Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

William P. Thurston

O důkazech a pokroku v matematice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 41 (1996), No. 2, 57--73

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139429`

O důkazech a pokroku v matematice

William P. Thurston

Tento esej o povaze důkazů a pokroku v matematice byl stimulován článkem A. Jaffeho a F. Quinna o „teoretické matematice“[1]), který obrátil pozornost na zajímavé otázky, jichž by si matematici měli více všímat, ale také setrval na názorech a stanoviscích, která si zasluhují kritického prozkoumání.

Článek obsahuje odstavec líčící část mé práce způsobem, jenž se rozchází s mou zkušeností i s postřehy lidí z oboru, s nimiž jsem o něm diskutoval, abych se přesvědčil, že má reakce má reálný základ.

Když jsem si to nechal projít hlavou, připadá mi, že Jaffeho a Quinnův text je příkladem toho, že lidé vidí, co vidět chtějí. Způsob, jímž vypodobnili mou práci, je důsledkem promítnutí sociologie matematiky na jednorozměrnou škálu (spekulativní versus rigorózní uvažování), které ignoruje mnohé základní souvislosti.

Řada matematiků byla požádána, aby na Jaffeho a Quinnův článek odpověděla, proto očekávám, že se mu dostane od ostatních spousty podrobných analýz a kritiky. Chci proto zaměřit svůj esej spíš pozitivně než na vyhledávání protinedostatků. Popíšu svůj náhled na to, jak matematika funguje, odvolávaje se pouze tu a tam na Jaffeho a Quinna pro srovnání.

Při pokusu oloupat postupně vrstvy předpokladů je důležité, abychom se pokusili vyjít ze správných otázek:

Čeho matematici dosahují?

Tato otázka ukrývá mnoho problémů, které se pokusím vyslovit v takové podobě, abych tím již nepředjímal povahu odpovědi.

Nebylo by například dobré začít otázkou:

Jak matematici dokazují věty?

Je to zajímavý námět, ale kdybychom jím chtěli začít, znamenalo by to přijmout dva skryté předpoklady, totiž že

(1) existuje objektivní, pevně ustavená a obecně přijatá teorie a praxe matematického důkazu a že

(2) pokrok v matematice spočívá v dokazování vět.

[1]) Viz příspěvek *Jak smířit matematiku s teoretickou fyzikou* v minulém čísle.

Z původního textu *On Proof and Progress in Mathematics*, Bull. Amer. Math. Soc. *30* (1994), 161–178, přeložil Pavel Exner.

Stojí za to tyto hypotézy prozkoumat, raději než je přijmout jako očividné a vycházet z nich jako ze základu. Otázka dokonce není:

Jak matematici dosahují pokroku v matematice?

Dávám přednost explicitnější (a navádějící) formě této otázky:

Jak matematici rozšiřují lidské porozumění matematice?

Tato formulace vynáší do popředí něco základního a všudypřítomného, totiž že obsahem naší činnosti je hledání způsobů, jimiž mohou *lidé* chápat matematiku a přemýšlet o ní.

Rychlý nástup počítačů pomohl toto hledisko zdramatizovat, protože počítače se od lidí velmi liší. Když například Appel a Haken dokončili důkaz věty o čtyřech barvách pomocí rozsáhlých automatických výpočtů, vyvolalo to řadu kontraverzí. Chápu tyto spory nikoli jako projev pochyb, jež by lidé měli o platnosti věty nebo správnosti důkazu. Spíše vyjadřují pokračující touhu po *lidském pochopení* důkazu jako dodatku k informaci o tom, že věta platí.

Vrátíme-li se ke každodennímu životu, stává se obvyklým, že lidé začínají zápolit s počítači, aby spočítali něco, co mohli v menším měřítku zvládnout v ruce. Mohou si nechat vytisknout tabulku prvních 10 000 prvočísel, aby posléze shledali, že potištěné archy nejsou zrovna to, co si přáli. Podobnými zkušenostmi dospívají k poznání, že to, co ve skutečnosti chtějí, není sbírka odpovědí, ale *porozumění.*

Zní to téměř jako tautologie, když řekneme, že matematici dosahují pokroku v lidském chápání matematiky. Nebudu se to pokoušet rozebrat tím, že bych vysvětloval, co je matematika, protože to by nás zavedlo příliš daleko. Matematici obecně cítí, že vědí, co matematika je, ale shledávají obtížným zformulovat dobrou a přímou definici. Je zajímavé se o to pokusit. Pro mne je asi nejblíže pravdě „teorie formálních struktur", ale diskuse tohoto námětu by vyžadovala samostatnou úvahu.

Je možné, že obtíže při formulaci dobré a bezprostřední definice matematiky jsou zásadního charakteru a naznačují, že matematika má v zásadě rekurzivní povahu? Tímto způsobem bychom mohli říci, že matematika je minimální obor splňující následující požadavky:

- Matematika zahrnuje přirozená čísla, rovinnou a prostorovou geometrii.
- Matematika je to, čím se matematikové zabývají.
- Matematici jsou ti lidé, kteří dosahují pokroku v lidském chápání matematiky.

Jinými slovy zahrnujeme matematiku do svého myšlení způsobem odpovídajícím jejímu rozvoji. Jak se naše způsoby uvažování prohlubují, vytváříme nové matematické pojmy a struktury: předmět matematiky se mění a odráží to, jak myslíme.

Spočívá-li naše činnost v nalézání lepších způsobů myšlení, potom podstatnou složkou dobrého modelu matematického pokroku je jeho psychologická a sociologická dimenze. V nejrozšířenějším modelu je nenajdeme. Pokud jej poněkud zkarikujeme, vypadá takto:

Df. matematici vycházejí z několika základních matematických struktur a souboru „daných“ axiomů o těchto strukturách, dále

V. tyto struktury vyvolávají řadu důležitých otázek, jež lze zodpovědět a zformulovat jako formální matematická tvrzení, a konečně

D. úkolem matematiků je hledat deduktivní cestu od axiomů k tvrzením či jejich vyvrácení.

Tento model matematiky lze nazvat definice–věta–důkaz (DfVD).

Zjevná obtíž s modelem DfVD je, že nevysvětluje, odkud se otázky berou. Jaffe a Quinn diskutují roli spekulací (jimž nevhodně říkají „teoretická matematika“) jako důležitého dodatečného prvku. Spekulativní uvažování spočívá ve vyslovování hypotéz, kladení otázek a nalézání inteligentních dohadů a heuristických argumentů, jež mají ukázat, co asi platí.

Ale Jaffeho a Quinnův model DfSVD stále ještě ignoruje některé zásadní problémy. Naším cílem přece není splnit nějaký abstraktní plán výroby definic, vět a důkazů. Měřítkem úspěchu je, zda umožníme *lidem* lépe rozumět matematice a jasněji o ní přemýšlet.

Musíme si tedy položit otázku:

Jak lidé chápou matematiku?

To je obtížný problém. Chápání je vnitřní a individuální záležitost, kterou je obtížné si uvědomovat, porozumět jí a často ji také sdělit. Můžeme se zde toho předmětu dotknout pouze zlehka.

