Peter D. Lax

Matematika a její aplikace

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 32 (1987), No. 6, 309--314

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139469

Matematika a její aplikace

Peter D. Lax, New York

Zpráva Davidovy komise [5] je dobrým výchozím bodem pro přednášku o stavu aplikované matematiky; zde jsou hlavní závěry této zprávy:

– Důležitost matematiky pro vědu, techniku a celou společnost se neustále zvyšuje.
– Je paradoxní, že zatímco aplikace matematiky prožívaly v posledních desetiletích doslova explozi, snižovala se současně podpora základnímu výzkumu, který přináší takové dobrodiní.
– Příležitosti, jak dosáhnout úspěchů v matematickém výzkumu, jsou nyní vůbec nejlepší v celé historii, ale k jejich realizaci budou zapotřebí velké nové projekty na podporu postgraduálů a mladých vědců, jakož i celkově na podporu vědecké práce na vysokých školách.

Ačkoliv poslední dva body poukazují výslovně na poměry ve Spojených státech, mám podezření, že se týkají i mnoha jiných zemí.

Mnohé – ačkoliv zdaleka ne všechny – aplikace a příležitosti pro matematiku, o kterých hovoří „Davidova zpráva", byly umožněny dostupností velmi rychlých počítačů s velkou pamětí, což vedlo ke dvěma pozoruhodným pokrokům ve vědě a technice. Jsou to:

– Systematické nahrazování mnoha experimentů v konstrukční praxi matematickým modelováním.
– Schopnost získat a uchovat nebývale velké množství informací a schopnost vytěžit odtud skrytou informaci pomocí důmyslných matematických manipulací.

Není divu, že matematické modelování v tak velké míře nahradilo experimenty, protože je ve většině případů levnější, pružnější a bezpečnější. Když se např. používá aerodynamický tunel k navrhování částí letounu, pak pro vyzkoušení každé varianty musí být v dílně vyroben nový model; matematický model může být pozměněn stiskem tlačítek zavádějících nové parametry. Každé moderní letadlo, které je dnes v provozu, bylo zkonstruováno s pomocí počítače. To obzvlášť platí pro experimentální nebo jednoúčelová letadla, jako je raketoplán. Výcvik pilotů raketoplánu by byl nemožný bez simulátorů, které berou do úvahy aerodynamické síly vznikající při manévrování s letadlem; tyto síly se počítají v reálném čase tak, že se řeší základní rovnice dynamiky plynů na superpočítači. Je škoda, že když sdělovací prostředky zdůrazňují úspěchy kosmického programu, nezmiňují se o tom, kolik matematiky je zapotřebí k jeho realizaci.

PETER D. LAX: *Mathematics and its Applications.* Přednáška proslovená v říjnu 1984 v Oberwolfachu při příležitosti 40. výročí založení Matematického ústavu.
The Mathematical Intelligencer, Vol. *8*, No 4, 1986, pp. 14—17. Přeložil O. KOWALSKI.

Je mnoho jiných projektů, které nemohou být realizovány bez rozsáhlé výpočtářské práce, jako je navrhování nových jaderných nebo chemických reaktorů. Zvlášť skvělým příkladem je metoda Charlese Peskina, který zkoušel účinnost rozmanitých umělých srdečních chlopní tím, že vypočítával, jak v levé části srdce proudí krev přes mitrální chlopeň — přirozenou nebou umělou. ([25], [26]).

Stejné množství příkladů můžeme uvést v souvislosti s druhým pozoruhodným pokrokem, který přinesl počítač, tj. uchováváním a zpracováváním dat, jaká se vyskytují v současných pozorováních v meteorologii, oceanografii a astronomii. Významným příkladem je počítačová tomografie; zde se zaznamenává a uchovává obrovské množství rentgenových snímků, z nichž se pak pomocí rafinovaných algoritmů rekonstruují skutečné tvary vnitřních orgánů. Tyto algoritmy dávají v diskrétním tvaru řešení úlohy o inverzi tzv. Radonovy transformace.*)

Počítačová rentgenová tomografie a její mladší sestřenice, totiž tomografie založená na nukleární magnetické rezonanci nebo na emisi pozitronů, byly popsány ve sdělovacích prostředcích a jejich důležitost byla vychválena více než dostatečně; je jen škoda, že tytéž sdělovací prostředky se vůbec nezmínily o tom, kolik matematiky — a to z velké části nové — je zapotřebí k tomu, aby tomografy fungovaly.

