné modely pro projektování a optimalizaci. V této oblasti je potřebí vykonat mnoho matematické práce a přitom zde existuje reálný objekt, který má být modelován, vysvětlen a zlepšován.

Zmínil jsem se také o velikém množství výpočtů, které souvisí se shromažďováním a vyhledáváním informací. Mohou to být výchozí údaje, které jsou používány v samotných aplikacích, nebo to může být vlastní operační systém počítače, uložený ve formě dat v jisté části paměti, nebo některé mezivýsledky pro databanku. Je-li dán jistý soubor údajů, např. soubor osobních spisů s jistým počtem rubrik a s údajem v každé rubrice — věk, pohlaví, stav, povolání atd. — je bystrý programátor schopen jej analyzovat a pravděpodobně i optimalizovat uložení a vyhledávání údajů tohoto souboru. Avšak má-li co dělat s řadou takových souborů, které se svým obsahem překrývají, stává se optimalizace obtížnou. Jestliže konečně je třeba navrhnout způsob zpracování údajů velmi rozsáhlého souboru takových souborů a snažíme-li se pochopit dynamickou činnost počítače při proměnném programovém zařízení, stává se problém velmi obtížným. Svět je plný dotazníků a statistik a stále více a více naší činnosti bude s nimi souviset. Jaká je jejich matematická struktura nebo jakou strukturu je možno jim dát? V této oblasti bylo vykonáno mnoho empirické práce, takže existují účinné základní operace s daty, ale dosud bylo provedeno jen velmi málo matematického rozboru, který by byl blízký skutečnému výpočetnímu problému. Dělají se pokusy aplikovat na rozbor dat různá hlediska teorie grafů, metod konečné geometrie nebo myšlenek kombinatoriky, ale tyto metody se neprojevily jako zvlášť vhodné. Je to oblast, která roste rychleji než kterákoliv jiná, ale je tak vzdálena od klasických matematických aplikací, že jí nebylo dosud věnováno mnoho pozornosti.

Máme zde tedy tři témata ve výpočtové matematice — složitost algoritmů, modelování operačních systémů a třídění dat — která by byla schopna využít mnohem rozsáhlejší matematickou účast, než je jim nyní poskytována. Jejich požadavky jsou vzdáleny té přibližné analýze, která byla tak úspěšná ve fyzikálních vědách. V technickém rozvoji i využití těchto oblastí bude však zaměstnána spousta lidí, více než jich pracuje ve většině dnes známých aplikací matematiky. Myslím, že budeme muset rozšířit svůj názor na to, co je to aplikovaná matematika tak, abychom obsáhli tyto oblasti.

Zmínil jsem se trochu o složitosti některých algoritmů, o mezích výpočtů a také o tom, jak málo víme o složitosti jiných matematických struktur a jejich aplikacích ve výpočtech. Rád bych se nyní stručně obrátil ke vztahům mezi způsobem výpočtu či zpracování informací, jak je provádíme fyziologicky, a tím, co jsme schopni vykonat elektronicky a mechanicky.

Existují základní fyzikální konstanty, které slouží k určení mezí. Naskýtá se tedy především otázka, zda existují také takové hranice výpočtů. Winogradovy meze, tj. dolní hranice času aritmetických operací, představují jeden druh. Z fyzikálního hlediska na základě myšlenky, že jednotka energie pozadovaná k přepnutí z jednoho stavu do druhého je $kT \ln 2$, došli LANDAUER ([17]), MARKO ([30]) aj. k závěru, že celá hmota vesmíru může poskytnout asi 10^{93} bitů informace. Maximální rychlost, kterou by tyto informace mohly být zpracovány, byla stanovena BREMERMANNEM ([31]) na 10^{47} bitů na gram a sekundu.

Dalo by se soudit, že tato čísla poskytují dobré východisko ve smyslu požadované výpočetní schopnosti. Moderní systémy mohou mít paměťové soustavy, které dosahují 10^{12} až 10^{14} bitů. Rychlost zpracování bitů je řádově jen 10^7 nebo 10^8 bitů za sekundu. Počítač, jehož operační systém je schopen zpracovat milión instrukcí za sekundu, může vyžadovat vstup jednoho bitu na instrukci, což je uskutečnitelné. Existují dokonce kombinace fyzikálně dosažitelných zařízení, které dávají mnohem větší čísla. Např. ASHBY ([32]) upozorňuje, že mřížka 20×20 žárovek může dát 10^{120} různých obrazů pouhou volbou zapnutí a vypnutí jednotlivých žárovek. Počet možných různých variací lidské genetické struktury stanovil Bremermann na $10^{2,4 \times 10^9}$.