Lidé chápou konkrétní části matematiky značně rozdílnými způsoby. Pro ilustraci je nejlepší vzít příklad, jemuž aktivní matematici rozumějí mnohým způsobem, a o němž víme, že s ním naši studenti zápolí. Dobře se hodí třeba derivace funkce, o níž lze uvažovat:

(1) Infinitezimálně: jako o poměru infinitezimální změny hodnoty funkce k infinitezimální změně argumentu.

(2) Symbolicky: derivace x^n je nx^{n-1}, derivaci $\sin(x)$ odpovídá $\cos(x)$, derivace $f \circ g$ se dostane jako $f' \circ g * g'$ atd.

(3) Logicky: $f'(x) = d$ platí právě tehdy, když ke každému kladnému ε existuje δ takové, že
$$\left|\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d\right| < \varepsilon$$
platí pro $0 < |\Delta x| < \delta$.

(4) Geometricky: derivace je náklon tečné přímky ke grafu funkce, pokud tato existuje.

(5) Jako o okamžité rychlosti změny veličiny $f(t)$, kde t je čas.

(6) Jako o aproximaci: derivace je nejlepší lineární aproximace funkce v daném bodě.

(7) Mikroskopicky: Derivace funkce je limita toho, co uvidíme, budeme-li si její graf prohlížet mikroskopem s větší a větší rozlišovací schopností.

Tento seznam shrnuje různé způsoby, jimiž lze derivaci chápat nebo přemýšlet o ní, spíše než různé její logické definice. Pokud nevynaložíme značné úsilí, abychom zachovali barvu a chuť původních způsobů chápání, rozdíly se začnou vypařovat, jakmile jsou tyto mentální obrazy přeloženy do precizních, formálních a explicitních definic.

Osobně si vzpomínám, jak jsem přijímal každou z uvedených představ jako něco nového a zajímavého a strávil hodně času a mentálního úsilí jejich zažíváním, procvičováním a smiřováním s ostatními. Vzpomínám si rovněž, jak jsem se vracel k těmto představám později s dodatečnými významy a hlubším chápáním.

Seznam může pokračovat; není žádný důvod, proč by se měl zastavit. Můžeme si myslet, že víme o daném předmětu již všechno, a přece nové významy číhají za nejbližším rohem. Navíc co představuje pro jednoho čirý mentální obraz, může na jiného působit zastrašujícím způsobem:

(37) Derivace reálné funkce f v oblasti D je Lagrangeův řez kotečného prostoru $T^*(D)$, jenž dává tvar konexe jednoznačně určené ploché konexi na triviálním **R**-prostoru $D \times \mathbf{R}$, pro niž je graf funkce f paralelní.

Tyto rozdíly neuvádím jen pro zajímavost. Lidské myšlení a chápání nefunguje jednokolejně jako počítač s jediným ústředním procesorem. Zdá se, že naše mozky a mysli se organizují do řady oddělených výkonných agregátů, jež volně spolupracují a komunikují vzájemně spíše na vyšších než na nižších organizačních úrovních.

Zde jsou některé důležité rozdělující faktory, které jsou důležité pro matematické myšlení:

(1) Lidská řeč. Jsme vybaveni výkonným a specializovaným agregátem pro mluvení a rozumění lidské řeči včetně čtení a psaní. Naše lingvistické schopnosti jsou důležitým nástrojem uvažování, nejenom komunikace. Hrubým příkladem je výraz pro kořen kvadratické rovnice, jejž si většina lidí pamatuje jako říkanku „ix je minus bé plus minus odmocnina z bé kvadrát minus čtyři á cé, to celé dělit dvěma á“. Matematická řeč symbolů je úzce vázána na lidské vyjadřovací schopnosti. Elementární matematická „symbolština“ obsahuje v anglické verzi jediné sloveso, totiž „ = “. To je důvod, proč k němu studenti sahají, když potřebují sloveso. Téměř každý, kdo učil v USA základní kurs analýzy, se setkal se studenty píšícími instinktivně $x^3 = 3x^2$ a podobné věci.

(2) Vidění, prostorové vnímání, kinestetický (prostorový) smysl. Lidé mají ohromné schopnosti přijímat informaci vizuálně nebo pohybově a přemýšlet užitím prostorového smyslu. Naproti tomu většina postrádá od přírody daný mechanismus pro inverzní vidění, to jest schopnost překládat vnitřní prostorové chápání zpět do dvourozměrného obrazu. Důsledkem je, že matematici mají většinou méně obrázků, a horších, ve svých článcích a knihách než ve svých hlavách.

    Zajímavým rysem prostorového myšlení je, že velice záleží na měřítku. Lze si představovat malé objekty, s nimiž lze hýbat, struktury lidské velikosti, jež si prohlížíme, či prostorové struktury, které nás obklopují a v nichž se pohybujeme. Máme sklon přemýšlet efektivněji pomocí prostorových obrazů velkého rozměru: vypadá to, jako by naše mozky braly větší předměty vážněji a věnovaly jim více úsilí.

(3) Logika a dedukce. Máme některé od přírody dané způsoby uvažování a kombinování věcí souvisí s tím, jak logicky pracujeme: příčina a následek (související s implikací), kontradikce nebo negace atd.

Matematici zjevně nespoléhají obecně na formální pravidla dedukce, když přemýšlejí. Spíše chovají řádný kus logické struktury důkazu v hlavě a rozbíjejí úvahu do řady průběžných výsledků, aby nemuseli spoléhat na příliš mnoho logiky najednou. Mezi skvělými matematiky je dokonce obvyklé, že neovládají standardní formální použití kvantifikátorů („pro všechna" a „existuje"), ač samozřejmě všichni matematici vykonávají úvahy, jež tyto logické prvky zahrnují.

Je zajímavé, že ačkoli „nebo", „a" a „implikuje" se řídí týmiž formálními pravidly, musíme na první dvě myslet jako na spojky, kdežto na poslední z nich jako na sloveso.

(4) Intuice, asociace, metafora. Lidé mají udivující schopnosti vycítit věci, aniž vědí, odkud pocházejí (intuice), vycítit, že jev, situace nebo objekt se podobá jinému (asociace), jakož i pro tvoření a testování souvislostí a porovnání dvou věcí, jež máme na mysli současně (metaforické myšlení). Tyto schopnosti jsou pro matematiku velmi důležité. Osobně jsem věnoval hodně pozornosti „naslouchání" svým intuicím a asociacím a jejich přetváření v metafory a souvislosti. To vyžaduje jistý druh současného zklidnění a soustředění vlastní mysli. Slova, logika a podrobné obrazy lomozící v sousedství mohou intuici a asociace zaplašit.

(5) Podnět–odpověď. Tato schopnost se zdůrazňuje ve škole; vidíte-li například $3927 \times \times 253$, napíšete jedno číslo nad druhé, podtrhnete atd. V matematickém výzkumu je to také důležité: vidíte-li diagram uzlu, můžete zapsat fundamentální grupu jeho doplňku pomocí algoritmu, který je pocitově podobný algoritmu násobení.

(6) Procesy a čas. V matematickém uvažování se často uplatňuje naše schopnost myslet v termínech procesů či posloupností jevů. Jeden způsob, jak si představit funkci, je akce, proces měnící definiční obor v obor hodnot. To je zvláště užitečné u složených funkcí. Jiné uplatnění nachází tato schopnost v pamatování si důkazů: lidé si důkaz často ukládají do hlavy jako proces sestávající z několika kroků. V topologii na pojem homotopie myslíme nejčastěji jako na proces trvající určitý čas. Matematicky se čas nijak neliší od dodatečné prostorové proměnné, ale protože lidské bytosti s ním interagují zcela jiným způsobem, psychologicky je to velký rozdíl.

