Karel Mišoň; Zdeněk Pírko
Složené rakety [Dokončení]

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 9 (1964), No. 5, 267--292

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139495`

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK IX — ČÍSLO 5

SLOŽENÉ RAKETY

KAREL MIŠOŇ, ZDENĚK PÍRKO, Praha

9. EKVIPARAMETROVÁ RAKETA 1. DRUHU

Jestliže dva ze tří parametrů (8,2) se v subraketách složené rakety nemění (nezávisejí na i), pak vzhledem k (8,3) je takový i zbývající parametr. Na příklad pro

$$\lambda_i = \lambda,\ \xi_i = \xi \text{ pro všechna } i \tag{9,1}$$

je také

$$\varepsilon_i = \frac{1 - \lambda - \xi}{1 - \lambda} = \varepsilon \text{ pro všecka } i\,. \tag{9,2}$$

Získali jsme tak jednu standardní složenou raketu; nazveme ji *ekviparametrovou raketou 1. druhu.* Z (8,5) plyne pro tuto raketu

$$\Lambda = \lambda^n\,,\quad \Xi = \sum_{i=1}^{n} \xi\lambda^{i-1} = \xi \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda} \tag{9,3}$$

a spojením rovnic (2), (3)

$$(1 - \Lambda)(1 - \varepsilon) - \Xi = 0 \tag{9,4}$$

nezávisle na počtu stupňů uvažované rakety. Odtud činíme tyto závěry:

a) Při daném strukturním parametru ε je mezi úhrnným užitečným parametrem Λ a úhrnným energetickým parametrem Ξ obapolně jednoznačná lineární korespondence

$$\Lambda = \frac{1 - \varepsilon - \Xi}{1 - \varepsilon}\,,\quad \Xi = (1 - \varepsilon)(1 - \Lambda)\,,$$

takže dvě složené ekviparametrové rakety s týmž ε, jedna n_1 stupňová, druhá n_2 stupňová, které mají totéž Λ, popř. Ξ, mají i totéž Ξ, popř. Λ.

b) Buď $n_1 = 1$, $n_2 = n$ $(n \geqq 2)$; analýzu zavedené standardní rakety vzhledem k jednoduché raketě s týmž ε jakožto raketě porovnávací lze tedy vždy provést jen pomocí Λ (častěji), nebo jen pomocí Ξ.

Vzájemné vztahy, kterých přitom používáme, jsou uvedeny v tab. IV; v ní je pro stručnost zaveden tzv. *komplementární strukturní parametr*

$$\eta = 1 - \varepsilon\,.$$

Tabulka IV

	Λ	λ	Ξ	ξ
Λ		λ^n	$\dfrac{\eta - \Xi}{\eta}$	$\left(\dfrac{\eta - \xi}{\eta}\right)^n$
λ	$\Lambda^{1/n}$		$\left(\dfrac{\eta - \Xi}{\eta}\right)^{1/n}$	$\dfrac{\eta - \xi}{\eta}$
Ξ	$\eta(1 - \Lambda)$	$\eta(1 - \lambda^n)$		$\eta\left(1 - \left(\dfrac{\eta - \xi}{\eta}\right)^n\right)$
ξ	$\eta(1 - \Lambda^{1/n})$	$\eta(1 - \lambda)$	$\eta\left(1 - \left(\dfrac{\eta - \Xi}{\eta}\right)^{1/n}\right)$	
$1 - \Lambda$		$1 - \lambda^n$	$\dfrac{\Xi}{\eta}$	$1 - \left(\dfrac{\eta - \xi}{\eta}\right)^n$
$1 - \lambda$	$1 - \Lambda^{1/n}$		$1 - \left(\dfrac{\eta - \Xi}{\eta}\right)^{1/n}$	$\dfrac{\xi}{\eta}$
$1 - \Xi$	$\varepsilon + \eta\Lambda$	$\varepsilon + \eta\lambda^n$		$\varepsilon + \eta\left(\dfrac{\eta - \xi}{\eta}\right)^n$
$1 - \xi$	$\varepsilon + \eta\Lambda^{1/n}$	$\varepsilon + \eta\lambda$	$\varepsilon + \eta\left(\dfrac{\eta - \Xi}{\eta}\right)^{1/n}$	

Po dosazení hodnot (3) do rovnic (8,6), (8,6*) nalezneme toto rozložení hmot ve složené ekviparametrové raketě jako celku:

$$Z = \lambda^n M\,, \quad E = \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda}\,\xi M\,, \tag{9,5}$$
$$S = \varepsilon(1 - \lambda^n)\,M = (1 - \lambda^n)\left(1 - \frac{\xi}{1 - \lambda}\right)M\,.$$

10. ANALÝZA SLOŽENÉ RAKETY PARAMETRY 1. DRUHU

Za předpokladů uvedených v odst. 5 přejdeme také ve složené raketě od statického rozdělení k balistickému rozdělení hmot. Pro každou subraketu složené rakety a pro každý okamžik aktivní periody subrakety platí zase Ciolkovského rovnice

$$m_i \dot{v}_i = - U_i \dot{m}_i$$

s neurčitým integrálem

$$v_i + U_i \ln m_i = \text{konst}\,.$$

Ten má pro začátek $(t = t_i,\ m_i(t_i) = M_i,\ v_i(t_i) = V_{i-1})$, popř. konec $(t = t_i + T_i,$ $m_i(t_i + T_i) = K_i,\ v_i(t_i + T_i) = V_i)$ její aktivní periody tvar

$$V_{i-1} + U_i \ln M_i = \text{konst}\,, \quad \text{popř.} \quad V_i + U_i \ln K_i = \text{konst}$$

a pro charakteristickou rychlost této subrakety dává

$$V_i - V_{i-1} = U_i \ln \left(M_i/K_i\right). \tag{10,1}$$

Poněvadž složená raketa byla na počátku činnosti $(t = 0)$ v klidu a poněvadž konečná rychlost každé subrakety je (bez jakéhokoliv časového zpoždění) zároveň počáteční rychlostí následné subrakety, obdržíme sečtením rovnic (1) pro $i = 1$ až $i = n$ $(V_0 = 0)$

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} U_i \ln \left(M_i/K_i\right),$$

nebo užitím tabulky z odst. 8

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} U_i \ln \frac{1}{\varepsilon_i + (1 - \varepsilon_i)\,\lambda_i}\,. \tag{10.2}$$

To je konečná rychlost posledního stupně (poslední subrakety) uvažované složené rakety vyjádřená parametry 1. druhu.

Pro jednoduchost vyšetříme tyto okolnosti podrobněji na ekviparametrové raketě (odst. 9), pro kterou

$$\lambda_i = \lambda,\ \varepsilon_i = \varepsilon \text{ pro všechna } i$$

a která je konstruována tak, že také

$$U_i = U \text{ pro všecka } i\,.$$

Jako *parametrickou rychlost posledního stupně* (*poslední subrakety*) zavedeme

$$\Omega = V_n/U \tag{10,3}$$

a z rovnice (2) obdržíme

$$\Omega = n \ln \frac{1}{\varepsilon + (1 - \varepsilon)\,\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{e^{-\Omega/n} - \varepsilon}{1 - \varepsilon} \tag{10,4}$$

a z první rovnice (9,3)

$$\Lambda = \left(\frac{e^{-\Omega/n} - \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)^n. \tag{10,5}$$

Při a priori daném strukturním parametru ε stoupá Λ s rostoucím n monotonně a existuje teoretická horní mez úhrnného užitečného parametru

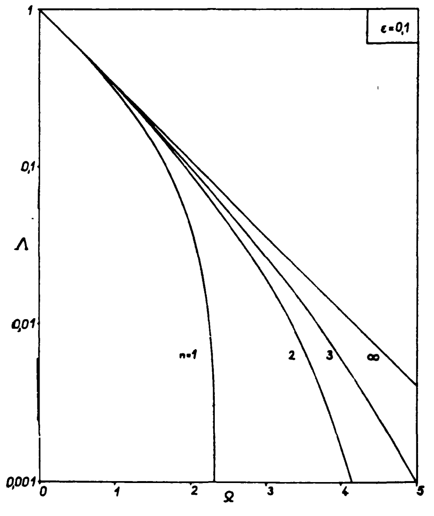
$$\Lambda_l = \lim_{n\to\infty} \Lambda = e^{-\Omega/(1-\varepsilon)} . \tag{10,6}$$

Výsledky pro rovnici (5) jsou znázorněny v grafu obr. 12 (srovnej též druhý graf v odst. 5).