Přicházím nyní k hlavní tezi své přednášky:

Aplikovaná a čistá matematika jsou dnes spolu svázány více než kdykoliv předtím za posledních 70 *let.*

Ostré rozdělení matematiky na čistou a aplikovanou je jevem nedávným a pouze přechodným. Pro Poincarého, Hamiltona, Maxwella, Stokese, Kelvina, Rayleigha, Boolea, Gausse, Riemanna, Kleina, Hilberta, Gibbse takové dělení neexistovalo. Kníže matematiků Gauss byl také knížetem výpočtářů; například jeho pozůstalost dokazuje, že již používal rychlou Fourierovu transformaci, viz [13].

Odvážný návrh, že je třeba přeseknout pupeční šňůru mezi matematikou a reálným světem, byl předložen až ve 20. století, zejména skupinou Bourbaki. Kromě toho, že tento pohled je pokřivený, vyvolává navíc hluboké filozofické problémy, když přijde na to, jak hodnotit matematické výsledky. Otázka „Co je dobrá matematika?“ se stává věcí apriorního estetického hodnocení a matematika se tak stává druhem umění. V tom je samozřejmě část pravdy, ale myslím, že matematika jako umění nejvíce připomíná malířství. V obou oborech existuje napětí mezi dvěma cíli; v malířství jde o to vyjádřit tvary a barvy viditelného světa a také vytvářet půvabné vzory na dvojrozměrném plátně; v matematice jde o to studovat přírodní zákonitosti a také spřádat krásné deduktivní struktury. Nejúspěšnější výtvory jsou ty, v nichž je napětí mezi oběma tendencemi největší; nejméně uspokojivá jsou ta díla, v nichž zcela převládne jedna stránka, jako jsou žánrové kresby nebo čistá abstrakce.

Hned po Bourbakim největší bojovníci za abstrakci v matematice pocházejí z amerických kruhů. Tato zvláštní záliba v abstrakci by mohla docela dobře být jakousi vzpourou proti velké tradici praktického a pragmatického ve Spojených státech; jinou takovou vzpourou byla poválečná móda abstraktního expresionismu.

---

*) Viz PMFA, roč. *29* (1984), 196—210 a roč. *30* (1985), 131—144 (pozn. překl.)

Přehnaná čistota má ovšem své obhájce ve všech zemích; například Landau rád hovořil o svém kolegovi Prandtlovi, velkém odborníku v dynamice tekutin, jako o „umazaném strojníkovi" (der Schmieroelmechaniker). G. H. Hardy měl pro aplikační práci pouze opovržení; Levinson vypráví v [17], že Hardy byl upřímně zmaten tvrzením svého přítele N. Wienera, že ho k jeho objevům v harmonické analýze přivedla fyzikální intuice, a podezříval Wienera, že jeho postoj je pouhá póza. V deprimující pasáži svého eseje *A Mathematicians Apology* jásá nad neužitečností matematiky a cituje krásnou teorii iracionálních čísel, která prý nikdy nenalezne technické aplikace; skutečně se už nemohl více mýlit!

Byly zde ovšem i jiné hlasy; John Littlewood měl mnohem širší chápání matematiky než jeho spolupracovník. Weyl a Courant byli ve stejné opozici k Landauově tradici jako Jean Leray, tvůrce moderní teorie viskozity oponuje duchu Bourbakiho. Dokonce i v Americe byli přední pracovníci v matematické analýze G. D. Birkhoff a Norbert Wiener velice ovlivnění fyzikou a stejně tak mladí přistěhovalci K. O. Friedrichs a Mark Katz.

Klíčovou postavou poloviny tohoto století byl John von Neumann. Svou filozofii matematiky vyjádřil výmluvně v článku [22], který si zaslouží být znovu citován:

„Matematické myšlenky vznikají ze zkušenosti ...; jakmile jsou jednou zformulovány, námět začne žít svým typickým vlastním životem ...Jakmile matematická disciplína zajde daleko od svého empirického zdroje, ...stává se stále více estetizující, ...; ve velké vzdálenosti od svého empirického zdroje nebo po přílišném „abstraktním" zúžení se matematický námět octne v nebezpečí degenerace."

Von Neumannovo vlastní dílo jasně ukazuje zálibu v empirických zdrojích nové matematiky a dokonce žízeň po těchto zdrojích. Neumann učinil základní objevy v takových čistých disciplínách, jako jsou teorie operátorů, logika, teorie míry a teorie spojitých grup; ale stejně překvapující objevy učinil v kvantové mechanice, meteorologii, v teorii Monte Carlo, numerické lineární algebře, numerické dynamice plynů, v architektuře počítačů, v teorii programování, automatů a v teorii mozkové činnosti.