Jak lze matematické chápání zprostředkovat?

Přenos porozumění mezi dvojicí osob není zdaleka automatický, ale složitý a plný nástrah. Při rozboru lidského chápání matematiky je proto důležité, **kdo** rozumí **čemu** a **kdy.**

Matematici si vypracovali komunikační návyky, jež jsou často dysfunkční. Organizátoři konferencí kdekoli naléhají na řečníky, aby se snažili vysvětlit věci elementárními prostředky. Většina posluchačů na průměrné konferenci z toho má však málo. Možná přestanou chápat během prvních pěti minut, a přece sedí tiše po zbývajících pětapadesát. Nebo se jejich zájem rychle vypaří, protože se řečník noří do technických detailů, aniž by ztratil slovo o tom, proč je nutné se jimi zabývat. Na konci přednášky se těch několik málo posluchačů, kteří jsou nejblíže oboru přednášejícího, na něco zeptá, aby zahnali dojem trapnosti.

Podobá se to tomu, co často vidíme v posluchárnách, kde si vysluhujeme čárku tím, že odříkáváme, o čem jsme přesvědčeni, že by studenti „měli vědět", zatímco oni zápolí s podstatnějšími problémy, jak porozumět našemu jazyku a našim myšlenkovým konstrukcím. Knihy poskytují kompenzaci v podobě návodu k řešení každého typu domácích cvičení. Profesoři poskytují kompenzaci tím, že zadávají domácí cvičení a písemné testy mnohem lehčí, než je materiál obsažený v sylabu přednášky, a potom je známkují, užívajíce stupnice nevyžadující příliš porozumění. Máme za to, že problém je spíš ve studentech než ve vzájemné komunikaci; že na to buď nemají, nebo je jim to fuk.

Nezasvěcený pozorovatel při pohledu na takovéto jevy žasne, ale v matematické obci nad nimi jen krčíme rameny.

Většina těchto potíží má co do činění s matematickým jazykem a kulturou a jejich dělením na různé podobory. Základní pojmy užívané každodenně v jedné disciplíně jsou často neznámé v jiném oboru. Matematici ztrácejí chuť chápat základy vyjadřování třeba i v sousedních disciplínách, nejsou-li k tomu nuceni třeba jako doktorandi.

V kontrastu s tím komunikace uvnitř užšího matematického oboru funguje většinou dobře. Lidé v takové skupině si vypracovávají společnou zásobu znalostí a technik. Prostřednictvím neformálních kontaktů se učí rozumět způsobům myšlení jiných a napodobovat je, což umožňuje jasné a snadné vyjadřování myšlenek.

Matematické znalosti se v užším oboru šíří překvapivou rychlostí. Je-li dokázána význačná věta, stává se často (ač ne vždy), že dva příslušníci oboru si řešení dokáží sdělit během několika minut. Týž důkaz může být s pochopením sdělen většímu počtu specialistů v hodinové přednášce. Nebo může být námětem patnácti či dvacetistránkového článku, jejž si ti, kteří v oboru pracují, dokážou přečíst a porozumět mu během hodin nebo dní.

Proč se časové škály od neformální diskuse po sdělení prostřednictvím publikované práce tolik liší? V osobní debatě lidé používají řady komunikačních prostředků daleko přesahujících formální matematický jazyk. Svou roli hrají gesta, obrázky a diagramy, zvuk hlasu i pohyby těla. Komunikace je nejčastěji oboustranná, takže se účastníci mohou soustředit na to, co vyžaduje největší pozornost. Tato mnohost prostředků usnadňuje sdělit, oč jde, nejenom logicky a lingvisticky, ale také pomocí dalších mentálních nástrojů.

V přednáškách jsou lidé zdrženlivější a formálnější. Matematické posluchačstvo často nedokáže vyslovit nahlas otázku, již mají všichni na mysli, a řečníci mívají zafixováno předem vytvořené schéma, jež jim brání objasnit problém i tehdy, byla-li otázka položena.

V publikovaných pracích jsou lidé ještě formálnější. Píšící autor překládá své myšlenky do symbolů a logiky a čtenář se pokouší přeložit je zpět.

Proč je taková diskrepance mezi komunikací uvnitř oboru a mezi jednotlivými obory, nemluvě už o výměně informace s oblastmi mimo matematiku?

Matematika je v jistém smyslu obecná řeč: jazyk symbolů, technických definic, výpočtů a logiky. Jeho prostřednictvím lze účinně sdělovat některé způsoby matematického myšlení, ale ne všechny. Matematici se učí překládat jisté věci téměř podvědomě z jednoho mentálního módu do jiného, takže se některá tvrzení stávají rychle zjevnými. Různí matematici studují publikace různým způsobem, ale když já čtu matematickou práci v oboru, v němž jsem zběhlý, soustřeďuji se na to, co je mezi řádky. Podívám se třeba na několik odstavců či řádek rovnic a pomyslím si: „No jo, ti nadělají cirátů, aby prezentovali tenaten nápad.“ Jakmile je myšlenka jasná, její formální vyjádření je často redundantní a postradatelné — často mám pocit, že by mi dalo méně práce napsat to sám než slabikovat to po autorech. Je to jako nový opékač topinek, k němuž jste dostali šestnáctistránkový návod k použití. Pokud již víte, jak takové zařízení funguje, a opékač vypadá stejně jako všechny, s nimiž jste měli co do činění, nejspíš jej prostě zapnete a podíváte se, zda funguje, než byste se pouštěli do podrobné četby návodu.

Lidé zběhlí v metodách oboru dokáží rozpoznat různé vzorce tvrzení nebo formulí jako idiomy nebo opisy jistých pojmů či mentálních představ. Ale chybí-li zběhlost, tytéž vzorce mnoho nepomohou a občas mohou svést z cesty. Jazyk žije jen v ústech těch, kdo se jím dorozumívají.

Na tomto místě bych rád učinil důležitou poznámku: někteří matematici se vyznají ve způsobech uvažování více než jednoho oboru, někdy i většího počtu. Někdo zvládne různé druhy žargonu ve svém doktorandském věku, jiný má jednoduše talent na přijímání cizích matematických jazyků a kultur a někteří lidé působí v matematických centrech, kde jsou různým disciplínám prostě vystaveni. Ti, kteří se cítí doma ve více oborech, mají často pozitivní vliv, když vytvářejí mosty a pomáhají různým skupinám matematiků učit se navzájem. Ale znalci mnoha oborů mohou působit také negativně tím, že lidi odrazují a pomáhají potvrzovat a udržovat celý systém obecně špatné komunikace. Vídáme například často na konferenčních přednáškách, že jeden či dva znalí lidé sedící v první řadě slouží řečníkovi jako mentální spojovací článek s publikem.