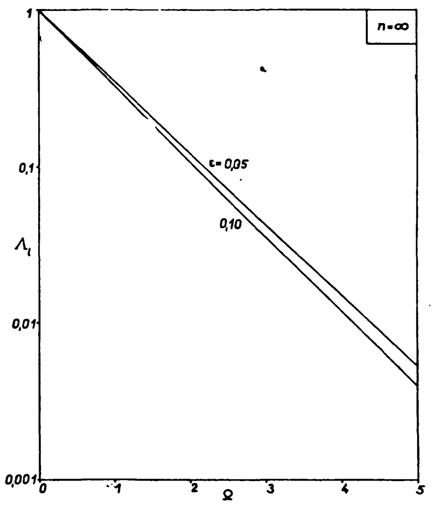
Ke konstrukci tohoto grafu připomeňme, že

$$[\Lambda]_{\Omega=0} = 1 , \quad \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \Omega}\right]_{\Omega=0} = -\frac{1}{1-\varepsilon} ,$$

a to v obou případech nezávisle na počtu stupňů rakety, takže všecky n-izoplety grafu mají v bodě $\Omega = 0$, $\Lambda = 1$ společnou tečnu, jíž je (semilogaritmický papír!) izopleta



Obr. 12.



Obr. 13.

$n = \infty$ (6). Jestliže $\Omega = 0$, je $\Lambda = 1 \Rightarrow Z = M$, a to nezávisle na ε, n. Roste-li Ω při daných ε, n, klesá Λ monotonně až k hodnotě $\Lambda = 0 \Rightarrow Z = 0$, které dosáhne (srovnej (5)) pro $\Omega = n \ln (1/\varepsilon)$. Čáry $\Lambda \equiv \Lambda(\Omega)$ probíhají vesměs pod společnou tečnou (6), k níž se s rostoucím n stále více přibližují. Výsledky rovnice (6) zachycuje graf obr. 13.

K ilustraci uvedeme některé numerické příklady.

1. K splnění programu balistické rakety dalekého doletu (interkontinentální) se požaduje $\Omega = 2$. Jednoduchou raketou s $\varepsilon = 0{,}10$ dosáhneme

$$\Lambda = \frac{e^{-\Omega} - \varepsilon}{1 - \varepsilon} \approx 0{,}04 \Rightarrow Z \approx {}^1/_{25} M ,$$

dvoustupňovou raketou s týmiž $\varepsilon = 0{,}10$ v obou stupních dosáhneme již

$$\Lambda = \left(\frac{e^{-\Omega/2} - \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)^2 \approx 0{,}089 \Rightarrow Z \approx {}^1/_{10}M\,.$$

2. K splnění programu umělé družice Země se požaduje $\Omega = 2{,}6$. Jednoduchou raketou s $\varepsilon = 0{,}10$ není tento program realizovatelný (odst. 5). Dvoustupňovou raketou s týmiž $\varepsilon = 0{,}10$ v obou stupních dosáhneme $\Lambda = 0{,}037$, zhruba tedy totéž jako v prvním případě příkladu 1.

3. K splnění programu kosmické rakety se požaduje $\Omega = 3{,}7$. Dvoustupňovou raketou s $\varepsilon = 0{,}10$ v obou stupních dosáhneme

$$\Lambda = 0{,}004 \Rightarrow Z = {}^1/_{250}M\,,$$

trojstupňovou raketou s týmiž ε ve všech stupních

$$\Lambda = 0{,}010 \Rightarrow Z = {}^1/_{100}M$$

a čtyřstupňovou raketou s týmiž ε ve všech stupních

$$\Lambda = 0{,}012 \Rightarrow Z \approx {}^1/_{80}M\,;$$

růst Z s n je (s ohledem na existenci Λ_l) stále volnější.

V praxi by ostatně ani nebylo vhodné stupňovat n s cílem stálého zvyšování $\Lambda = Z/M$; složená raketa se totiž stává s rostoucím počtem stupňů zařízením stále složitějším a méně spolehlivým.

Pro klasické raketové motory s $U = 3000$ m/s se dnes jeví $n = 2$ jako nejvhodnější pro interkontinentální balistické rakety, $n = 3$ jako nejvhodnější pro rakety-nositele umělých družic Země a $n = 4$ až $n = 5$ pro kosmické lodi. Tyto úvahy však platí za předpokladů uvedených v odst. 5 a již s přihlédnutím ke gravitačnímu poli Země je nutno v každém uvedeném případě zvýšit počet stupňů o jeden. Pro nukleární raketové motory s $U \approx 7500$ až 9000 m/s bude možno snížit počet stupňů u balistických raket a raket-nositelů na jeden, pro kosmické lodi na dva až tři (podle povahy sledovaného programu); k tomu v každém případě přistupuje jeden další stupeň na překonání gravitačního pole Země.

Vedle teoretické horní meze (6) úhrnného užitečného parametru existuje také jeho teoretická dolní mez; je to patrně $\Lambda = 0$. Pro tento případ vyčteme z (5)

$$\text{(10,7)} \qquad e^{-\Omega_l/n} - \varepsilon = 0 \Rightarrow \Omega_l = [\Omega]_{\Lambda=0} = n \ln(1/\varepsilon)\,.^{*})$$

Přihlédneme k dvojí interpretaci této rovnice.

a) Rovnice (7) určuje teoretickou rychlost, které lze dosáhnout s daným počtem stupňů; je tomuto počtu úměrná.

b) Z rovnice (7) plyne $n = \Omega_l/\ln(1/\varepsilon)$, a tedy nejnižší počet stupňů potřebných

*) To jsme již ostatně uvedli při rozboru grafu obr. 12.

k dosažení dané rychlosti při daném strukturním parametru je dán funkcí $E(\Omega_l : \ln(1/\varepsilon))$. Např. pro kosmické rakety, kde požadujeme $\Omega = 3{,}7$, odtud plyne s $\varepsilon = 0{,}10$ hodnota $n = 1{,}6$. Jednoduchou raketou tedy není realizace tohoto programu možná; dvojstupňovou raketou lze již $\Omega = 3{,}7$ dosáhnout.

Analýzu zavedené ekviparametrové rakety jsme dosud prováděli vycházejíce z rovnice (5), tj. od úhrnného užitečného parametru Λ; to je i cesta užívaná praxí. Bylo by ovšem stejně možné vyjít i od úhrnného energetického parametru Ξ:

Podle (8,3) a po dosazení podle (4)

$$\xi = (1 - \varepsilon)(1 - \lambda) = 1 - e^{-\Omega/n} \tag{10,8}$$

a z (9,4) s užitím (5)

$$\Xi = (1 - \varepsilon)\left(1 - \left(\frac{e^{-\Omega/n} - \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)^n\right). \tag{10,9}$$

Při a priori daném strukturním parametru ε a parametrické rychlosti Ω klesá Ξ monotonně s rostoucím n tak, že existuje teoretická horní mez

$$\Xi = \lim_{n \to \infty} \Xi = (1 - \varepsilon)\left(1 - e^{-\Omega/(1-\varepsilon)}\right). \tag{10,10}$$

Je tedy

$$\Xi_l = (1 - \varepsilon)(1 - \Lambda_l), \tag{10,11}$$

a tedy i pro fiktivní raketu $n = \infty$ platí závislost (9,4), jež byla v odst. 9 získána jen pro konečné n.

11. INFINITEZIMÁLNÍ RAKETA

Teoretické koncepci složené rakety s $n = \infty$, která se objevila v odst. 10, fyzikálně odpovídá představa rakety, od níž se v každém okamžiku aktivní periody zároveň s výtokovými plyny odděluje spojitě i strukturní hmota; přitom rychlost vytékajících plynů (vzhledem k raketě) budiž zase stálá a rovna U, rychlost oddělujících se hmot (vzhledem k raketě) považujeme podle běžně přijímané Měščerského hypotézy za nulovou. Touto představou dospíváme k pojmu infinitezimální rakety.

Za předpokladů uvedených v odst. 5 platí pro každý okamžik aktivní periody infinitezimální rakety Ciolkovského rovnice

$$m\dot{v} = -U\mu,$$

kde μ vyjadřuje úhrnný tok vyvolávající reaktivní tah. Nechť i nadále ε značí konstantní strukturní parametr „infinitezimální subrakety". Časová změna hmoty rakety $\dot{m}$ se skládá jednak z proudu μ vyvolávajícího reaktivní tah, jednak z úbytku strukturní hmoty, který je vzhledem k předpokladu o ε dán výrazem $\varepsilon\dot{m}$, takže

$$\dot{m} = \mu + \varepsilon\dot{m}.$$

Ciolkovského rovnice tak nabývá tvaru

$$m\dot{v} = -(1 - \varepsilon)\, U\dot{m}$$

s neurčitým integrálem

$$v + (1 - \varepsilon)\, U \ln m = \text{konst}\,.$$

Pro začátek $(t = 0,\, m = M,\, v = 0)$ a konec $(t = T,\, m = Z,\, v = V)$ aktivní periody odtud plyne

$$(1 - \varepsilon)\, U \ln M = V + (1 - \varepsilon)\, U \ln Z \Rightarrow$$

$$V/U = (1 - \varepsilon) \ln M/Z\,,$$

nebo v označení zavedených parametrů 1. druhu (viz (10,3), (8,4))

(11,1) $$\Omega = (1 - \varepsilon) \ln (1/\Lambda) \Rightarrow \Lambda = \mathrm{e}^{-\Omega/(1-\varepsilon)}\,.$$

To je právě rovnice (10,6), píšeme-li Λ_l místo Λ. Užijeme-li nyní rovnice (9,4), v níž za Λ dosadíme hodnotu (1), obdržíme

(11,2) $$\Xi = (1 - \varepsilon)\left(1 - \mathrm{e}^{-\Omega/(1-\varepsilon)}\right),$$

což je právě vztah (10,10), píšeme-li Ξ_l místo Ξ.

