Ján Gatial; Milan Hejný

Vieme ako třeba vyučovať geometriu?

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 33 (1988), No. 4, 228--233

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139462

Druhá zpráva byla vypracována skupinou odborníků pod vedením dr. Hirsche Cohena z IBM, a to na žádost podsekretáře ministerstva obrany USA.

Oba panely došly ke shodným nebo podobným závěrům ohledně situace matematického výzkumu jako Davidova komise, a proto byly jejich materiály rovněž zařazeny do sborníku.

vyučování

VIEME AKO TREBA VYUČOVAŤ GEOMETRIU?

Ján Gatial, Milan Hejný, Bratislava

1. Dve prístupové stratégie k štruktúre matematických vedomostí

Matematické vedomosti môžeme evidovať, uchovávať a prezentovať dvoma spôsobmi: axiomaticky a geneticky. Porovnajme špecifiká oboch týchto prístupov.

Axiomatický prístup je osnovaný na logickej zákonitosti. Ním vytvorená poznatková štruktúra je „nadčasová", akoby raz navždy kodifikovaná, ucelená a nemenná. V základoch tejto štruktúry ležia primitívne (nedefinované) termíny a dohovorom prijaté (nedokazované) tvrdenia – axiómy. Z nich sa potom striktne logickými úvahami vyvodzujú ďalšie tvrdenia a definíciami zavádzajú ďalšie termíny. Hierarchickú výšku termínu či tvrdenia v tejto štruktúre určuje jeho „vzdialenosť" od základov.

Genetický prístup je osnovaný na psychickej zákonitosti. Ním vytvorená poznatková štruktúra je dynamická, mení sa v čase. V základoch tejto štruktúry ležia názorné a konkrétne skúsenosti človeka. Z nich sa postupným prediferencovaním vytvárajú pojmy a vynárajú zákonitosti. Pojmy aj zákonitosti sa v dôsledku nových, ľudskou činnosťou získaných skúseností, stávajú presnejšie, jasnejšie, všeobecnejšie a abstraktnejšie. Hierarchickú výšku pojmu či zákonitostí v tejto štruktúre určuje počet abstrakčných (kvalitatívnych) zmien, ktoré bolo nutné vykonať, aby sa od základov došlo až k nim.

Rozdielnosť oboch stratégií budeme ilustrovať na príklade rôznej interpretácie známeho pravidla J. A. Komenského „od jednoduchého k zložitému". Ide o konkretizáciu slova „jednoduché". Ak zvolíme axiomatický prístup, tak prvé najjednoduchšie termíny, s ktorými začneme žiakov oboznamovať, budú: bod, priamka, rovina, incidencia. Ak zvolíme genetický prístup, tak prvé pojmy vo vyučovaní budú: kocka, vrchol, stena, hrana.

Vo fylogenéze sa obe prístupové stratégie striedali, prelínali a navzájom obohacovali. Rozpor medzi genetickým a axiomatickým prístupom má dialektický charakter, a to aj napriek tomu, že ho občas stúpenci toho či onoho presvedčenia považovali za rozpor antagonistický. Dialektičnosť uvedeného rozporu sa azda najnázornejšie ukáže vtedy, keď si predstavíme, že by jeden z prístupov natrvalo prevládol nad druhým. Bez axiomatického prístupu by nahromadené poznatky a pojmy vytvorili prales intuitívnych teórií plných difúznych pojmov, hypotetických tvrdení a nevyjasnených paradoxov. Bez genetického prístupu by poznanie ustrnulo a stalo sa neschopné ďalšieho rozvoja.

Zákonitosť dialektickej väzby axiomatického a genetického prístupu, vyvodenú z analýzy histórie matematiky, môžeme previesť aj na rozvoj matematických vedomostí žiaka. V ontogenéze rovnako ako vo fylogenéze sa striedajú obdobia nadobúdania nových skúseností s obdobiami štrukturalizačnými, v ktorých sa nové poznatky hierarchizujú a včleňujú do už existujúcich kognitívnych štruktúr. Domnievame sa, že rovnako ako v histórii matematiky, aj pri osvojovaní si vedomostí jedincom, musia obe polaritné stratégie harmonicky a vyvážene kooperovať. Neprimerané zdôrazňovanie jednej zo zložiek, ale najmä absencia druhej vedie k deformácii celej kognitívnej štruktúry.

V nedávnej dobe sme boli nielen svedkami, ale dokonca aktérmi jednej takej deformácie, ktorej dôsledky ešte stále pociťujeme. Pokúsime sa opísať príčiny, priebeh i následky tohto javu.