Velký rozdíl mezi tím, jak o matematice přemýšlíme a píšeme, má i jiné důsledky. Skupina vzájemně interagujících matematiků dokáže udržet po celá léta soubor myšlenek jako živoucí systém, i když se zaznamenaná verze jejich matematické práce liší od jejich skutečného uvažování mnohem větším důrazem na jazyk, symboly, logiku a formalismus. Ale když nové houfce matematiků zvládají tento předmět, mají tendenci chápat to, co čtou a slyší, doslovněji, takže zaznamenaný a sdělovaný formalismus a technika nabývají postupně převahy nad jinými způsoby myšlení.

Proti tomuto trendu působí dvojice faktorů, jež zabraňují matematice utonout v bažinách formalismu. Za prvé, mladší generace matematiků neustále objevují a znovuobjevují své vlastní způsoby chápání, čímž dávají své vědě nové injekce různých typů lidského myšlení.

Za druhé, matematikům se někdy daří vymýšlet jména a jednotící definice, jež nahrazují technický žargon a povzbuzují představivost. Jména jako „grupa“ místo „množina transformací splňujících…“, nebo „varieta“ nahrazující následující popis:

Obecně nedokážeme najít systém souřadnic, jež by parametrizovaly současně všechna řešení našich rovnic, ale v okolí kteréhokoli speciálního řešení lze zavést souřadnice

$$\big(f_1(u_1,u_2,u_3),\ f_2(u_1,u_2,u_3),\ f_3(u_1,u_2,u_3),\ f_4(u_1,u_2,u_3),\ f_5(u_1,u_2,u_3)\big),$$

přičemž alespoň jeden z deseti determinantů

… [deset 3×3-determinantů matic parciálních derivací] …

je nenulový,

mohou či nemusejí znamenat hlubší úroveň chápání mezi experty, v každém případě však značně usnadňují *sdělování* dosaženého porozumění.

My matematici bychom měli věnovat mnohem větší úsilí sdělování matematických *myšlenek*. To vyžaduje všímat si nejenom našich definic, vět a důkazů, ale hlavně způsobů, jimiž informujeme o svém uvažování. Potřebujeme docenit hodnotu různých typů přemýšlení o téže matematické struktuře.

Potřebujeme věnovat mnohem více energie porozumění základní mentální infrastruktuře matematiky a jejímu objasňování — nějaký čas věnovaný těm nejsoučasnějším výsledkům se dá ušetřit. To zahrnuje rozvíjení matematického jazyka, jenž je efektivní, pokud jde o sdělování myšlenek lidem, kteří o nich zatím nic nevědí.

Část této komunikace se odehrává prostřednictvím důkazů.

Co je to důkaz?

Když jsem byl v prvním ročníku na univerzitě v Berkeley, nedovedl jsem si představit, jak bych mohl „dokázat“ novou a zajímavou matematickou větu. Ve skutečnosti jsem nerozuměl, co to „důkaz“ vlastně je.

Chodil jsem na semináře, četl jsem články, mluvil jsem se spolužáky a pomalu mi začínalo svítat. V každém oboru jsou jisté věty a techniky, které jsou obecně známy a akceptovány. Píšete-li článek, odkazujete se na ně bez důkazu. Prohlédnete si jiné články v oboru a zjistíte, které skutečnosti není třeba dokazovat a co se uvádí v seznamu literatury. Od kolegů získáte nějakou představu o důkazech. Potom můžete užívat stejných vět a citovat tutéž literaturu. Není nutné, abyste přečetli články a knihy, jež jste zahrnuli do bibliografie, od a až do zet. Pro mnohé z obecně známých věcí se dokonce ani nedá najít psaný zdroj. Jsou-li lidé pracující v oboru spokojeni s tím, jak daná myšlenka funguje, formální odkaz se nevyžaduje.

Tento proces ve mně nejprve budil silná podezření. Pochyboval jsem o tom, zda jisté ideje jsou skutečně podložené. Ale zjistil jsem se, že se mohu zeptat lidí, kteří mi buď poskytnou vysvětlení a důkazy nebo mě odkážou na poučení u jiných lidi či v psaných zdrojích. Existovaly publikované věty, o nichž se obecně vědělo, že neplatí, nebo že důkaz obsahuje mezeru. Matematické znalosti a porozumění byly obsaženy v myslích a sociální struktuře společenství lidí, kteří o daném předmětu přemýšleli. Znalosti se opíraly o psané dokumenty; ty však nebyly ve skutečnosti primární.

Myslím, že toto schéma se obor od oboru může značně lišit. Zajímal jsem se o geometrické oblasti matematiky, kde je často vskutku těžké najít dokument, který by odrážel schůdně způsoby, jimiž lidé myslí. V algebraičtějších nebo symboličtějších oborech tomu tak být nemusí a mám dojem, že v některých oblastech jsou psané projevy mnohem blíže tomu, co se v oboru děje. Ale každá disciplína má silné společenské normy platnosti a pravdivosti. Dobrou ilustrací toho tvrzení v silně algebraickém oboru je důkaz velké Fermatovy věty navržený Andrewem Wilesem. Odborníci rychle uvěřili na základě vložených fundamentálních myšlenek, že důkaz je v zásadě správný, dlouho před tím, než bylo možné prověřit podrobnosti. Ve srovnání s většinou matematických důkazů se Wilesovým argumentům ještě dostane mnohého zkoumání a prověřování; bez ohledu na to, jak se tato procedura bude odvíjet, máme tu dobrou ilustraci rozvoje matematiky jako procesu organicky zahrnujícího psychologickou a sociální složku.

Když se lidé zabývají matematikou, tok myšlenek a společenská kritéria platnosti jsou mnohem spolehlivější než formální dokumenty. Lidem se zpravidla nepříliš daří prověřovat *formální správnost* důkazů; zato dokážou s jistotou odhalit jejich možné slabiny a vady.

Abych se vyhnul nedorozumění, chci zdůraznit dvě věci, které *netvrdím*. Za prvé, *neprosazuji* zmírnění norem, jež v našem společenství platí pro důkazy. Snažím se jen popsat, jak tento proces ve skutečnosti funguje. Není sporu o důležitosti pečlivého důkazu, který obstojí v každé prověrce; soudím, že to je ve společenství obecně akceptováno. Pokud o něco usiluji, pak o to, aby matematici věnovali svým důkazům více pozornosti, aby výsledek byl skutečně jasný a co nejjednodušší a jakákoli slabina se dala snadno najít. Za druhé, *nekritizuji* matematické studium formálních důkazů ani lidi, věnující úsilí hledání explicitnějších a formálnějších forem matematických argumentů. V obou případech jde o užitečnou aktivitu, jež může vést k novým náhledům na matematiku.

Během některých období své kariéry jsem věnoval hodně úsilí vyšetřování matematických problémů pomocí počítače. Maje tuto zkušenost, byl jsem velmi překvapen tvrzením Jaffeho a Quinna, že matematika je pomalá a svízelná a že o ní lze s úspěchem tvrdit, že je nejdisciplinovanější z lidských intelektuálních aktivit. Normy správnosti a úplnosti, jejichž splnění je nezbytné pro to, aby počítačový program začal vůbec pracovat, jsou o několik řádů přísnější než požadavky matematické obce na platné důkazy. Zdá se nicméně, že jakkoli jsou velké programy pečlivě napsány a otestovány, vždy mají nějaké mouchy.