V prorocké přednášce proslovené v Montrealu v roce 1945 učinil von Neumann závěr, že „opravdu účinné a rychlé výpočetní prostředky nám mohou v oblasti nelineárních parciálních diferenciálních rovnic, jakož i v mnoha dalších oborech, které jsou nyní těžko přístupné nebo vůbec nepřístupné, opatřit ty heuristické podněty, jaké jsou ve všech oblastech matematiky potřebné pro dosažení skutečného pokroku" [23].

Přesně tímto způsobem objevili Fermi, Pasta a Ulam [8] pozoruhodné skoroperiodické chování vibrací nelineárních řetězců a Kruskal a Zabusky vznik a vzájemné působení solitonů. Úplná integrabilita Todovy mříže se stala zřejmou po velmi opatrných numerických výpočtech provedených Joem Fordem [10]; Mitchell Feigenbaum objevil své pozoruhodné univerzální zákonitosti iterací tím, že analyzoval numerické experimenty. Numerické výzkumy přivedly E. Lorenze [18] k pojmu podivného atraktoru; pochopení chaotického chování jednoduchých dynamických systémů, při kterém se vyskytují ostrůvky stability, bylo numerickými výzkumy podstatně prohloubeno. To nebyla špatná předpověď, co řekl von Neumann, zvláště když uvážíme, že počítače, o kterých hovořil v roce 1945, byly tehdy jen pouhými výplody jeho fantazie.

Mezitím proniklo užívání počítačů jako životní styl i do mnoha oblastí čisté matematiky. Již Legendre a Gauss používali tabulky prvočísel k odhadu asymptotických vlastností rozdělení prvočísel; s příchodem moderních počítačů se hledání asymptotických zákonů stalo posedlostí. Vezměme si kořeny Riemannovy funkce zéta; nedávno ukázali van de Lune a Te Riele [19], že funkce zéta má přesně 300 000 001 nulových bodů, jejichž imaginární části leží mezi čísly 0 a 119 590 809,282 a všechny z nich mají reálnou část rovnou 1/2. Mostow provedl v [2] množství výpočtů, aby sestrojil fundamentální oblasti jistých speciálních diskrétních grup transformací; tyto výpočty se neobjevily v důkaze výsledné věty, ale byly podstatné v tom, že odhalily, co se má vlastně dokazovat. Naproti tomu v nedávném Lanfordově důkazu jednoho z Feigenbaumových tvrzení jsou výpočty součástí logické struktury důkazu; stejně je tomu u slavného Appelova a Hakenova důkazu „věty o čtyřech barvách", který obsahuje výsledky z počítače.*)

Poslední zmíněný důkaz byl některými matematiky kritizován, že neposkytuje žádnou možnost nahlédnout, proč je výsledek správný; tato kritika je opodstatněná, ale může být stejným právem uplatněna i na mnohé jiné důkazy, které zůstaly zcela nedotčeny počítačem. Jiní důkaz kritizovali proto, že je pro jednotlivce tak obtížné ověřit jeho správnost; to je pravda, ale totéž platí i o jiných, „ručně" zhotovených spletitých důkazech, které mají rozsah tisíců stran. Někteří lidé z principu odmítají důkaz s pomocí počítače. Ti mě přímo šokují svou zatvrzelostí; konec konců, matematičtí logikové se shodují v tom, že nenapadnutelný matematický důkaz je takový, který může být realizován na Turingově stroji. Pokládat důkazy uskutečněné na imaginárních počítačích za prototypy přesnosti a přitom ignorovat důkaz provedený pomocí skutečného počítače má v sobě jistou příchuť směšnosti.

K získání významné informace z výpočtů je podstatné mít dobrý grafický displej; jinak nás zahltí masa nestravitelných seznamů dat. Geometři pracující na problémech ve třech dimenzích používají stále častěji grafické displeje; stejně postupují ti, kteří zkoumají složitá zobrazení, jako jsou racionální zobrazení vytvářející Juliovy množiny.

Jiné důležité využití má počítač pro rychlou a spolehlivou manipulaci s algebraickými formulemi, jaká přesahuje duševní schopnosti a trpělivost lidí. Nedávným příkladem je výpočet, v němž Robert Miura určil s pomocí počítače nestandardní zachovávající se veličiny stupňů sedm až dvanáct Kortewetovy-de Vriesovy (KdV) rovnice, poté co Kruskal a Zabusky vypočítali „ručně" veličiny stupňů čtyři až šest. Konečně C. Gardner dokázal s pomocí teoretických argumentů, že existuje nekonečná posloupnost takových zachovávajících se veličin, [11].