2. Skúsenosti z „množinovej matematiky"

Na začiatku 60. rokov sa v mnohých zemiach sveta rozbehla zásadná prestavba vyučovania matematiky akcentujúca axiomatickú prístupovú stratégiu. Príčiny tejto iniciatívy vidíme v súhrne niekoľkých okolností:

– Nezvyčajne veľký počet popredných svetových matematikov sa začal intenzívne zaoberať problematikou vyučovania matematiky.

– Matematické myslenie bolo rozhodujúcim spôsobom ovplyvnené vrcholiacim obdobím Bourbakiho koncepcie, ktorej nosnou ideou bola štrukturalizácia a axiomatizácia.

– Prudký nárast nových objavov viedol k prehodnoteniu vzdelávacích cieľov; namiesto tradičného cieľa dať žiakovi ucelený súbor poznatkov, vystúpil do popredia cieľ rozvoja tvorivých schopností žiaka a jeho orientácie k celoživotnému vzdelaniu sa.

– Rozvoj kalkulačiek a počítačov viedol k myšlienke o nepotrebnosti drilového nácviku aritmetických operácií; namiesto týchto partií sa žiadalo zaviesť do osnov učivo napomáhajúce rozvoju logiky, abstrakcie a tvorivosti.

Rozhodujúcu úlohu pri hľadaní novej cesty vo vyučovaní matematiky zohrala skutočnosť, že protagonistami iniciatívy boli skoro výlučne profesionálni matematici s bohatými znalosťami matematiky, ale iba malými, ba neraz nulovými skúsenosťami vyučovania matematiky na ZŠ. Je pochopiteľné, že ich pozornosť bola zameraná na matematiku a nie na žiaka. Verili, že ak v osnovách a učebniciach vymeníme nezáživné počtárske nácviky za ušľachtilé uvažovanie, vyvodzovanie, experimentovanie, zovšeobecňovanie a dôvodenie tak kvalitatívne zlepšenie výsledkov výučby bude zaručené. Žiaci nebudú možno vedieť počítať, ale budú vedieť myslieť a argumentovať. Ich matematické vedomosti už nebudú mozaikou návodov a receptov, ale ucelenou štruktúrou zakotvenou v pojmoch množina, relácia, operácia.

Modernizačný prúd zachvátil prevažnú časť vyspelých zemí sveta, najintenzívnejšie, asi v dôsledku vplyvu Borbakiho, frankofilnú oblasť. Matematika sa stala ohniskom školskej problematiky, najdiskutovanejším výukovým predmetom, a to nielen medzi pedagógmi, ale aj medzi širokou, najmä rodičovskou verejnosťou. Učitelia matematiky boli školení a preškoľovaní, chvatne sa písali nové učebnice a metodické komentáre, knižný trh bol zaplavený publikáciami, v názve ktorých bolo skloňované slovo množina. Očakával sa kvalitatívny skok vo vzdelávaní nastupujúcej generácie.

Prvé skúsenosti s modernizáciou, získané na experimentálnych školách, boli nádejné. Učitelia konštatovali, že vzrástla úroveň abstrakcie, argumentácie a tvorivosti žiakov. Výrazne sa zmenil postoj žiakov k matematike. V anketách hodnotiacich obľúbenosť jednotlivých predmetov sa matematika dostávala na jedno z prvých miest. Zmizol tradičný strach z matematiky. Množinová matematika si získala aj učiteľov, ktorí sa k nej stavali spočiatku nedôverčivo. Zdalo sa, že sa vyučovanie matematiky dostáva na novú, podstatne vyššiu úroveň.

Prešlo niekoľko rokov a situácia sa začala meniť. Objavili a množili sa skeptické hlasy spochybňujúce úspechy v oblasti abstrakcie a tvorivosti. Navidomoči slabli úspechy motivačné. Viacerí učitelia si ťažkali, že druhá generácia množinových žiakov nemá spontanitu a pracovné nadšenie generácie prvej. Do škôl sa vracal dril, formalizmus a verbalizmus. Krivka množinového experimentu bola na zostupe. Vo vyučovaní matematiky mnohých zemí nastali výrazné korekcie, neraz až na návrat k predmnožinovým osnovám a učebniciam.