Myslím si, že matematika je jedním z oborů přinášejících největší intelektuální uspokojení. Díky přísným požadavkům na jasné a přesvědčivé myšlení, jakož i tomu, že si ceníme umění naslouchat a snahy o vzájemné pochopení, nejsme sužováni bezvýchodnými hádkami a pokusy o nekonečné předělávání naší matematiky. Jsme připraveni nechat se přesvědčit ostatními. Matematika se intelektuálně vyvíjí velmi rychle. Celé kapitoly matematického zeměpisu se mění zas a znovu překvapujícími způsoby během jediné profesionální kariéry.

Vezmeme-li v úvahu, jak těžké je napsat počítačový program, jenž by se svým intelektuálním obsahem alespoň přiblížil dobrému matematickému článku, a o kolik víc času a sil stojí přivést jej do formálně „téměř" správného stavu, je bláznovstvím tvrdit, že matematika, jak ji provozujeme, se byť i jen blíží formální správnosti.

Matematika v našem obvyklém podání je formálně mnohem úplnější a přesnější než jiné vědy, ale zaostává v těchto ohledech za počítačovými programy. Rozdíl není jen v množství vynaloženého úsilí; jde o kvalitativně odlišné jevy. Velké počítačové programy vyžadují obrovskou péči o nespočetné otázky kompatibility: ověřit, že všechny definice jsou konzistentní, vymyslet „dobrou" strukturu dat, jež by byla funkční a nikoli k nepřehlednosti obecná, rozhodnout, jaký je „správný" stupeň obecnosti užitých funkcí atd. Podíl energie věnované vymýšlení základního schématu velkého programu je překvapivě malý. Naproti tomu otázky kompatibility mají tendenci se vymykat kontrole, protože „správné" definice se mění, jakmile měníme úroveň obecnosti a přidáváme další funkce; proto musí být počítačové programy co chvíli přepisovány, často od samého počátku.

Abychom učinili matematiku formálně správnou a úplnou, museli bychom vykonat velmi podobnou práci. Nejde o to, že by formální správnost byla k nezvládnutí obtížná v malém měřítku — problém je spíše v tom, že existuje mnoho způsobů, jak zvolit „malou" formalizaci, jež ve větším měřítku nejsou nezávislé. Zajistit kompatibilitu zvolených možností je velmi těžké; mimo jiné by to zahrnovalo návraty na začátek a přepisování všech starých matematických článků, na jejichž výsledcích jsme závislí. Je rovněž velmi těžké vybrat dobré technické prostředky pro formální definice, které by se hodily pro spoustu různých způsobů, jimiž se matematikům zamane jich užívat, a jež by předjímaly budoucí rozvoj matematiky. Pokud bychom chtěli pokračovat ve spolupráci, trávili bychom většinu času v mezinárodních normotvorných komisích, jež by stanovovaly obecně platné definice a řešily vzniklé kontraverze.

Matematici jsou schopni zaplňovat mezery, opravovat důkazy, vypracovávat podrobnosti a jemnější techniku a také tak činí, je-li to nutné či mají-li odpovídající motivaci. Náš systém je fungujícím zdrojem spolehlivých tvrzení, jež lze solidně podložit. Spolehlivost však nevychází primárně z toho, že by matematici formálně prověřovali formální argumenty, nýbrž že uvažují pečlivě a kriticky o matematických myšlenkách.

Na zcela fundamentální úrovni jsou základy matematiky labilnější, než je matematika, jíž se běžně zabýváme. Většina z nás se přidržuje základních principů, které lze zdvořile označit za fikce. Je tu kupříkladu věta o tom, že neexistuje žádný způsob, jak zkonstruovat nebo i jen definovat dobré uspořádání reálných čísel. Lze doložit (ač ne dokázat), že na těchto fikcích můžeme stavět, aniž bychom byli chyceni při činu; to je však nečiní platnými. Množinoví teoretici konstruují mnohé alternativní a vzájemně si protiřečící „matematické vesmíry" takové, že konzistence jednoho je slučitelná s konzistencí ostatních. To nás stěží může utvrdit ve víře, že ten který z nich představuje správnou nebo přirozenou volbu. Gödelova věta o neúplnosti implikuje, že neexistuje formální systém, jenž by byl konzistentní a současně natolik obecný, aby jej bylo možno využít jako základu pro veškerou matematiku, jíž se zabýváme.

Počítače jsou na rozdíl od člověka stavěny na vykonávání formálních procesů. Existují lidé, kteří tvrdě pracují na projektu formalizování částí matematiky pomocí počítače se skutečně formálně správnými formálními dedukcemi. Považuji to za veliký a velmi potřebný úkol a věřím, že se odtud mnohému naučíme. Výsledky napomohou zjednodušit a projasnit matematiku. Očekávám, že za pouhých několik let bychom mohli mít interaktivní počítačové programy umožňující zkompilovat větší celky formálně úplných a správných matematických úvah (založených na několika možná napadnutelných, ale přinejmenším explicitně vyjádřených předpokladech) a že se stanou součástí standardního matematického pracovního prostředí.

Měli bychom si být ovšem vědomi toho, že lidsky pochopitelné a člověkem prověřitelné důkazy, které produkujeme, jsou nejdůležitější a že se od formálních důkazů značně liší. V této chvíli jsou formální důkazy nedosažitelné a z větší části irelevantní; máme vhodné lidské prostředky pro prověřování platnosti matematických tvrzení.

Proč se lidé zabývají matematikou?

Zabývat se matematikou je skutečné potěšení spočívající v nacházení způsobů myšlení, jež vysvětlují, organizují a zjednodušují. Můžete pocítit tuto radost, když objevujete novou matematiku, znovuobjevujete starou, učíte se od někoho či z textu novému způsobu myšlení, nebo když najdete novou možnost vysvětlení či chápání známé matematické struktury.

Tato vnitřní motivace by mohla vést k závěru, že se zabýváme matematikou čistě pro ni samotnou. To ale není pravda; společenské prostředí je mimořádně důležité. Necháváme se ostatními inspirovat, usilujeme o to, aby nás ocenili, a rádi pomáháme kolegům řešit jejich matematické problémy. Reakce okolí ovlivňuje, co nám činí radost. Společenská interakce je zprostředkována osobními setkáními a také prostřednictvím psané a elektronické korespondence, preprintů a časopiseckých článků. Jedním důsledkem této vysoce zespolečenštěné organizace matematiky je tendence následovat módní vlny. Z hlediska hledání nových matematických vět to zřejmě není příliš efektivní; bylo by lepší, kdyby matematici pokrývali celou intelektuální šířku oboru rovnoměrněji. Ale většina z nich nemá ráda osamění a dělá jim potíže nadchnout se předmětem, i když v něm osobně dosahují pokroku, pokud nenajdou kolegy, kteří by sdíleli jejich nadšení.

Vedle našich vnitřních důvodů a neformální společenské motivace pro zabývání se matematikou jsme poháněni úvahami ekonomickými a prestižními. Matematici podobně jako jiní vědci často hodnotí a jsou hodnoceni. Počínaje promocí a vědeckými hodnostmi přes doporučující dopisy, rozhodnutí o přijetí či o povýšení, recenzentské posudky, pozvání k přednáškám, ceny, ... ; neustále se zúčastňujeme bodování v systému, který je tvrdě soutěživý.

Jaffe a Quinn analyzují motivaci pro zabývání se matematikou založenou na obecné měně, v niž mnoho matematiků věří, totiž přisouzení zásluh za věty.