Závislost čisté i aplikované matematiky na výpočtech ukovala velmi praktické vzájemné pouto mezi nimi; obě potřebují spolehlivé výpočetní prostředky, především grafiku a manipulátory pro formule. Aby se k nim dostaly, musí jednat se svým společným spojencem a někdy protivníkem: s výpočetním střediskem.

Nejdůležitějším poutem mezi čistou a aplikovanou matematikou je ovšem pouto intelektuální: aplikace dodávají nové problémy a teoretikové vyvíjejí prostředky pro řešení některých z těchto nových problémů. Nedávné příklady druhého typu jsou tyto:

*) Viz PMFA, roč. *24* (1979), 181—201 (pozn. překl.)

a) Slavná teorie Kolmogorova, Arnol'da a Mosera (KAM), viz např. [20], která byla použita k řešení celé řady zásadních otázek klasické mechaniky. Nejpřekvapivější zde bylo vyvrácení ergodické hypotézy, která se dosud pokládala za základní pro statistickou mechaniku.

b) Pojem Hausdorffovy dimenze poněkud osvětlil stále ještě záhadné chování řešení Navierovy-Stokesovy rovnice ve třech dimenzích. Není známo, zdali taková řešení jsou hladká, ale Schefferovi se podařilo ukázat [26], že singularity těchto řešení, pokud vůbec existují, musí ležet na množinách s Hausdorffovou dimenzí menší než tři (viz též [2]). Pojem Hausdorffovy dimenze se zdá být stejně užitečný pro zkoumání singularit ideálního neviskózního proudění, viz [3].

Pro malá Reynoldsova čísla se řešení Navierovy-Stokesovy rovnice chovají stabilně, tj. asymptoticky se přibližují k jedinému stacionárnímu řešení. Pro vysoká Reynoldsova čísla se zjistilo, že řešení se spirálovitě vinou kolem tzv. atraktorových množin. Foias [9], Constantin a Višik ukázali, že tyto atraktorové množiny mají konečnou Hausdorffovu dimenzi ve vhodném prostoru funkcí; tato dimenze se blíží k nekonečnu, pokud se blíží k nekonečnu Reynoldsovo číslo.

Tyto výsledky nás přivedly o krok dále k pochopení tajemství turbulence.

c) Krásná a odvážná teorie singularit René Thoma se stává užitečným nástrojem pro aplikace, poté co se vymanila z rukou šarlatánů a pouťových vyvolávačů.*)

Není přesvědčivějšího důkazu o jednotě matematiky, než když se pojmy vybudované v jednom oboru stanou klíčem k řešení problémů v jiném, zdánlivě odlehlém oboru. Obzvláště nás překvapí, když se pojmy z aplikované matematiky uplatní při řešení otázek velmi čisté matematiky; uveďme několik příkladů z nedávné doby:

d) Některé úplně integrabilní systémy rovnic, které se objevují v dynamice tekutin upoutaly na sebe pozornost algebraických geometrů. Například Dubrovin [6] ukázal že řešení Kadomcevovy-Petiašviliho rovnice povrchových vln jsou těsně svázána s maticemi Riemannových period v teorii Riemannových ploch. Využitím těchto souvislostí vyřešili Arbarello a De Concini [1] a Shirota klasický Schottkyho problém o Riemannových maticích.

e) Simon Donaldson (viz [5]) využil teorie Yangových-Millsových polí k tomu, aby dokázal existenci nestandardních diferenciálních struktur ve čtyřech dimenzích.**)

f) Gel'fand [12] ukázal ve své přednášce na Mezinárodním kongresu matematiků ve Stockholmu v roce 1962, že „funkce zéta homogenních prostorů jsou zcela analogické Heisenbergovým S-maticím". O něco později ukázali Fadějev a Pavlov [7], že jde o více než analogii: zkonstruovali vlnovou rovnici, jejíž odpovídající operátor rozptylu je funkce zéta; viz též [15].

*) Viz PMFA, roč. *22* (1977), 246—262 a 302—316; roč. *24* (1979), 1—20 a 313—326 (pozn. překl.)

**) Viz PMFA, roč. *30* (1985), 82—92. (Pozn. překl.)

Literatura

[1] ARBARELLO, E., and DE CONCINI, C.: *On a set of equations characterizing Riemann matrices.* Ann. Math. *120* (1984), 119—140.