3. Analýza opísaných skúseností

Na parabolickom priebehu množinového experimentu je zarážajúca jedna skutočnosť: prečo zmena učebnej látky spôsobila zmenu ducha vyučovania matematiky iba na určitú dobu? Prečo sa po pár rokoch zo školy vytratili nadšenie a tvorivosť, hoci koncepcia výučby bola i naďalej množinová? Veď po začiatočných ťažkostiach, keď učitelia nové učivo vecne i metodicky zažili, dal sa prirodzene čakať ďalší vzostup a nie pokles vyučovania matematiky. Ako si vysvetliť túto paradoxnú skúsenosť?

Podľa nášho názoru sa celá skúsenosť javí paradoxná preto, lebo vychádzame z pomýleného predpokladu, že príčinou zmien vo vyučovaní matematiky bola zmena učiva. Nazdávame sa, že príčinou zmien nebolo učivo, ale učiteľ. V učiteľovi, v zmenách jeho psychiky treba hľadať vysvetlenie celého priebehu množinovej skúsenosti. Zavedením nového učiva boli učitelia prinútení opustiť rutinné metódy práce a výrazne zapojiť do vyučovacieho procesu vlastnú osobnosť. Učitelia sa stali žiakmi, lebo sa museli učiť novú látku. Na hodinách ju potom nereprodukovali, ale produkovali. Tvorivosť učiteľova a jeho intelekčné vypätie indukovali rovnakú psychickú orientáciu aj v žiakoch. Radosť z osobnostného rastu a možnosť sebarealizácie motivovali pracovnú klímu triedy a odstránili z matematiky strach. Po určitej dobe toto prechodné štádium, v ktorom bol učiteľovi vytvorený priestor pre prácu na sebe, pominulo. Akonáhle si učiteľ nové učivo osvojil a musel opäť popri plnom vyučovacom úväzku vykonávať aj ďalšie školské i mimoškolské povinnosti, začal svoju prácu ekonomizovať. Namiesto energeticky náročných dialógov sa do triedy opäť vrátila klasická technika monológu vysvetľovania a skúšania. Namiesto náročného objavovania boli žiakom predkladané návody a pravidlá. Do školy sa začal vracať verbalizmus a formalizmus a s nimi i strach z matematiky. K rýchlemu úpadku tvorivosti nemálo prispelo aj to, že výsledky výučby boli vyhodnocované starými kritériami. Úspešnosť žiakovej práce bola hodnotená nie mierou jeho nápaditosti a intelekčného vypätia, ale stupňom rýchlosti a presnosti imitácie činností demonštrovaných učiteľom. Také je podľa nášho názoru vysvetlenie príčin priebehu „množinovej matematiky".

4. Poučenie vyplývajúce z analýzy

Celosvetový experiment, napriek svojej nízkej úspešnosti, priniesol dôležité poznatky pre pedagogickú vedu vo všeobecnosti a pre metodiku matematiky osobitne. Závažnosť týchto uzáverov je zdôraznená tou skutočnosťou, že východiskový experiment nebol obmedzený na jednu či niekoľko zemí, ale bol skutočne celosvetový. Podľa nášho názoru spomedzi získaných poznatkov treba vyzdvihnúť najmä:

– Determinujúcim agentom kvality výučby je učiteľ. Osnovy, učebnice a výukové pomôcky tu majú iba sekundárny význam.

– Miera rozvoja tvorivosti žiakov je priamo úmerná miere intelekčnej práce, ktorú do vyučovacieho procesu vloží učiteľ. K podobnému uzáveru došiel i sovietsky psychológ A. N. Luk: „Ak má učiteľ veľké tvorivé schopnosti, nadaní žiaci majú výraznejšie úspechy a výsledky žiakov s menej rozvinutými tvorivými schopnosťami sú slabšie. Ak sa vyučujúci sám nachádza na dolnej hranici stupnice tvorivých schopností, úspechy menej schopných študentov sa javia ako väčšie. V tomto prípade sa mimoriadne nadaní žiaci neprejavujú, nerealizujú svoje možnosti. Učiteľ akoby uprednostňoval ten psychologický typ, ku ktorému sám patrí."*) Pritom samoštúdium učiteľa, jeho práca na sebe je organickou a veľmi dôležitou súčasťou vyučovacieho procesu.

– Väčšina učiteľov matematiky (a pravdepodobne to možno povedať aj o iných predmetoch) je schopná podstatne skvalitniť vyučovací proces, ak má k tomu vytvorené pracovné podmienky. Otvorená zostáva otázka, či takú úroveň možno udržať dlhodobo.