Myslím si, že silný důraz, jejž naše obec klade na tyto zásluhy, má záporný vliv na pokrok matematiky. Je-li naším hlavním výdobytkem pokrok v lidském chápání matematiky, měli bychom uznávat a cenit mnohem širší škálu aktivit. Lidé, kteří umějí dokazovat věty, tak nečiní sami pro sebe, ale v kontextu celé matematické obce. Sklízejí tak plody úsilí o porozumění zaseté jinými matematiky. Jakmile je věta dokázána, obec potřebuje společenskou infrastrukturu, aby se myšlenky dostaly k lidem, kteří jich mohou dále užívat — tištěné slovo samo o sobě je příliš pochybný a nepraktický prostředek.

I když akceptujeme zúžené hledisko, že cílem naší práce je dokazování vět, týmová práce je důležitá. Můžeme užít přirovnání k zápasu v kopané, během nějž mohou branku vstřelit jeden či dva hráči; to však neznamená, že ostatní byli na hřišti nadarmo. Neposuzujeme hráče podle jejich osobních výsledků; záleží nám na výsledku celého družstva.

V matematice se často stává, že skupina lidí rozvíjí určitý soubor myšlenek. Etapami tohoto pokroku jsou věty, jež téměř nevyhnutelně dokáže ten nebo onen z nich. Někdy dokonce skupina dokáže předjímat, jak tyto věty budou vypadat. Je mnohem těžší předpovědět, komu se důkaz podaří, ač zpravidla existují „dobří střelci“, u nichž je pravděpodobnější, že budou „skórovat.“ Jejich úspěch je ale výsledkem kolektivního úsilí celého týmu.[2]) Ten má navíc další funkci, totiž absorbovat dokázané věty a využít jich. I kdyby jediný člověk dokázal samostatně dokázat veškeré věty tvořící milníky dané cesty, přišly by nazmar, kdyby se o nich nikdo jiný nedověděl.

Se „střelecky úspěšnými“ lidmi je spojen i další zajímavý jev. Pravidelně se stává, že některý z řadových členů družstva dokáže větu, jejímuž významu se dostane širokého uznání. Jeho status ve společenství — místo v nepsané hierarchii — se tím okamžitě a dramaticky mění. Dojde-li k tomu, takový člověk se stane produktivnějším jako zdroj myšlenek a vět. Proč je tomu tak? Jednak to znamená zvýšenou sebeúctu a z ní plynoucí vyšší produktivitu. Za druhé, s růstem renomé se lidé dostávají blíže ke středu v pavučině vzájemně propojených myšlenek — ostatní je berou vážněji. A konečně, což je možná nejdůležitější, průlom v matematice obvykle představuje nový způsob myšlení, který se hodí i v jiných situacích.

Tento jev mě utvrzuje v přesvědčení, že celá matematická obec by se stala produktivnější, kdybychom si jasně uvědomili pravou hodnotu toho, co děláme. Jaffe a Quinn navrhují systém uznávající dělbu práce mezi „spekulativní uvažování“ a „dokazování“. To by jenom prodloužilo život mýtu o tom, že mírou našeho pokroku je množství dokázaných standardních vět. To připomíná omyl člověka, který si nechal vytisknout prvních 10 000 prvočísel. Výsledkem našeho úsilí je lidské porozumění. Máme mnohé způsoby chápání a mnohé cesty, jimiž lze k němu přispívat. Budeme spokojenější, produktivnější a šťastnější, pokud tuto skutečnost uznáme a budeme z ní vycházet.

---

[2]) *Poznámka překladatele:* V této souvislosti si nelze nevzpomenout na historku o Marku Grigorjeviči Kreinovi burácejícím po chodbách oděsské univerzity: „Já jsem přece zakázal přemýšlet na toto téma! Tuto větu jsem si k důkazu vyhradil sám!“

Něco osobních zkušeností

Protože tato úvaha vznikla jako reakce na rozpor mezi mou osobní zkušeností a způsobem, jímž stejné věci popsali Jaffe a Quinn, rozeberu tu dva příklady zahrnující i situaci, jíž se jen letmo dotkli.

Necítím se přitom příliš dobře, protože v mé kariéře existují věci, jichž lituji; kdybych mohl totéž dělat totéž znovu vyzbrojen svým současným chápáním matematiky i sebe sama, asi bych toho spoustu dělal jinak. Doufám, že popíšu-li své zkušenosti zcela otevřeně, jak si je pamatuji a rozumím jim, mohu ostatním pomoci pochopit tyto procesy lépe a dopředu se poučit.

Nejprve se zmíním stručně o teorii foliací, což bylo téma, s nímž jsem jako student začínal (není podstatné, zda víte, co to foliace jsou).

V té době byly foliace středem pozornosti mezi geometrickými topology a lidmi zabývajícími se dynamickými systémy a diferenciální geometrií. Docela rychle se mi podařilo dokázat některé věty dramatického významu. Dokázal jsem větu o klasifikaci foliací a našel nutnou a postačující podmínku, za níž varieta připouští foliaci. Dokázal jsem i další významné věty. Napsal jsem práce, jež si vydobyly uznání, a publikoval jsem přinejmenším ty nejvýznamnější věty. Stěží jsem stíhal sepsat, co jsem byl schopen dokázat, takže brzy jsem měl manko.

Pak došlo k zajímavému jevu. Během několika let nastal hromadný úprk od těchto problémů. Slyšel jsem od řady matematiků, že buď udílejí nebo dostávají radu nepouštět se do foliací — říkalo se, že tam Thurston koná úklid. Lidé mi říkali (jako poklonu, nikoli stížnost), že jsem ten obor zabil. Doktorandi přestali foliace studovat a brzy i já sám jsem se obrátil k jiným tématům.

Nemyslím si, že k úprku došlo, protože námět by byl intelektuálně vyčerpán — byly (a stále ještě jsou) mnohé zajímavé otázky, jež by se daly řešit. Od těch dob se objevily zajímavé výsledky získané těmi několika lidmi, kteří v oboru zůstali nebo do něj přišli později, a také významné objevy v sousedních oborech, o nichž si myslím, že by se rozvíjely rychleji, kdyby se matematici věnovali foliacím s větší energií.

Myslím, že dnes je jen málo těch, kteří rozumějí foliacím aspoň přibližně tak jako v dřívější době, ačkoli některé části této teorie, včetně novějších výsledků, stále ještě vzkvétají.

Věřím, že útlum oboru je mnohem spíše důsledkem dvou ekologických jevů než jakéhokoli vyčerpání intelektuálních zdrojů.

Za prvé, výsledky, jež jsem dokázal (jakož i důležité výsledky jiných), byly zaznamenány v odstrašujícím matematickém stylu. Předpokládaly čtenářskou obec sdílející jisté základy a jisté způsoby chápání. Teorie foliací byla mladý obor plný oportunismu, jehož výchozí pojmy nebyly standardizovány. Neváhal jsem použít jakékoli matematické metody, kterou jsem se naučil od ostatních. Články, jež jsem napsal, nevěnovaly příliš pozornosti kulturnímu pozadí, ani nemohly. Dokládaly úvahy a závěry vysoké úrovně, k nimž jsem dospěl vynaložením značného úsilí a mnohých úvah. Občas jsem se snažil tvrzení ozřejmit předhozením kryptického intelektuálního pamlsku jako například „Godbillonův–Veyův invariant je mírou helikoidní rozkolísanosti foliace“; taková místa zůstala většině čtenářů záhadou. To vytvořilo vysokou vstupní bariéru; myslím, že mnozí doktorandi i starší matematici se nechali odradit obtížemi při pokusech pochopit důkazy klíčových vět.