Teoretickým limitám $n = \infty$ z odst. 10 tak vskutku odpovídá fyzikální představa infinitezimální rakety.

12. LETOVÉ CHARAKTERISTIKY A LETOVÉ PARAMETRY 1. DRUHU

Ciolkovského rovnice jednoduché rakety (odst. 5)

$$m\dot{v} = -U\dot{m}$$

má neurčitý integrál rychlosti $(v = v(t))$

$$v + U \ln m = C_1 \quad (C_1 = \text{konst})$$

a neučitý integrál dráhy $(s \equiv s(t))$

$$s + U \int \ln m \,\mathrm{d}t = C_1 t + C_2 \quad (C_2 = \text{konst})\,.$$

Pro raketové motory pracující v lineárním režimu je

$$m(t) = M(1 - \xi\, t/T) \qquad (m(0) = M,\; m(T) = M(1 - E/M) = K)\,,$$

takže

$$\int \ln m \,\mathrm{d}t = (\ln M - 1)\, t - \frac{T}{\xi}\left(1 - \xi \frac{t}{T}\right) \ln\left(1 - \xi \frac{t}{T}\right).$$

Pro větší názornost uvažujeme raketu vystupující (ve svobodném prostředí)

„svisle“ vzhůru. S počátečními podmínkami letu $t = 0$, $v = 0$, $s = 0$ nalezneme z integrálu rychlosti, popř. z integrálu dráhy

$$C_1 = U \ln M\,, \quad \text{popř.} \quad C_2 = 0\,,$$

takže v každém okamžiku aktivní periody platí

$$v = U \ln \frac{M}{m}\,,$$

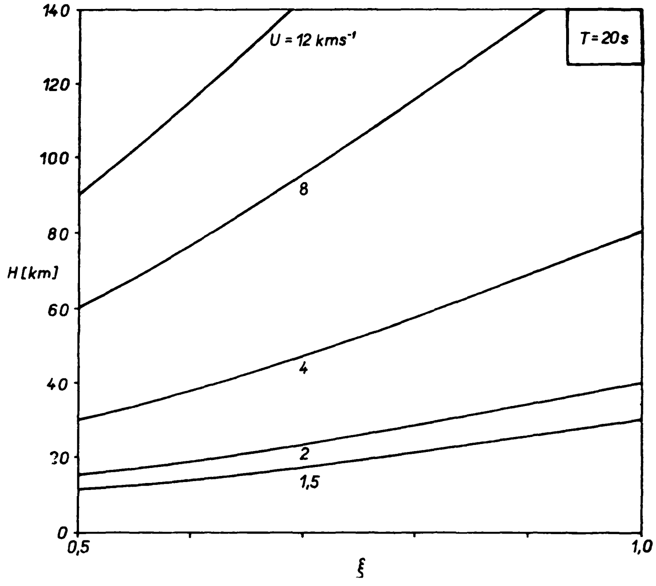
$$s = U\left(t + \frac{T}{\xi}\left(1 - \xi\frac{t}{T}\right)\ln\left(1 - \xi\frac{t}{T}\right)\right)$$

a pro konec aktivní periody je

(12,1) $$V = -U \ln (1 - \xi)$$

při dosažené výšce

(12,2) $$H = UT\left(1 + \frac{1-\xi}{\xi}\ln(1-\xi)\right).$$



Obr. 14.

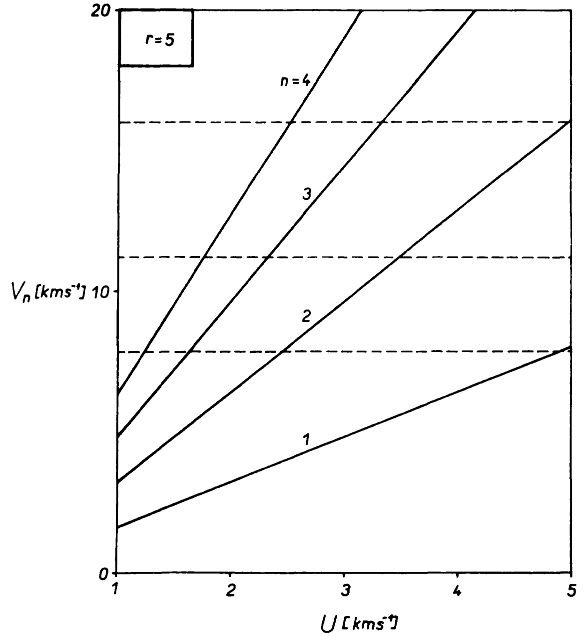
Poněvadž $\xi < 1$ (pro meliorovanou raketu odst. 1 je $\xi = 0{,}7$), je

$$\ln(1 - \xi) = -\xi - \tfrac{1}{2}\xi^2 - \tfrac{1}{3}\xi^2 - \ldots \approx -(1 + \tfrac{1}{2}\xi)\,\xi\,,$$

a tedy

(12,2*) $$H \approx \tfrac{1}{2}UT(1 + \xi)\,\xi\,.$$

Tím je získána orientační aproximace závislosti H na ξ při daném T a různých hodnotách U; srovnej graf obr. 14. Je-li tato jednoduchá raketa posledním stupněm složené rakety, pak místo pravých stran (1), (2) zřejmě nastupují součty výrazů takovéhoto typu. Omezíme-li se pro jednoduchost na ekviparametrovou raketu se



Obr. 15.

stejnou výtokovou rychlostí ve všech stupních a také se stejným trváním aktivní periody všech stupňů, nalezneme pro obě základní *letové charakteristiky* (*rychlostní* a *výškovou*)

(12,3) $$V_n = -\,nU \ln(1-\xi)\,,$$

(12,4) $$H_n = nUT\left(1 + \frac{1-\xi}{\xi}\ln(1-\xi)\right), \text{ čili } H_n = \left(nU - \frac{1-\xi}{\xi}V_n\right)T\,.$$

Podle rovnic (3,1) a (4,1) platí mezi Ciolkovského číslem $C = r$ a mezi energetickým parametrem ξ závislost

$$C = r = 1/(1-\xi)\,, \quad \xi = (C-1)/C\,,$$

takže (3) lze psáti ve tvaru

(12,3*) $$V_n = nU \ln C\,.$$

Někdy se proti číslu C označuje Ciolkovského číslem veličina C_*, splňující

$$C - C_* = 1\,,$$

takže v tomto případě je

$$V_n = nU \ln(1 + C_*) . \tag{12,3**}$$

Poněvadž $C = r = M/(S + Z)$, je $C_* = M/(S + Z) - 1$, $S + Z = K$, a to nejen pro jednoduchou raketu, ale i pro každou subraketu složené rakety. Rovnice (3), (3*), (3**) dovolují sestrojit velmi jednoduchý graf závislosti $V_n \equiv V_n(U)$ pro a priori dané $C = r$ (nebo C_*) a pro různá n. Viz obr. 15.

Zavedeme-li bezrozměrné letové parametry

$$\Omega = V_n/U\,, \quad \Theta = H_n/UT\,, \tag{12,5}$$

získáme z (4)

$$\Omega = C_*(n - \Theta)$$

nebo také

$$\frac{1 - \xi}{\xi}\,\Omega + \Theta = n\,. \tag{12,6}$$

Odtud je ihned patrna možnost sestrojení velmi jednoduchého nomogramu závislosti $\Theta \equiv \Theta(\Omega)$ při předem daných U, T a pro různá ξ, popř. n.

13. HMOTOVÉ PARAMETRY SLOŽENÉ RAKETY

b) *Parametry 2. druhu*

Obdobně k (2,4), (2,4*) můžeme také na každé subraketě definovat bezrozměrné parametry 2. druhu (a s týmž pojmenováním jako v odst. 4):

$$p_i = \frac{M_i}{Z_i}\,, \quad q_i = \frac{N_i}{S_i}\,, \quad r_i = \frac{M_i}{S_i + Z_i} = \frac{M_i}{K_i} \tag{13,1}$$

$$(p_i > 1,\ q_i > 1,\ r_i > 1)$$

vázané vztahem analogickým k (2,6), (2,6*)

$$\frac{p_i - 1}{p_i} \cdot \frac{q_i - 1}{q_i} - \frac{r_i - 1}{r_i} = 0\,, \tag{13,2}$$

popřípadě

$$(p_i - r_i)(q_i - r_i) = r_i(r_i - 1)\,. \tag{13,2*}$$

Formální totožnost těchto rovnic s rovnicemi odst. 2 dovoluje ihned napsat pro každou subraketu rovnice odpovídající rovnicím (4,2):

$$p_i = \frac{q_i - 1}{q_i - r_i}\,r_i\,, \quad q_i = \frac{p_i - 1}{p_i - r_i}\,r_i\,, \quad r_i = \frac{p_i q_i}{p_i + q_i - 1}\,. \tag{13,3}$$