– Tvorivý systém výučby vyžaduje zásadnú zmenu systému hodnotenia výsledkov výučby. Popri tradičných kritériách, orientovaných na meranie reproduktívnych a pamäťových abilít žiaka, treba zaviesť aj kritériá na meranie tvorivosti a intelekčného úsilia žiaka. Tieto kritériá treba najprv rozpracovať – to je podľa nášho názoru zložitá a nástojčivá úloha teórie vyučovania matematiky dneška.

– Ak vo vyučovaní matematiky jednostranne uprednostníme axiomatický prístup, nedosiahneme tým poznanie abstraktnejšie a štrukturálnejšie, ale formálnejšie a verbálnejšie.

Doteraz sme uvažovali o vyučovaní matematiky v celku. Teraz sa podrobnejšie zameriame na oblasť nášho hlavného záujmu – na geometriu.

5. Miesto geometrie v množinovej matematike

Začneme aspoň letmým pohľadom do dvoch učebníc prvého (úspešného) obdobia modernizácie. Prvá z nich [1] vyšla v Paríži v roku 1961 a je určená učiteľom. Jej autorka Lucien Felix je žiačka Henriho Lesbegua, skúsená učiteľka a zapálená propagátorka modernizácie. Zo 470 strán textu je geometrii venovaných posledných 186, keď najprv boli vybudované základné štruktúry, aritmetika s algebrou a matematická analýza. Geometria sa stáva vyvrcholením a syntézou celej matematiky, nie však ako metóda skúmania objektov, ale ako určitá strešná štruktúra. Jasne to napísala autorka v úvode prvej

*) Pozri A. N. Luk: *Psychologia tvorivosti*, Pravda, Bratislava, 1981, str. 62.

kapitoly: „Súčasná matematika sa ani tak nezapodieva objektami ako štruktúrou vzťahov medzi nimi. Tak skoro celá tradičná geometria, ak ju chápeme ako teóriu o operáciách, je predstavená v tvare algebry, obrázky sa tu stávajú nepotrebné, či dokonca nebezpečné, hoci učiteľovi je ponechaná voľnosť pri používaní náčrtov pomáhajúcich intuícii." Pri takom pohľade sa kedysi nosné geometrické pojmy a vety stávajú iba podružnými ilustráciami všeobecných pojmov algebry. Rovnobežnosť je ilustráciou pojmu lineárnej závislosti vektorov, Cevova veta je uvedená ako aplikácia barycentrického kalkulu a základné tvrdenia o všeobecnom trojuholníku (veta sínusová, veta o súčte uhlov) sú prezentované takto:

„Všeobecný trojuholník: Nutná a postačujúca podmienka, aby a, b, c, α, β, γ boli prvkami trojuholníka, je daná sústavou

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$a > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0,\ \beta + \gamma < \pi.\text{"}$$

Na prvých 120 stranách geometrie je iba 5 obrázkov.

Druhá učebnica, do ktorej nazrieme (Condamine, M., Vissio, P.: *Mathématique Terminales C et T*, Paris, Delagrave 1967, 1968), vyšla tiež v Paríži. Úctyhodný je už rozsah knihy: 638 strán algebry (1. diel), 447 strán analýzy (2. diel) a 807 strán geometrie (3. diel), sumárne 1892 strán textu – rozhodne nie jednoduchého. Pokiaľ ide o obrázky, je táto učebnica ilustrovaná bohato. Jej koncepcia je však dôsledne štrukturálna ako pri [1]. Tak napríklad pojem vektorového priestoru je definovaný na prvej strane textu a pojem grupy rovnoľahlostí afinného priestoru je na strane 34. Zato však veta o obvodovom a stredovom uhle je až na strane 634.

Dnes, keď človek listuje stránky týchto učebníc, nechce ani veriť, že ešte nedávno vládla v matematických kruhoch optimistická viera o skvelom úspechu, ktorý pomocou nich vo vyučovaní matematiky získame.