Druhý problém se týká toho, co přitom mohli lidé v daném úzkém oboru získat. Když jsem se začal foliacemi zabývat, měl jsem představu, že chtějí znát odpovědi. Myslel jsem, že si přejí mít dokázán soubor hlubokých vět, jež by mohli aplikovat při hledání odpovědí na další matematické otázky. Ale to byla jen část pravdy. Víc než o tuto znalost usilovali o to, aby se jim osobně podařilo problém pochopit. A protože žijeme v systému založeném na zásluhách, chtěli a také potřebovali uznání za věty, které by sami dokázali.

Přeskočím několik let, abych se dostal k předmětu, který Jaffe a Quinn připomněli, totiž k době, kdy jsem začal studovat třírozměrné variety a jejich vztahy k hyperbolické geometrii. (Opět málo záleží na tom, zda víte, o čem je řeč.) Během let jsem si postupně vytvořil jistou intuici pro hyperbolické 3-variety spolu s repertoárem konstrukcí, příkladů a důkazů. (Tento proces ve skutečnosti začal, ještě když jsem studoval, a výrazně k němu přispěly aplikace v teorii foliací.) Po nějaké době mé spekulace dospěly k představě, že všechny 3-variety mají jistou geometrickou strukturu; tento závěr vešel nakonec ve známost pod jménem geometrizační hypotéza. Asi o dva či tři roky později jsem dokázal geometrizační větu pro Hakenovy variety. Byla to těžká věta a úvahám o ní jsem věnoval spoustu námahy. Když jsem důkaz završil, věnoval jsem ještě více úsilí jeho prověrce, hledal jsem možné obtíže a testoval jsem jej nezávislými metodami.

Chtěl bych říci jasně, co myslím tím, když říkám, že jsem větu dokázal. Mám na mysli, že jsem dospěl k jasnému a úplnému řetězci myšlenek zahrnujícímu veškeré podrobnosti, který přestál početné prověrky, jež jsem vykonal já i jiní. Matematici mají různé myšlenkové styly. Já se vyhýbám vyslovování širokých všezahrnujících tvrzení, jež lze chápat jen jako náznak nebo inspiraci; vytvářím si jasné mentální modely, pomocí nichž věci promýšlím. Mé důkazy se ukázaly jako zcela spolehlivé; nikdy jsem neměl problém s odvoláváním vysloveného tvrzení nebo doplňováním důkazů podrobnostmi. Mám oko na chyby ve vlastních úvahách stejně tak jako v úvahách ostatních.

Přeložit to, co je zakódováno v mém myšlení, do tvaru sdělitelného někomu jinému, ovšem někdy vyžaduje obrovské zvětšení objemu. Má matematická výchova byla poněkud nezávislá a neopakovatelná, když jsem se po řadu let učil samostatně a vymýšlel si vlastní mentální modely pro matematické objekty. Často to pro mne byla výhoda, protože je později snadné přejmout standardní model, jejž sdílí určitá skupina matematiků; některé představy, jichž běžně užívám já, jsou většině matematiků, s nimiž komunikuji, cizí. Moje osobní mentální modely jsou sice podobného charakteru, jaké matematické kolektivy sdílejí, ale přece jsou často jiné. Mé chápání hyperbolické geometrie v době formulace geometrizační hypotézy představuje dobrý příklad. Lze pokračovat náhodně vybraným příkladem, jímž je chápání konečných topologických prostorů. Je to výstřední záležitost, jež může objasnit řadu otázek, ale obecně vzato se tomu lze v každém jednotlivém případě vyhnout standardními postupy.

Ani geometrizační hypotéza ani její důkaz pro Hakenovy variety se v době svého vzniku nenacházely v místech, kam se upírala pozornost matematiků — šly proti duchu rozvoje topologie v předchozích třiceti letech a většina lidí byla jimi překvapena. Pro většinu topologů té doby byla hyperbolická geometrie kabalistickým vedlejším odvětvím, ač existovaly jiné skupiny, například diferenciální geometři, kteří jí z určitých hledisek rozuměli. Topologům trvalo chvíli, než pochopili, co geometrizační hypotéza znamená, k čemu je dobrá a proč má smysl.

V téže době jsem začal připravovat text o geometrii a topologii 3-variet, částečně v souvislosti s postgraduální přednáškou, již jsem konal. Rozeslal jsem jej několika lidem a zanedlouho si mi mnozí jiní z celého světa začali psát o exemplář. Zásilky se opakovaly každých několik měsíců; seznam zájemců vyrostl na 1200 lidí. V těchto skriptech jsem se pokoušel sdělit své skutečné myšlenky. Někteří na jejich základě organizovali semináře, což mi vytvořilo vítanou zpětnou vazbu. Převážně to vypadalo nějak jako: „Vaše skripta jsou krásná a inspirativní, ale musím Vám říci, že jsem strávil tři týdny, než jsem se probral podrobnostmi paragrafu $x.y$. Podrobnější výklad bych považoval za velice užitečný.“

Měl jsem také řadu přednášek v různých matematických společenstvích o myšlenkách souvisejících se zkoumáním 3-variet geometrickými metodami a o důkazu geometrizační hypotézy pro Hakenovy variety. Zpočátku nebyl tento předmět znám téměř nikomu. Bylo obtížné docílit komunikace s publikem — struktura tvrzení a argumentů obsažená v mé hlavě byla posluchačům cizí. Tento myšlenkový propletenec se opíral o několik matematických teorií: topologii 3-variet, kleinovské grupy, dynamické systémy, geometrickou topologii, diskrétní podgrupy Lieových grup, foliace, Teichmülerovy prostory, pseudo-Anosovovy difeomorfismy, geometrickou teorii grup, jakož i hyperbolickou geometrii.

V roce 1980 jsme zorganizovali letní workshop Americké matematické společnosti v Bowdoinu, na nějž přijelo mnoho lidí zabývajících se různými problémy v topologii nízkých dimenzí, dynamických systémech a kleinovských grupách.

Byla to zajímavá zkušenost ohledně kulturní výměny a dramatická ilustrace toho, nakolik důkazy závisí na posluchačstvu. Dokazujeme tvrzení v určitém společenském kontextu a adresujeme je jistému okruhu lidí. Některé části tohoto důkazu mohu topologům sdělit během dvou minut, zatímco lidé činní v analýze by potřebovali hodinovou přednášku, než začnou rozumět. Podobně jsou tam věci, na něž „analytikům“ stačí dvě minuty a topologové mají zapotřebí celou hodinu. A jsou jiné části důkazu, jejichž schéma lze popsat ve dvou minutách, ale na něž ani jedna z těchto skupin není mentálně připravena, aby je zvládla v čase kratším než hodina.