Parametry λ_i, ε_i, ξ_i a p_i, q_i, r_i jsou vázány vztahy analogickými k (2,7); (2,8):

$$
\begin{gathered}
\lambda_i = \frac{1}{p_i}, \quad \varepsilon_i = \frac{1}{q_i}, \quad \xi_i = \frac{r_i - 1}{r_i}, \\
p_i = \frac{1}{\lambda_i}, \quad q_i = \frac{1}{\varepsilon_i}, \quad r_i = \frac{1}{1 - \xi_i}.
\end{gathered} \tag{13,4}
$$

Z $3n$ parametrů 2. druhu p_i, q_i, r_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, mezi nimiž platí n vztahů (2), je jen $2n$ parametrů nezávislých. Vybereme-li třeba zase parametry uvedené v odst. 8:

$$
\frac{E_i}{Z_n}, \frac{S_i}{Z_n}; \quad i = 1, 2, \ldots, n
$$

souvisící s parametry 1. druhu rovnicemi odst. 8

$$
\frac{E_i}{Z_n} = \frac{\xi_i M_i}{Z_n}, \quad \frac{S_i}{Z_n} = \frac{\varepsilon_i N_i}{Z_n},
$$

je jejich souvislost s parametry 2. druhu s užitím vztahů (4) dána rovnicemi

$$
\frac{E_i}{Z_n} = \frac{(r_i - 1)M_i}{r_i Z_n}, \quad \frac{S_i}{Z_n} = \frac{N_i}{q_i Z_n}.
$$

Obdobně jako v odst. 8 i zde připojujeme vztahy obsahující vedle p_i, q_i, r_i jen parametry E_j/Z_n, S_j/Z_n, $j = 1, 2, \ldots, n$:

$$
\begin{gathered}
p_i \left(1 + \sum_{j=i+1}^{u} \left(\frac{E_j}{Z_n} + \frac{S_j}{Z_n}\right)\right) = 1 + \sum_{j=i}^{n} \left(\frac{E_j}{Z_n} + \frac{S_j}{Z_n}\right), \quad q_i \frac{S_i}{Z_n} = \frac{E_i}{Z_n} + \frac{S_i}{Z_n}, \\
(r_i - 1)\left(1 + \sum_{j=i}^{n} \left(\frac{E_j}{Z_n} + \frac{S_j}{Z_n}\right)\right) = r_i \frac{E_j}{Z_n}.
\end{gathered}
$$

Při analýze složené rakety zajímá zase praxi především

(13,5) *úhrnný užitečný parametr* $P = M/Z$ $(M = M_1,\ Z = Z_n)$.

Užitím první rovnice (8,4), první rovnice (8,5) a první rovnice (13,4) získáme

$$
P = 1/\Lambda = 1/\prod_{j=1}^{n} \lambda_j = \prod_{j=1}^{n} p_j. \tag{13,5*}
$$

Analogicky, zatím však jen z formálních důvodů, ještě zavádíme

$$
\begin{gathered}
\textit{úhrnný strukturní parametr} \quad Q = \prod_{j=1}^{n} q_j, \\
\textit{úhrnné Ciolkovského číslo} \quad R = \prod_{j=1}^{n} r_j.
\end{gathered} \tag{13,6}
$$

Přitom platí (srovnej (4))

$$Q = 1/\prod_{j=1}^{n} \varepsilon_j, \quad R = 1/\prod_{j=1}^{n} (1 - \xi_i).$$

Pro rozdělení hmot ve složené raketě jako celku nalezneme užitím rovnic (5), (5*), (8,6) a (4):

$$Z = M/\prod_{j=1}^{n} p_j, \tag{13,7}$$

$$E = M \sum_{i=1}^{n} \xi_i \prod_{j=1}^{i-1} \lambda_j = M \sum_{i=1}^{n} (r - 1)/r_i \prod_{j=1}^{i-1} p_j$$

a k tomu pro úhrnnou strukturní hmotu

$$S = M - (E + Z) = M(1 - 1/\prod_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=j}^{n} (r_i - 1)/r_i \prod_{j=1}^{i-1} p_j). \tag{13,7*}$$

14. EKVIPARAMETROVÁ RAKETA 2. DRUHU

Jestliže dva ze tří parametrů (13,1) se v subraketách složené rakety nemění (nezávisejí na i), pak podle (13,2) je takový i zbývající parametr. Např. pro

$$p_i = p, \quad q_i = q \text{ pro všecka } i \tag{14,1}$$

je také

$$r_i = \frac{pq}{p + q - 1} \text{ pro všecka } i. \tag{14,2}$$

Získáváme tak další standardní raketu; nazveme ji *ekviparametrovou raketou 2. druhu.**) Podle (13,5), (13,5*), (13,6) platí pro tuto raketu

$$P = M/Z = p^n, \quad Q = q^n, \quad R = r^n \tag{14,3}$$

a vzhledem k (2) tedy

$$(p + q - 1)^n = PQ/R.$$

Použijeme vztahů (13,3) a dostáváme

$$P = R\left(\frac{q - 1}{q - R^{1/n}}\right)^n, \quad Q = R\left(\frac{p - 1}{p - R^{1/n}}\right)^n. \tag{14,4}$$

Pro rozdělení hmot v zavedené ekviparametrové raketě jako celku dostáváme z (13,7), (13,7*), (4,2), (4,3)

$$Z = \frac{M}{p^n}, \quad E = M\frac{r - 1}{r}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p^{i-1}} = M\frac{r - 1}{r}\,\frac{1 - 1/p^n}{1 - 1/p} = M\frac{q - 1}{q}\left(1 - \frac{1}{p^n}\right),$$

*) Ekviparametrová raketa 2. druhu je patrně i ekviparametrovou raketou 1. druhu a obráceně. Rozlišení obou pojetí se týká různých způsobů zpracování téhož případu.

$$S = M - M\frac{q-1}{q}(1 - 1/p^n) - \frac{M}{p^n} = M\frac{1}{q}(1 - 1/p^n)$$

nebo

(14,5) $$Z = \frac{M}{P}, \quad E = \frac{q-1}{q}\left(1 - \frac{1}{P}\right)M, \quad S = \frac{1}{q}\left(1 - \frac{1}{P}\right)M$$

a dále

(14,5*) $$E = \frac{q-1}{q}(P-1)Z, \quad S = \frac{1}{q}(P-1)Z.$$

15. ANALÝZA SLOŽENÉ RAKETY PARAMETRY 2. DRUHU

Z rovnice (10,2), v níž jsme vpravo zavedli parametry 2. druhu prostřednictvím rovnic (13,4), obdržíme pro charakteristickou rychlost posledního stupně (poslední subrakety) složené rakety

(15,1) $$V_n = \sum_{i=1}^{n} U_i \ln \frac{p_i q_i}{p_i + q_i - 1} = \sum_{i=1}^{n} U_i \ln r_i .$$

Při dalším vyšetřování se zase omezíme na ekviparametrovou raketu (odst. 14) s parametry $p_i = p$, $q_i = q$, a tedy také $r_i = r$ pro všecka i, která je konstruována tak, že i $U_i = U$ pro všecka i. Po zavedení *parametrické rychlosti posledního stupně* (poslední subrakety)

(15,2) $$W = V_n/U^{*})$$

obdržíme z rovnice (1) s užitím druhé z rovnic (13,6), (15,2)

(15,3) $$W = n \ln \frac{pq}{p + q - 1} = n \ln r = \ln R \Rightarrow$$

(15,4) $$p = \frac{q-1}{qe^{-W/n} - 1}, \quad r = e^{W/n}, \quad R = e^{W}$$

a tedy z první rovnice (14,3)

(15,5) $$P = \left(\frac{q-1}{qe^{-W/n} - 1}\right)^n .$$

To jsou obdoby rovnic (10,3), (10,4), (10,5); závěry z nich vyplývající vedou ovšem k týmž výsledkům, které jsme nalezli již v odst. 10. Máme tedy nejprve obdobu

*) Vedle Ω zavedeného vztahem (10,3) zavádíme z formálních důvodů druhé označení W; srovnej připomínku při zavedení označení w rovnicí (6,1).

k rovnici (10,6)

$$(15,6)\qquad \begin{gathered} P_l = \lim_{n\to\infty} P = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{q-1}{q\mathrm{e}^{-W/n}-1}\right)^n = \mathrm{e}^{qW/(q-1)} \Rightarrow \\ W = \frac{q-1}{q}\ln P_l \end{gathered}$$

a pro $P = M/Z$ rostoucí nade všechny meze poskytuje (5)

$$(15,7)\qquad q\mathrm{e}^{-W_l/n} - 1 = 0 \Rightarrow W_l = n \ln q\,,$$

což je analogií vztahu (10,7).