[2] CAFFARELLI, L., KOHN, R. and NIRENBERG, L.: *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations.* CPAM *35*, (1982), 771—831.

[3] CHORIN, A. J.: *The evolution of a turbulent vortex.* Comm. Math. Phys., (1983), 517.

[4] DAVID, E. E. JR.: *Renewing U. S. Mathematics: Critical Resource for the Future.* Ad Hoc Committee on Resources for the Mathematical Sciences, Nat. Res. Council, Nat. Acad. Press, 1984, *The Federal Support of Mathematics.* Scientific American, May 1985, 45—51.

[5] DONALDSON, S. K.: *The Yang-Mills equation on Euclidean Space.* Perspectives in Mathematics, *93—108*, (1984) Birkhauser Verl. Basel.

[6] DUBROVIN, B. A.: *The Kadomtsev-Pethiashvili equation and the relations between the periods of holomorphic differentials on Riemann surfaces.* Math. USSR Izvestija *19* (1982) 285—296.

[7] FADDEEV, L. and PAVLOV, B. S.: *Scattering theory and automorphic functions.* Seminar of Steklov Math. Inst. of Leningrad *27* (1972) 161—193.

[8] FERMI, E., PASTA, J. R. and ULAM, S. M.: *Studies of Nonlinear Problems.* LASL Report *LA 1940* (1955), also Nonlinear Wave Motions, v. 15, Lectures in Applied Math.; Ed. ALAN NEWELL, AMS, 1974.

[9] FOIAS, C. and TEMAM, R.: *Structure of the set of stationary solutions of the Navier-Stokes equation.* CPAM 30, (1977), 149—164.

[10] FORD, J.: *Fundamental Problems in Statistical Mechanics, v. 3.* Ed. E. D. G. COHEN, 1985, North Holland, Amsterdam.

[11] GARDNER, C. S., KRUSKAL, M. D., and MIURA, R. M.: *KdV equation and generalizations II. Existence of conservation laws and constants of motion.* J. Math. Phys. *9* (1968), 403—412.

[12] GELFAND, I. M.: *Automorphic functions and the theory of representation.* Proc. Internat. Congress of Mathematicians, 1962, 74—85.

[13] GOLDSTINE, H. H.: *The computer from Pascal to v. Neumann.* Princeton U. Press, 1972.

[14] LANFORD, O. E.: *A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures.* Bull. Amer. Math. Soc., v. *6*, (1982), pp. 427—434.

[15] LAX, P. D., and PHILLIPS, R. S.: *Scattering theory for automorphic functions.* Ann. Math. Studies Studies no. 87, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. 1976.

[16] LAX, P. D.: *Problems solved and unsolved concerning linear and nonlinear partial differential equations.* Proc. International Congress of Mathematicians, Warsaw, 1983.

[17] LEVINSON, N.: *Wiener's Life.* Bull. Amer. Math. Soc. *72* (1966), 1—32.

[18] LORENZ, E. N.: *Deterministic Non-Periodic Flow.* Journal of Atmospheric Sciences *26*, (1973), 130—141.

[19] LUNE, J. VAN DE, and TE RIELE, H. J. J.: *On the zeroes of the Riemann Zeta function in the critical strip, III.* To appear in Math. Comp.

[20] MOSER, J.: *Stable and Random Motions in Dynamical Systems.* Princeton University Press, 1973.

[21] MOSTOW, G. D.: *On a Remarkable Class of Polyhedra in complex Hyperbolic Space.* Pacific J. of Math. v. *86* (1980), pp. 171—276.

[22] v. NEUMANN, J.: *The Mathematician.* In J. R. NEWMAN: *The World of Mathematics, vol. IV*, 2053—2063, Simon and Shuster, New York, 1956.

[23] v. NEUMANN and GOLDSTINE, H. H.: *On the Principles of Large Scale Computing Machines.* Collected Works of John v. Neumann, vol. V, P 1—32, Pergamon Press, McMillan, 1963.

[24] PESKIN, C. S.: *Numerical Analysis of Blood Flow in the Heart.* J. Comp. Phys. *25* (1977), 220—252.

[25] PESKIN, C. S., and MCQUEEN, D. M.: *Modeling Prosthetic Heart Valves for Numerical Analysis of Blood Flow in the Heart.* J. Comp. Phys. *37* (1980), 113—132.

[26] SCHEFFER, V.: *Turbulence and Hausdorff dimension.* In *Turbulence and the NS equation*, Lecture Notes in Math. No *565*, Springer Verlag, 1976, 94—112.