Z fyziologického hlediska se ukazuje, že naše smyslová soustava dosahuje vstupní rychlosti bitů nepříliš odlišné od přenosových rychlostí v paměti počítače. Odhaduje se, že zraková soustava může přijmout řádově 10^7 bitů za vteřinu. Ostatní smyslové orgány pracují pomaleji. V centrálním nervovém systému je zhruba 10^{10} neuronů, z nichž část musí představovat paměťovou kapacitu. Avšak skutečná rychlost zpracování informací je velmi nízká. Například při čtení nebo při naslouchání můžeme zpracovat 40 bitů za sekundu. Čísla můžeme vnímat rychlostí 3 bitů za sekundu. Je tedy zřejmé, že náš vnitřní nervový systém buď zpracovává data potřebná k provedení těchto úkonů pro nás nepochopitelným způsobem, nebo máme spoustu nadbytečné zpracovatelské kapacity, nebo pracujeme velmi daleko od svých vrcholných možností. Nepřekvapilo by, kdyby naše smyslová a mozková soustava měla určitou rezervu, která by umožňovala zpracovat mnohem více údajů pro záchranu v případě překvapení nebo nebezpečí. To ovšem vede k zamyšlení, jak bychom mohli docílit, aby člověk za normální situace pracoval na úrovni bližší své vyšší schopnosti.

Taková diskuse nepřipomíná příliš aplikovanou matematiku, ale tvrdím, že chceme-li dělat matematiku v neurofyziologii, musíme sami proniknout do problémů tohoto typu. Jsem přesvědčen, že to bude mít mnohem větší důležitost než modely ve tvaru nelineárních diferenciálních rovnic, o nichž jsem se zmínil dříve v souvislosti s uzly nervových vláken.

Věřím, že výzkumy, o nichž jsem hovořil a které souvisí s mezemi výpočetních algoritmů a fyzikálními hranicemi výpočtů, se budou rozvíjet a že najdou své protějšky v jiných nových aplikacích matematiky. Nepochybuji, že stále více a více lidské činnosti bude matematizováno a zobrazeno v počítačích. Doufám, že my, aplikovaní matematici, jsme schopni udržet s tímto vývojem krok. *Přeložil Jiří Jarník*

Literatura

[14] D. Knuth: *Mathematical analysis of algorithms.* IFIP Congress, Ljubljana (1971).

[15] J. Traub: *Iterative methods for the solution of equations.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.

[16] B. Dejon and P. Henrici, ed.: *Constructive aspects of the fundamental theorem of algebra.* Proc. of symp. at IBM Zurich, June 1967, Wiley-Interscience, New York 1968.

[17] R. Landauer: *The future evolution of the computer.* Physics Today *23*, 7, 22 (1970).

[18] R. Keyes: *Power dissipation in information processing.* Science *168*, 796—801 (1970).

[19] M. Freiser and P. Marcus: *A suivey of some physical limitations on computer elements*, IEEE Trans. on Magnetics *MAG-5*, 82—90 (1969).

[20] Vituškin A. G.: *Ocenka složnosti zadači tabulirovanija.* Gos. izdat. fiz. mat. liter., Moskva 1959.

[21] Kolmogorov A. N.: *O predstavlenii nepreryvnych funkcij neskolkich peremennych v vidě superpozicij nepreryvnych funkcij odnogo peremennogo i složenija.* Doklady AN SSSR *114* (1957), 953—956.

[22] S. Winograd: *On the time required to perform addition.* J. Assoc. Comp. Mach. *12*, 277—285 (1965).

[23] Pan, V. Ja.: *O sposobach vyčislenija mnogočlenov,* Uspechi mat. nauk *21* (1966), 103—134.

[24] S. Winograd: *On the number of multiplications necessary to compute certain functions.* Comm. Pure Appl. Math. *23*, 165—179 (1970).

[25] V. Strassen: *Gaussian elimination is not optimal.* Numer. Math. 13, 354—356 (1969).

[26] S. Winograd and P. Wolfe, *On the rate convergence of local iterative schemes.* In *Theory of Machines and Computations*, Academic Press, Inc., N. Y. and London, 1971, pp, 67—70.

[27] Kljujev V. V. a Kokovkin-Ščerbak N. I.: *O minimizacii čisla arifmetičeskich operacij pri rešenii linejnych algebraičeskich sistem uravnenij. Ž.* vyčislitelnoj matem. i matem. fiziki *5* (1965), 21—33.

[28] W. Frazer and A. McKellar: *Sample sort: a sampling approach to minimal storage-free sorting.* J. Assoc. Comp. Mach. *17*, 496—507 (1970).

[29] M. Blum (Berkeley), R. Floyd (Stanford), R. Tarjens (Cornell), aj. Dosud nepublikovaný výsledek.

[30] H. Marko: *Physikalische und biologische Grenzen der Informationsübermittlung.* Kybernetik *2*, 274—284 (1965).

[31] H. J. Bremermann: *Optimization through evolution and recombination.* V *Self-organizing systems*, redakce M. C. Yovits et al., Spartan Books, Washington D. C., 1962, pp. 93—106.

[32] W. Ashby: *Some consequences of Bremermann's limit for information-processing systems.* V *Cybernetic problems in bionics,* Bionics Symposium, 1966, red. Hans L. Oestreicher, Gordon and Breach, N. Y., 1968, pp. 69—76.

Učení začíná činnostmi a jednáním, postupuje ke slovům a představám a mělo by skončit žádoucími algoritmy rozumového uvažování.

G. PÓLYA