Od vyhledávání dalších obdob upustíme a uvedeme ihned některá užití dosavadních výsledků:

a) Zavedeme-li

$$z(n) = \left(\frac{pq}{p+q-1}\right)^n,\text{*)}$$

nabude (3) tvaru

$$V_n = U \ln z(n)\,.$$

Utvořme

$$(15,8)\qquad \frac{V_{n+v} - V_n}{V_n} = \frac{\ln z(n+v)}{\ln z(n)} - 1\,;$$

to je výraz pro relativní zvětšení rychlosti naší rakety, jestliže jsme zvětšili počet stupňů z n na $n + v$ ($v \geqq 1$). Na příklad pro $q = 6$, $P = 900$ ($M = 900Z$, $p = \sqrt[n]{900}$) je $z(n) = 900(6/(5 + \sqrt[n]{900}))^n$ a z předchozí rovnice vypočteme, že použitím dvojstupňové, popř. trojstupňové rakety tohoto typu se charakteristická rychlost zvětší o 84%, popř. o 131% ve srovnávání s charakteristickou rychlostí jednoduché rakety stejného typu.

Přejdeme-li užitím druhé rovnice (6) k infinitezimální raketě (odst. 11), můžeme utvořit výraz $(V_l - V_1)/V_1$ obdobný výrazu (8). Nalezneme tak

$$(15,8^*)\qquad \frac{V_l - V_1}{V_1} = \frac{q-1}{q}\,\frac{\ln P_l}{\ln z(1)} - 1\,;$$

to je výraz pro relativní zvětšení charakteristické rychlosti naší rakety při neomezeném zvětšování počtu stupňů ve srovnání s charakteristickou rychlostí jednoduché rakety. Na příklad pro výše zvolené hodnoty $q = 6$, $P = P_l = 900$ je $z(1) \approx 6$ a z předchozí rovnice vypočteme, že při neomezeném zvětšování počtu stupňů se charakteristická rychlost zvětší jen o 212% proti charakteristické rychlosti jednoduché rakety [9].

*) Vzhledem k poslednímu ze vztahů (4,2) je ovšem $z(n) = r^n$.

b) První rovnice (4) dává možnost grafického znázornění závislosti p na n při předem daném q a pro různá W; je totiž

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q-1}\left(q e^{-W/n} - 1\right);$$

pro fiktivní hodnotu $n = 0$ je $1/p = -1/(q-1)$, pro $n = \infty$ je $1/p = 1$, v obou případech nezávisle na W.

Rovnice (5) dává možnost grafického znázornění závislosti P na n, opět při daném q a pro různá W; je totiž

$$\ln P = n \ln (q - 1) - n \ln \left(q e^{-W/n} - 1\right)$$

a pro $n = \infty$ je $\ln P = qW/(q-1)$.

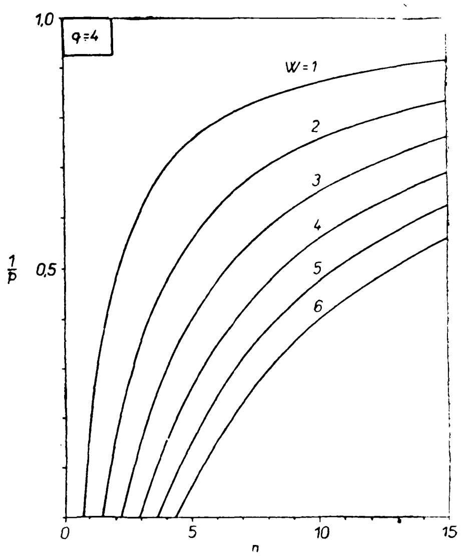
Obě závislosti $1/p(n, W)$ i $\ln P(n, W)$ zachycujeme grafy v obr. 16 a 17.

c) Číselné příklady uvedené sub a) se vztahovaly ke starší konstrukci složené rakety Vanguard. Pro ilustraci uvedeme ještě některé další číselné příklady, jejichž data jsou rovněž vzata ze starších projektů raket.

1. Konstrukce Aerobee ($q = 8{,}4$, $U = 2400$ m/s). Aby užitečná hmota nesená touto jednostupňovou raketou dosáhla charakteristické rychlosti $V = 5000$ m/s, bylo by třeba, aby podle rovnice (15,3) (v níž položíme $n = 1$) a podle první rovnice (4,2) bylo

$$C = r = e^{V/v} \approx 8{,}0\,,$$

$$p = \frac{q-1}{q-r}\, r \approx 150\,,$$



Obr. 16.

tj. na každou jednotku užitečné hmoty by připadlo 150 jednotek počáteční hmoty rakety. Nahradíme-li však tuto jednostupňovou raketu ekviparametrovou dvojstupňovou raketou (s týmiž hodnotami $q = 8{,}4$, $U = 2400$ m/s v obou stupních), pak bude k dosažení téže charakteristické rychlosti $V_2 = 5000$ m/s třeba, aby

$$C = r = e^{V/2u} \approx 2{,}8\,, \quad p = \frac{q-1}{q-r}\, r \approx 3{,}7\,, \quad P = p^2 \approx 14\,,$$

a na jednotku užitečné hmoty připadne již jen asi $^1/_{12}$ hodnoty jednotky počáteční hmoty při použití jednoduché rakety.

2. Konstrukce Viking ($q = 4{,}7$, $U = 2400$ m/s). Aby užitečná hmota $Z = 300$ kg

nesená touto čtyřstupňovou ekviparametrovou raketou dosáhla charakteristické rychlosti $V_4 = 9000$ m/s (pro vyvedení umělé družice Země na její orbit za reálných podmínek), bylo by třeba, aby úhrnné Ciolkovského číslo

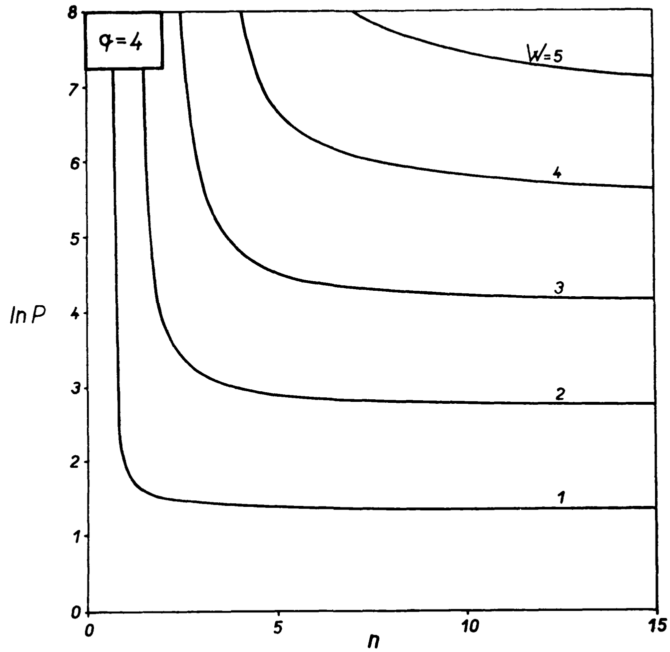
$$R = e^{V_4/U} = 42{,}5\,, \quad P = R\left(\frac{q-1}{q-R^{1/4}}\right)^4 \approx 370\,,$$

a tedy

$$M = 370\,Z \approx 110\,t\,,$$

což je hodnota dnešní praxí realizovatelná. Pro úhrn energetické váhy vypočteme podle první rovnice (14,5*)

$$E = \sum_{i=1}^{4} E_i = \frac{q-1}{q}(P-1)\,Z \approx 87\ t$$



Obr. 17.

a pro úhrn strukturní váhy (buď zpaměti 110 − 87 − 0,3 ≈ 23 t, nebo) podle druhé rovnice (14,5*)

$$S = \sum_{i=1}^{4} S_i = \frac{1}{q}(P-1)\,Z \approx 23\,\mathrm{t}\,;$$

úhrnná pracovní schopnost rakety jako celku se prakticky spotřebuje na strukturní a pohonné hmoty. Poslední stupeň (poslední subraketa), který je nosnou raketou umělé družice Země, má toto rozdělení hmot:

$$E_4 = \frac{q-1}{q}(P^{1/4} - 1)\,Z \approx 800\,\text{kg}\,, \quad S_4 = \frac{1}{q}(P^{1/4} - 1)\,Z \approx 215\,\text{kg}$$

a k tomu váha umělé družice Země $Z_4 = Z = 300$ kg; je tedy

$$E_4 : S_4 : Z_4 = 8 : 2 : 3$$

oproti

$$E : S : Z = 87 : 23 : 0{,}3 \approx 300 : 80 : 1$$

(srovnej s $E : S : Z = 7 : 2 : 1$ orientační jednoduché rakety odst. 1!).

Dnešní reaktivní technika má ovšem k dispozici podstatně příznivější parametry.

Poznámka. Při soustavném zpracování by bylo logické po tomto odstavci (odpovídajícím odst. 10) zařadit odstavec věnovaný vyšetření infinitezimální rakety v parametrech druhého druhu (a odpovídající odstavci 11). Nečiníme tak, neboť výsledek, který bychom tak získali a který lze ihned psát na základě vztahu (11,1) zavedením

$$\Omega = W\,, \quad \Lambda = 1/P\,, \quad \varepsilon = 1/q\,,$$

by nepřinesl nic nového.