6. Miesto geometrie v dnešnej škole

V úvode svojich skrípt popredný anglický topológ E. Ch. Zeeman napísal:„Pred 2000 rokmi bola geometria jedinou dokonalou a ucelenou vedeckou disciplínou. Dnes, zdá sa, že geometria je jedinou časťou matematiky, ktorej obrysy sú veľmi nejasné." Druhá časť Zeemanovho výroku sa dá preniesť aj na vyučovanie geometrie. Ešte nedávno pevná a základná zložka osnov matematiky sa pod štrukturalizačným tlakom množín rozpadla na nejasné a mozaické úlomky. V súčasnosti sa opäť volá po nutnosti vrátiť syntetickú geometriu do škôl. Značná rôznorodosť však panuje v názoroch na realizáciu tohto návratu: S ktorými pojmami začínať vyučovanie geometrie? Aké miesto venovať planimetrickým konštrukciám? Kedy začať a ako hlboko ísť vo vyučovaní transformácií? Čo so stereometriou? Učiť analytickú geometriu pod zorným uhlom geometrie, alebo algebry? atď. Tieto a mnohé ďalšie otázky, týkajúce sa vyučovania geometrie, čakajú na odpoveď. Spôsob, ktorým na ne odpovedajú súčasné osnovy a učebnice, sotva môžeme považovať za optimálny, ak kriticky zhodnotíme jeho výsledok – úroveň geometrického myslenia absolventov našich škôl. Podľa nášho názoru riešenie tohto problému vyžaduje hlbšie znalosti o genetickej štruktúre geometrie ako o organickej súčasti kognitívnej štruktúry žiaka vôbec. Potrebujeme presnejšie poznať mechanizmy, ktorými sa uskutočňuje proces učenia sa geometrie. Potrebujeme odhaliť vzťahy medzi činnosťami žiaka a ich účinkami na rozvoj jeho vedomostí a spôsobilostí. Potrebujeme rozpracovať nový systém testovania a hodnotenia žiaka.

Aby sme naše úvahy o geometrii ukončili optimisticky, dovolíme si sformulovať niekoľko konkrétnych metodických problémov, ktoré predkladáme čitateľovi ako námety na samostatný výskum:

1. V rámci experimentov a experimentálneho vyučovania sme pozorovali, že deti vo veku 5–6 rokov a chlapci vo veku 10–12 rokov majú prirodzený sklon k riešeniu stereometrických úloh. Má toto naše pozorovanie všeobecnú platnosť? Ak áno, aké stereometrické činnosti sú pre deti uvedeného veku najviac príťažlivé?
2. Existujú slabší žiaci s výbornou stereometrickou predstavivosťou. Objavovali sme ich nasledujúcim testom: žiakovi sa niekoľko sekúnd ukáže stavba z kociek, úlohou žiaka je postaviť kópiu tejto stavby, nakresliť túto stavbu, prípadne zodpovedať otázky typu: „Koľko kociek mala stavba v druhom podlaží?“ Zdá sa nám, že výbornú stereometrickú predstavivosť slabého žiaka možno využiť na jeho kognitívnu akceleráciu. Nevieme, ako zámer realizovať.
3. V rozsiahlom stereometrickom teste realizovanom na študentoch maturitných ročníkov a prvoročiakoch – vysokoškolákoch najhoršie dopadla úloha „Určite veľkosť uhla telesových uhlopriečok kocky“. Výsledok bol pre nás prekvapujúci. Očakávali sme, že niektoré iné úlohy dopadnú horšie. Napríklad: „Určite polomer guľovej plochy opísanej kocke, ak poznáte polomer guľovej plochy do kocky vpísanej“, alebo „nakreslite taký rovinný rez kocky, ktorý je päťuholník“. Nevieme si vysvetliť, v čom je náročnosť prvej úlohy.
4. V ktorom veku sú žiaci motivačne citliví na tieto úlohy: a) konštrukčné planimetrické úlohy, b) úlohy o stredovej a osovej súmernosti. Získanie odpovede by pomohlo určiť, kedy uvedené dva tematické celky zaradiť do osnov.
5. Porovnať výsledky dvoch metodických koncepcií vyučovania analytickej geometrie:
   1. najprv vektorový kalkul, potom klasická analytická geometria;
   2. najprv úvod do klasickej analytickej geometrie roviny, potom vektorový kalkul.

Literatúra

[1] Feliks, L.: *Elementarnaja matematika v sovremennom izloženiji.* Prosveščenije, Moskva, 1967.

[2] Condamine, M., Vissio, P.: *Mathématique Terminales C et T.* Paris, Delagrove, 1967, 1968.

jubilea & zprávy

VZPOMÍNKA NA PROFESORA VÁCLAVA PLESKOTA U PŘÍLEŽITOSTI JEHO NEDOŽITÝCH OSMDESÁTIN

V úterý 17. listopadu 1987 uplynulo osmdesát let od narození prof. dr. Václava Pleskota. Katedra matematiky fakulty jaderné a fyzikálně