V té době neexistoval kontext, do nějž by bylo možno zasadit větu jako celek, takže rozdíl mezi tím, jak byla idea zaznamenána v mé hlavě a jak jsem ji musel vysvětlovat, byl dramatický, nemluvě už o množství energie, již museli vynaložit posluchači, aby mi porozuměli.

V reakci na svou zkušenost s foliacemi a na společenské tlaky jsem ve svých psaných i mluvených vystoupeních soustředil pozornost na celkovou strukturu; podrobnosti jsem vysvětlil těm několika lidem, kteří byli dostatečně daleko, aby je pochopili. Napsal jsem několik článků, v nichž jsem vyložil podstatné části důkazu geometrizační hypotézy pro Hakenovy variety — nevyvolaly téměř žádnou odezvu. Podobně se s několika výjimkami lidé začali hlubšími a těžšími partiemi mých dřívějších skript probírat až mnohem později.

Výsledkem bylo, že dnes má větší počet matematiků to, co na počátku chybělo: rozumějí pojmům a mentální struktuře, v nichž se tento předmět přirozeně vyjadřuje. Trvale zde kypí bohatá matematická činnost. Tím, že jsem se soustředil na strukturu, formulaci definic a myšlenkové postupy, ale nespěchal jsem s vyslovením a zveřejněním důkazů všech „vět“, jež jsem uměl dokázat, jsem ponechal prostor pro mnoho jiných, aby si vydobyli zásluhy. Lidé tak mohli objevit a publikovat další důkazy geometrizační věty, které pomohly vyvinout nové pojmy, jež jsou zajímavé samy o sobě a znamenají nové obohacení matematiky.

To, co ode mne kolegové chtěli a žádali, nebylo naučit se můj důkaz geometrizační hypotézy pro Hakenovy variety, ale mé způsoby uvažování. Považuji za nepravděpodobné, že důkaz hypotézy v obecném případě bude sestávat z přímočarého rozšíření stávajících argumentů.

Další věc je, že lidé často chtějí a vyžadují akceptovaný a prověřený výsledek ne proto, aby se jej mohli naučit, nýbrž aby jej mohli citovat a odvolávat se na něj.

Řada matematiků přijala ve skutečnosti můj důkaz velmi rychle, začali výsledku užívat a odvolávat se na něj, spoléhajíce na vlastní zkušenost, důvěru ve mne, stejně tak jako na mínění expertů, jimž jsem svůj důkaz vysvětlil s vynaložením spousty času. Věta je nyní dokumentována v publikacích, jejichž autorem jsem byl já i jiní, takže většina lidí ji s důvěrou cituje; nikdo v oboru nevyslovil pochybnosti o její platnosti ani mě nežádal o doplnění chybějících podrobností.

Ne všechny důkazy hrají totožnou roli v logickém lešení, jež pro matematiku budujeme. Tento konkrétní důkaz má pravděpodobně jen dočasnou logickou hodnotu, ačkoli sehrál důležitou motivační roli tím, že napomohl vzniku jistých představ o struktuře 3-variet. Obecná geometrizační hypotéza představuje stále otevřený problém. Byla dokázána v mnoha případech a podporuje ji také mnoho počítačových výsledků, ale obecný důkaz chybí. Doufám, že bude objeven a že to nebude trvat dlouho. Až k tomu dojde, důkazy speciálních případů ztratí zřejmě přitažlivost jako zastaralé.

V mezidobí je však lepší, aby ti, kdo chtějí užívat geometrických technik, vycházeli z předpokladu „Nechť M je varieta připouštějící geometrický rozklad“, protože je to obecnější než „Nechť M je Hakenova varieta.“ Lidé, kteří těchto technik užívat nechtějí nebo vůči nim chovají podezření, by se jim raději měli vyhnout. I v případě, že se nějaká věta o Hakenových varietách dá dokázat geometrickou technikou, její čistě topologický důkaz bude velice cenný.

Myslím, že v této epizodě (jež stále ještě pokračuje) se mi podařilo vyvarovat se dvou nejhorších scénářů: buď neprozradit, že jsem objevil, co jsem objevil, a dokázal, co jsem dokázal, a nechat si to pro sebe (možná v naději, že dokážu Poincarého hypotézu), nebo předložit nedobytnou a nezvládnutelnou teorii, již nikdo nebude provozovat a neumožní jí tak růst.

Snadno mohu vyjmenovat, čeho ve své kariéře lituji. Nepublikoval jsem tolik, kolik bych byl měl. Existuje řada dalších matematických projektů, které jsem veřejnosti v oboru předložil nevhodným způsobem nebo vůbec ne. Když jsem se soustředil v geometrické teorii 3-variet na její strukturu spíš než na zásadní věty, poněkud jsem se odpoutal od rozvoje předmětu; přestal jsem aktivně a efektivně pomáhat oboru a vědeckým kariérám skvělých lidí, kteří v něm pracují. (Připadá mi, že jistý stupeň odpoutání je téměř nevyhnutelným vedlejším výsledkem soustavné péče o doktorandy a další studenty; abyste skutečně předali vedení výzkumu jiným, nelze než se vzdálit a přestat o těchto tématech přemýšlet příliš usilovně.)

Naproti tomu jsem stále činný a produktivní v mnoha směrech. Náš systém nevytváří pro lidi, jako jsem já, zvláštní čas pro psaní a výzkum; naopak nás zaplavuje mnohými požadavky a příležitostmi k dodatečným úkolům a já jsem na řadu z nich instinktivně kývl. Věnoval jsem hodně úsilí činnostem, které zásluhy nepřinášejí, ale jichž si cením stejně jako dokazování vět: matematické politice, přepracování mých skript v knihu splňující vysoké požadavky na sdělnost, vzdělávání, rozvoji nových forem komunikace v matematice v Geometrickém středisku (příkladem může být náš první experiment, videoprogram „Uzly ne"), řízení MSRI atd.

Myslím, že svou činností jsem své „zásluhy" nijak nemaximalizoval. Jsem nyní ve stavu, kdy necítím silnou potřebu usilovat o další zásluhy. Upřímně řečeno, začínám shledávat, že jsou věci, jež pro mne představují silnější výzvu než dokazování nových vět.

Jsem přesvědčen, že má činnost matematice prospěla.

Důkazy, fyzika a věci kolem nich

Článek A. Jaffeho a F. Quinna a obsáhlá reakce W. Thurstona vycházejí ze značně odlišné filozofie matematiky, a přece bude asi většina čtenářů souhlasit s náhledem, že je to s nimi jako ve staré rabínské anekdotě: je pravdivé tvrzení, že obojí je pravda. Jinými slovy, napětí mezi těmito dvěma přístupy je charakteristickým rysem matematiky a také její hybnou silou.

Někdo může považovat za přirozené, že po rigoróznosti volají právě autoři mající osobní hlubokou a dlouhodobou zkušenost s „nepořádným" světem teoretické fyziky, jiný to může považovat za paradox. Je však jisté, že řečené napětí pociťuje každý, ať už se zabývá některým oborem čisté matematiky, matematikou aplikovanou či

---

Z odpovědí na článek *„Theoretical Mathematics": Toward a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics*, Bull. Amer. Math. Soc. *29* (1993), 1–13, jehož překlad je uveřejněn v minulém čísle, otištěných tamtéž, *30* (1994), 178–211, vybral, přeložil a komentářem opatřil PAVEL EXNER.