16. IDEMPARAMETROVÉ RAKETY

Na n-stupňové raketě je *absolutní rozdělení hmot* úplně určeno $2n + 1$ nezávislými hmotovými charakteristikami, nejjednodušeji (viz odst. 7) hmotami

$$E_i,\ S_i\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n \ \text{a} \ Z_n = Z\,.$$

Když jsme přešli od charakteristik k parametrům, zmenšil se počet nezávislých určujících veličin o jednu a *relativní rozdělení hmot* je úplně určeno $2n$ nezávislými hmotovými parametry; nejjednodušeji (viz odst. 8) to jsou hmotové poměry

$$E_i/Z,\ S_i/Z\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

V praxi se setkáváme s případem, kdy jsou a priori dány obě úplné n-tice parametrů (1. nebo 2. druhu; jak ukazuje zavedení těchto parametrů v odst. 3, 4, 8 a 13 a rovnice (13,4), jsou obě soustavy ekvivalentní a o výběru jedné nebo druhé soustavy rozhoduje praktická povaha úlohy, kterou chceme řešit) a buďto úhrnná hmota M nebo (a to častěji) užitečná hmota Z. Tím je pak úplně určeno absolutní rozdělení hmot v celé raketě. Provedeme k tomu podrobnější úvahu:

a) Jsou-li předem dány dvě úplné n-tice parametrů 1. druhu, např. λ_i, ε_i; $i = 1, 2, \ldots, n$, je rovnicemi (8,3) určena i třetí n-tice ξ_i; $i = 1, 2, \ldots, n$ a rovnicemi (8,5) jsou určeny i oba úhrnné parametry Λ, Ξ. Je-li dále a priori dána úhrnná hmota M, pak rovnice (8,6), (8,6*) ihned poskytují užitečnou hmotu

$$Z = \Lambda M$$

a úhrnnou energetickou, popř. strukturní hmotu celé rakety

$$E = \Xi M\,, \quad S = (1 - \Lambda - \Xi)\, M\,.$$

Z první rovnice (8,2) s přihlédnutím ke vzájemnému vztahu subraket (7,4) postupně plyne

$$\lambda_1 = Z_1/M_1 \Rightarrow Z_1 = \lambda_1 M_1 = \lambda_1 M\,,$$

$$\lambda_2 = Z_2/M_2 = Z_2/Z_1 \Rightarrow Z_2 = \lambda_2 Z_1 = \lambda_1\lambda_2 M\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

obecně

$$Z_i = \lambda_{1,i} M\,, \quad i \geqq 1$$

a tedy

$$M_i = Z_{i-1} = \lambda_{1,i-1} M\,, \quad i \geqq 1\,,$$

kde pro stručnost užíváme symbolu

$$\lambda_{j,k} = \lambda_j \lambda_{j+1} \dots \lambda_k\,, \quad k > j \geqq 1,\ \lambda_{jj} = \lambda_j,\ \lambda_{1,0} = 1\,.$$

Z třetí rovnice (8,2)

$$\xi_i = E_i/M_i \Rightarrow E_i = \xi_i M_i$$

plyne ihned vzhledem k předchozímu výsledku

$$E_i = \lambda_{1,i-1} \xi_i M\,.$$

Poněvadž $S_i = M_i - E_i - Z_i$, máme vzhledem k předcházejícím výsledkům

$$S_i = \lambda_{1,i-1} M - \lambda_{1,i-1} \xi_i M - \lambda_{1,i} M = \lambda_{1,i-1}(1 - \lambda_i - \xi_i)\, M\,.$$

K tomu ještě

$$N_i = E_i + S_i = \lambda_{1,i-1}(1 - \lambda_i)\, M\,, \quad K_i = S_i + Z_i = \lambda_{1,i-1}(1 - \xi_i)\, M\,.$$

Tyto rovnice poskytují absolutní rozdělení hmot v celé raketě při daném M. Položíme-li všude $M = Z/\Lambda$, získáme rozdělení při daném Z; omezme se jen na oba základní údaje:

$$E_i = \lambda_{i,n}^{-1} \xi_i Z\,, \quad S_i = \lambda_{i,n}^{-1}(1 - \lambda_i)\, \varepsilon_i Z\,. \tag{16,1}$$

b) Jsou-li a priori dány dvě úplné n-tice 2. druhu, např. p_i, q_i; $i = 1, 2, \dots, n$, je rovnicemi (13,2), respektive (13,2*) určena i třetí n-tice r_i; $i = 1, 2, \dots, n$ a rovnicemi (13,5*), (13,6) jsou určeny i úhrnné parametry P, Q, R. Je-li dále předem předepsána užitečná hmota Z, pak

$$M = PZ$$

a úhrnná energetická, popř. strukturní hmota celé rakety, je vyjádřena rovnicemi

(13,7), (13,7*), tj.

$$E = PZ \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i - 1}{r_i - p_{1,i-1}}, \quad S = PZ\left(1 - \frac{1}{P} - \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i - 1}{r_i p_{1,i-1}}\right),$$

kde pro stručnost zavádíme

$$p_{j,k} = p_j p_{j+1} \dots p_k, \quad k > j \geqq 1, \quad p_{jj} = p_j, \; p_{1,0} = 1 .$$

Absolutní rozdělení hmot E_i, S_i v celé raketě je dáno rovnicemi (1), položíme-li v nich

$$\lambda_{i,n}^{-1} = p_{i,n}, \quad \xi_i = (r_i - 1)/r_i, \quad 1 - \lambda_i = 1 - 1/p_i,$$
$$\varepsilon_i = 1/q_i .$$

Jako výsledek získáme

$$E_i = p_{i,n}\left(1 - \frac{1}{r_i}\right) Z, \quad S_i = p_{i,n}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\frac{1}{q_i} Z \tag{16,2}$$

$$\left(\frac{p_i - 1}{p_i} \cdot \frac{q_i - 1}{q_i} - \frac{r_i - 1}{r_i} = 0\right).$$

Podrobíme-li $2n$ dosud nezávislých parametrů dalším požadavkům, pravíme, že jsme provedli jeden druh *standardizace* složené rakety. Speciálně požadavkem, aby parametry jedné úplné n-tice měly stejnou hodnotu, definujeme standardní *idemparametrovou raketu.*

Na idemparametrové raketě je tedy absolutní rozdělení hmot úplně určeno $n + 2$ nezávislými údaji, totiž n-ticí nikoliv totožných parametrů, společnou hodnotou n-tice totožných parametrů a např. užitečnou hmotou Z. Přehlédneme některé případy, které tu nastávají:

α) Jestliže $\lambda_i = \lambda$ pro všecka i, pak i $p_i = p$ pro všecka i ($\lambda p = 1$). Takovou složenou raketu nazveme λ-, popř. *p-idemparametrovou raketou.* Vztahy platné při této podmínce odvodíme snadno ze vztahů předchozího textu a uvádíme je tu jenom v přehledu (tab. V).

β) Jestliže $\varepsilon_i =$ idem,*) pak i $q_i =$ idem (a je $\varepsilon q = 1$). Takovou složenou raketu nazveme ε-, popř. *q-idemparametrovou.* Jestliže $\xi_i =$ idem, pak i $r_i =$ idem (a je $(1 - \xi) r = 1$), příslušnou raketu nazveme ξ-, popř. *r-idemparametrovou* raketou.

Nejdůležitější vztahy pro tyto druhy raket sestavujeme v tabulku (tab. VI).

γ) Standardizované rakety uvedené sub a), b) lze charakterizovat i jinak. Např. pro p-idemparametrové rakety je $M_i/Z_i =$ idem $(= p)$, a poněvadž $P =$ idem $(= p^n)$, jsou to také rakety s konstantním poměrem M/Z; poněvadž $M_i/Z_i = N_i/Z_i + 1$, jsou to také rakety s $N_i/Z_i =$ idem $(= p - 1)$. Pro q-idemparametrové rakety je $N_i/S_i =$ $=$ idem $(= q)$ a poněvadž $N_i/S_i = E_i/S_i + 1$, jsou to také rakety s $E_i/S_i =$ idem

*) Latinsky: idem = týž. Označujeme tak nezávislost parametru na stupni i.

$= (q - 1)$. Pro r-idemparametrové rakety je $M_i/(S_i + Z_i) = M_i/K_i = \text{idem}\ (= r)$ a poněvadž $M_i/K_i = E_i/K_i + 1$, jsou to také rakety s $E_i/K_i = \text{idem}\ (= r - 1)$.

Na idemparametrových raketách lze určit i další vlastnosti tohoto druhu. Počítejme např. pro raketu q-idem výraz

$$\sum_{j=1}^{n} E_j = \frac{q-1}{q}(p_{i,k} - 1)\,Z\,;$$

obdobně

$$\sum_{j=1}^{n} S_j = \frac{1}{q}(p_{i,n} - 1)\,Z\,.$$

Tabulka V

$\lambda = \text{idem}$	$p = \text{idem}$
$\Lambda = \lambda^n \Rightarrow M = \dfrac{Z}{\lambda^n}$	$P = p^n \Rightarrow M = p^n Z$
$(1-\lambda)(1-\varepsilon_i) - \xi_i = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_i = \dfrac{1-\lambda-\xi_i}{1-\lambda} \\ \xi_i = (1-\lambda)(1-\varepsilon_i) \end{cases}$	$\dfrac{p-1}{p} \cdot \dfrac{q-1}{q_i} - \dfrac{r_i - 1}{r_i} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} q_i = \dfrac{p-1}{p-r_i} r_i \\ r_i = \dfrac{p q_i}{p-1+q_i} \end{cases}$
$\Xi = \sum_{i=1}^{n} \lambda^{i-1} \xi_i$	$Q = (p-1)^n \prod_{j=1}^{n} \dfrac{r_j}{p - r_j}$ $R = p^n \prod_{j=1}^{n} \dfrac{q_j}{p-1+q_j}$
$E = \dfrac{Z}{\lambda^n} \sum_{j=1}^{n} \lambda^{j-1} \xi_j$ $S = \dfrac{1 - \lambda^n - \sum_{j=1}^{n} \lambda^{j-1} \xi_j}{\lambda^n} Z$	$E = p^n Z \sum_{j=1}^{n} \dfrac{r_j - 1}{p^{j-1} r_j}$ $S = p^n \left(1 - \dfrac{1}{p^n} - \sum_{j=1}^{n} \dfrac{r_j - 1}{p^{j-1} r_j}\right) Z$
$Z_i = \dfrac{Z}{\lambda^{n-i}}, \quad M_i = \dfrac{Z}{\lambda^{n-i+1}}$ $E_i = \dfrac{\xi_i}{\lambda^{n-i+1}} Z, \quad S_i = \dfrac{(1-\lambda-\xi_i) Z}{\lambda^{n-i+1}}$ $N_i = \dfrac{1-\lambda}{\lambda^{n-i+1}} Z, \quad K_i = \dfrac{1-\xi_i}{\lambda^{n-i+1}} Z$	$Z_i = p^{n-1} Z, \quad M_i = p^{n-i+1} Z$ $E_i = p^{n-i+1} \dfrac{r_i - 1}{r_i} Z, \quad S_i = p^{n-i} \dfrac{p - r_i}{r_i} Z$ $N_i = p^{n-1}(p-1) Z, \quad K_i = p^{n-i+1} \dfrac{1}{r_i} Z$

Pro $i = 1$ odtud

$$E = \frac{q-1}{q}(P-1)Z \Rightarrow \frac{E}{(P-1)Z} = \text{idem}\left(= 1 - \frac{1}{q}\right),$$

$$S = \frac{1}{q}(P-1)Z \Rightarrow \frac{S}{(P-1)Z} = \text{idem}\left(= \frac{1}{q}\right).$$

A podobně.

Požadujeme-li konečně, aby parametry dvou úplných n-tic měly touž hodnotu, mají i parametry třetí n-tice společnou hodnotu; dospíváme tak k myslitelně nejjednodušší standardní raketě, totiž k raketě ekviparametrové (odst. 9 a 14). Na ekviparametrové raketě je absolutní rozdělení hmot úplně určeno již jen třemi nezávislými údaji (jako na raketě jednoduché), totiž dvěma společnými hodnotami dvou n-tic parametrů a

Tabulka VI

$q = \text{idem}$	$r = \text{idem}$
$Q = q^n$	$R = r^n$
$p_i = \dfrac{q-1}{q-r_i} r_i, \quad r_i = \dfrac{qp_i}{q-1+p_i}$	$p_i = \dfrac{q_i-1}{q_i-r} r, \quad q_i = \dfrac{p_i-1}{p_i-r} r,$
$P = (q-1)^n \prod\limits_{j=1}^{n} \dfrac{r_j}{q-r_j}, \quad R = q^n \prod\limits_{j=1}^{n} \dfrac{p_j}{q-1+p_j}$	$P = r^n \prod\limits_{j=1}^{n} \dfrac{q_j-1}{q_j-r}, \quad Q = r^n \prod\limits_{j=1}^{n} \dfrac{p_j-1}{p_j-r}$
$M = (q-1)^n Z \prod\limits_{j=1}^{n} \dfrac{r_j}{q-r_j}$	$M = r^n Z \prod\limits_{j=1}^{n} \dfrac{q_j-1}{q_j-r}$
$Z_i = \dfrac{(q-1)^n}{p_{1,i}} Z \prod\limits_{j=1}^{n} \dfrac{r_j}{q-r_j}$	$Z_i = \dfrac{r^n}{p_{1,i}} Z \prod\limits_{j=1}^{n} \dfrac{q_j-1}{q_j-r}$
$M_i = \dfrac{(q-1)^n}{p_{1,i-1}} Z \prod\limits_{j=1}^{n} \dfrac{r_j}{q-r_j}$	$M_i = \dfrac{r^n}{p_{1,i-1}} Z \prod\limits_{j=1}^{n} \dfrac{q_j-1}{q_j-r}$
$E_i = \dfrac{q-1}{q}(p_{i,n} - p_{i+1,n}) Z$ $(p_{n+1,n} = 1)$	$E_i = \dfrac{r-1}{r} p_{1,n} Z$
$S_i = \dfrac{1}{q}(p_{i,n} - p_{i+1,n}) Z$ $(p_{n+1,n} = 1)$	$S_i = \dfrac{1}{r}(p_i - r) p_{i+1,n} Z$

např. zase užitečnou hmotu Z ($\neq 0$). Pro úplnost tu uvedeme nejjednodušší vztahy, které byly pro tuto raketu odvozeny již dříve na různých místech textu:

$$p = \text{idem}\,, \quad q = \text{idem}\,, \quad r = \frac{pq}{p + q - 1} = \text{idem}\,,$$

$$P = p^n\,, \quad Q = q^n\,, \quad R = r^n = \frac{PQ}{(p + q - 1)^n}\,,$$

$$M = p^n Z\,, \quad M_i = p^{n-i+1} Z\,, \quad M_n = pZ\,,$$

$$E = (p^n - 1)\frac{q - 1}{q} Z\,, \quad S = (p^n - 1)\frac{1}{q} Z\,,$$

$$E_i = p^{n-i+1}\frac{r - 1}{r} Z\,, \quad S_i = p^{n-i}\frac{p - r}{r} Z\,,$$

$$E_1 = p^n \frac{(r - 1)}{r} Z\,, \quad S_1 = p^{n-1}\frac{p - r}{r} Z\,,$$

$$E_n = p\frac{r - 1}{r} Z\,, \quad S_n = \frac{p - r}{r} Z\,,$$

$$Z_i = p^{n-i} Z\,.$$

17. GEOMETRICKÁ RAKETA

je standardní složená raketa definovaná rovnicemi

(17,1) $$E_{i+1} = \mu E_i\,, \quad S_{i+1} = \mu S_i\,; \quad \mu < 1\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n - 1\,.$$

Poněvadž $N_i = E_i + S_i$, je také

(17,2) $$N_{i+1} = \mu N_i\,.$$

Odtud plynou tyto další vztahy:

$$E_i = \mu^{i-1} E_1\,, \quad S_i = \mu^{i-1} S_1\,, \quad N_i = \mu^{i-1} N_1$$

(17,3) a pro $i = n$

$$E_n = \mu^{n-1} E_1\,, \quad S_n = \mu^{n-1} S_1\,, \quad N_n = \mu^{n-1} N_1$$

a dále

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i = \nu(n)\, E_1\,, \quad S = \sum_{i=1}^{n} S_i = \nu(n)\, S_1\,, \quad N = \sum_{i=1}^{n} N_i = \nu(n)\, N_1\,,$$

(17,4) kde $$\nu(n) = (1 - \mu^n)/(1 - \mu)\,.$$

Podle odst. 7 platí o hmotách M_j, M_{j+1} dvou následných subraket jakékoliv složené rakety

$$M_j = N_j + Z_j\,, \quad M_{j+1} = Z_j\,,$$

a tedy

$$M_j - M_{j+1} = N_j\,.$$

Sečtením těchto rovnic od $j = 1$ do $j = i - 1$ nalezneme vzhledem k předchozím výsledkům pro geometrickou raketu

$$M_1 - M_i = \sum_{j=1}^{i-1} N_j \Rightarrow M = Z_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} N_j \Rightarrow M = Z_{i-1} + \nu(n-1)\,N_1$$

a pro $i = n + 1$

$$M = Z + \nu(n)\,N_1 = Z + N\,.$$

Absolutní rozdělení hmot v geometrické raketě je tedy úplně určeno rozdělením hmot v jejím prvním stupni, kvocientem μ a buď hmotou M, nebo hmotou Z; tyto veličiny na geometrické raketě zřejmě určují počet geometrizačních kroků aplikovaných postupně ve smyslu rovnic (1) na následné stupně. Je tedy geometrická raketa úplně určena čtyřmi nezávislými údaji a z tohoto hlediska je obecnější než raketa ekviparametrová.

Jestliže je a priori dána hmota M, pak

$$E_2 = \mu E_1,\ S_2 = \mu S_1;\ \ldots$$

a

$$Z = M - (E + S) = M - N = M - \nu(n)\,(E_1 + S_1) = M - \nu(n)\,N_1\,.$$

Je-li a priori dána hmota Z, pak

$$M = Z + N = Z + \nu(n)\,N_1\,.$$

Jsou-li dány i M i Z, pak

$$\nu(n) = (M - Z)/N_1 \Rightarrow (1 - \mu^n)/(1 - \mu) = \alpha\,,$$

kde $\alpha = (M - Z)/N_1$ a pro nejnižší počet stupňů rakety máme

$$n = E\left[\frac{\ln\,(1 - \alpha(1 - \mu))}{\ln \mu}\right].$$

Geometrická raketa je sice obecnější než raketa ekviparametrová, je však zvláštním případem rakety idemparametrové. Poněvadž podle první řady rovnic (3) je

$$q_i = N_i/S_i = N_1/S_1 = 1 + E_1/S_1\,,$$

kde E_1, S_1 jsou a priori dané veličiny, je geometrická raketa q-idemparametrovou raketou. Pro parametr p_i plyne z dřívějších rovnic

$$p_i = \frac{M_i}{Z_i} = \frac{M_i}{M_{i+1}} = \frac{M - \nu(i-1)\,N_1}{M - \nu(i)\,N_1} = \frac{Z + (\nu(n) - \nu(i-1))\,N_1}{Z + (\nu(n) - \nu(i))\,N_1}\,,$$

čili

$$p_i = \frac{1 + (\nu(n) - \nu(i-1))\,N_1/Z}{1 + (\nu(n) - \nu(i))\,N_1/Z}\,;$$

k tomu ještě

$$r_i = \frac{q p_i}{q - 1 + p_i}\,, \quad \text{kde} \quad q = N_1/S_1\,, \quad q - 1 = E_1/S_1\,.$$

18. LETOVÉ CHARAKTERISTIKY A LETOVÉ PARAMETRY 2. DRUHU

Vyjděme z rovnic odst. 12 týkajících se jednoduché rakety

$$v + U \ln m = C_1\,, \quad s + U \int \ln m \,\mathrm{d}t = C_1 t + C_2$$

a užijme je na raketový motor, který pracuje v jiném typickém režimu, totiž v režimu exponenciálním, v němž platí

$$m(t) = M \mathrm{e}^{-\frac{\ln r}{T} t} \quad (m(0) = M,\ m(T) = M/r = K)\,.$$

Pro tento režim je

$$\int_0^t \ln m \,\mathrm{d}t = t \ln M - \frac{\ln r}{2T} t^2\,,$$

takže za předpokladů odst. 5 a 12 máme nejprve $C_1 = U \ln M$, $C_2 = 0$ a v každém okamžiku aktivní periody platí

$$v = U \ln \frac{M}{m} = U \frac{\ln r}{T}\,, \quad s = \frac{1}{2} U \frac{\ln r}{T} t^2\,.$$

Jde tedy v této periodě o rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením $(U \ln r)/T$. Na konci aktivní periody je

(18,1) $$V = U \ln r\,.$$

Tato rovnice, stejně jako už rovnice (12,1), potvrzuje, že konečná rychlost nezávisí na tvaru časového režimu raketového motoru, ale jen na poměru počáteční a konečné hmoty rakety (při U = konst). Přitom bylo dosaženo výšky

(18,2) $$H = \tfrac{1}{2} U T \ln r\,;$$

hodnota této veličiny závisí ovšem na režimové funkci.

Pro lineární zákon (odst. 12) jsme nalezli

$$H = UT\left(1 + \frac{1-\xi}{\xi}\ln(1-\xi)\right) = UT\left(1 - \frac{1}{r-1}\ln r\right).$$

Dvě jinak stejné jednoduché rakety, z nichž první pracuje v lineárním režimu, druhá v režimu exponenciálním, tedy dosáhnou výšek H_1, resp. H_2, o nichž platí

$$\frac{H_1}{H_2} = 2\left(\frac{1}{\ln r} - \frac{1}{r-1}\right).$$

Pro orientační raketu odst. 1 je $r = 10/3 \approx 3{,}3$, a tedy $H_1 \approx 0{,}8H_2$.

Je-li naše jednoduchá raketa posledním stupněm složené rakety, pak – za předpokladu stejné výtokové rychlosti a stejného trvání aktivní periody ve všech jejích stupních – nalezneme pro obě základní charakteristiky

$$V_n = U\sum_{i=1}^{n}\ln r_i = U\ln R\,, \tag{18,3}$$

$$H_n = \tfrac{1}{2}UT\sum_{i=1}^{n}\ln r_i = \tfrac{1}{2}UT\ln R\,, \quad \text{čili} \quad H_n = \tfrac{1}{2}V_nT \tag{18,4}$$

a po zavedení parametrů $W = V_n/U$, $\Theta = H_n/UT$ dostaneme velmi jednoduché vztahy

$$W = \ln R \Rightarrow R = \mathrm{e}^W\,, \quad \Theta = V_n/2U \Rightarrow \Theta = \tfrac{1}{2}W. \tag{18,5}$$

Jako příklad uvážíme složenou raketu, pro kterou je strukturní hmota každého (kromě posledního) stupně rovna hmotě následné subrakety, tj.

$$S_i = M_{i+1}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,.$$

Vzhledem k rovnicím (7,4) je

$$Z_i = M_{i+1} = S_i\,, \quad N_i = M_i - Z_i = S_{i-1} - S_i\,,$$

takže

$$E_i = N_i - S_i = S_{i-1} - 2S_i\,, \quad K_i = S_i + Z_i = 2S_i\,.$$

Odtud pro parametry

$$p_i = \frac{M_i}{Z_i} = \frac{S_{i-1}}{S_i}\,, \quad q_i = \frac{N_i}{S_i} = \frac{S_{i-1} - S_i}{S_i} = p_i - 1\,,$$

$$r_i = \frac{p_i q_i}{p_i + q_i - 1} = \tfrac{1}{2}p_i\,, \quad i \geqq 2\,,$$

$$R = \prod_{j=1}^{n} r_j = \frac{1}{2^n}\prod_{j=1}^{n} p_j = \frac{P}{2^n} \Rightarrow P = 2^n R\,,$$

takže

$$V_n = U \log \frac{P}{2^n} = U(\log P - 0{,}693n).$$

Literatura

[1] ALEXANDOV, FROLOV: *Sovětskije sputniki i kosmičeskaja raketa* (1959).
[2] CLARKE, BATES: *Space Research and Exploration* (1957). Ruský překlad, 13.
[3] KVASNIKOV: *Těorija židkostnych raketnych dvigatělej* I (1959), 37.
[4] MIELE: *Theory of Flight Paths* (1962), 359.
[5] FEODOSJEV, SINJAREV: *Vvedenije v raketnuju techniku* (1960), 27—28.
[6] MERKULOV: *Kosmičeskije rakety* (1955), 15.
[7] POBĚDONOSCEV: *Iskustvenie sputniki Zemli* (1957), 57.
[8] CIOLKOVSKIJ: *Izbrannyje trudy* (1962), 367—393, 531—532.
[9] ROSEN: *Materialy seminara po projektu „Avangard“* (1957), 16—25.

Ozáření ovlivňuje růst krystalů

v tom smyslu, že krystaly KCl pěstované z roztoku při současném ozařování radioaktivním kobaltem mají menší hustotu než krystaly pěstované stejným způsobem bez ozáření. Jev studovali pracovníci amerického Massachusetts Institute of Technology, kteří zjistili

1. že krystaly z taveniny mají hustotu 1,984, krystaly z roztoku 1,92 a krystaly z roztoku ozařované 1,80;
2. že v krystalech z roztoku je velké množství mikroskopicky pozorovatelných dutin vyplněných pravděpodobně matečným louhem; množství a velikost dutin odpovídá hustotě neozářených krystalů z roztoku;
3. mikroskopicky pozorované dutiny v ozařovaných krystalech nestačí na úplné vysvětlení jejich nízké hustoty;
4. ozařování nemění mřížkovou konstantu.

Zbývající část vlivu ozařování se vysvětluje domněnkou, že ozařování způsobuje vznik většího množství vakancí a jejich shluků; tato domněnka nebyla však dosud potvrzena.

Ivan Soudek

Nový atom muonium

se skládá z kladného mezonu μ a obíhajícího elektronu. Je podobný atomu vodíku. Mezon μ se rozpadá v muoniu stejně rychle jako volný; poločas rozpadu je $2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s.

Ivan Soudek

Nový radioteleskop v Cambridgi

ve Velké Británii se skládá ze tří antén, dvou pevných vzdálených asi 1 míli (1,6 km) a třetí pohyblivé po kolejích o délce půl míle. Pracuje na principu syntézy apertury; provede se několik měření při různých polohách pohyblivé antény, naměřené hodnoty se zpracují samočinným počítačem; výsledky výpočtu odpovídají hodnotám, které by se naměřily anténou o průměru jedné míle. Stavba si vyžádala 20 000 m^3 zemních prací a 3500 m^3 betonu. Poloha prostřední antény vůči pevným je určována s přesností ± 3 mm; je zajímavé, že se tvar hliníkových reflektorů antén kontroloval s přesností menší, totiž 5 mm.

Ivan Soudek