Michael F. Atiyah; A. Borel; D. Friedan; J. J. Gray; Hirsch, Morris W; Benoit B. Mandelbrot; Karen Uhlenbeck; René Thom

Důkazy, fyzika a věci kolem nich

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 41 (1996), No. 2, 73--81

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139428

v oboru předložil nevhodným způsobem nebo vůbec ne. Když jsem se soustředil v geometrické teorii 3-variet na její strukturu spíš než na zásadní věty, poněkud jsem se odpoutal od rozvoje předmětu; přestal jsem aktivně a efektivně pomáhat oboru a vědeckým kariérám skvělých lidí, kteří v něm pracují. (Připadá mi, že jistý stupeň odpoutání je téměř nevyhnutelným vedlejším výsledkem soustavné péče o doktorandy a další studenty; abyste skutečně předali vedení výzkumu jiným, nelze než se vzdálit a přestat o těchto tématech přemýšlet příliš usilovně.)

Naproti tomu jsem stále činný a produktivní v mnoha směrech. Náš systém nevytváří pro lidi, jako jsem já, zvláštní čas pro psaní a výzkum; naopak nás zaplavuje mnohými požadavky a příležitostmi k dodatečným úkolům a já jsem na řadu z nich instinktivně kývl. Věnoval jsem hodně úsilí činnostem, které zásluhy nepřinášejí, ale jichž si cením stejně jako dokazování vět: matematické politice, přepracování mých skript v knihu splňující vysoké požadavky na sdělnost, vzdělávání, rozvoji nových forem komunikace v matematice v Geometrickém středisku (příkladem může být náš první experiment, videoprogram „Uzly ne“), řízení MSRI atd.

Myslím, že svou činností jsem své „zásluhy“ nijak nemaximalizoval. Jsem nyní ve stavu, kdy necítím silnou potřebu usilovat o další zásluhy. Upřímně řečeno, začínám shledávat, že jsou věci, jež pro mne představují silnější výzvu než dokazování nových vět.

Jsem přesvědčen, že má činnost matematice prospěla.

Důkazy, fyzika a věci kolem nich

Článek A. Jaffeho a F. Quinna a obsáhlá reakce W. Thurstona vycházejí ze značně odlišné filozofie matematiky, a přece bude asi většina čtenářů souhlasit s náhledem, že je to s nimi jako ve staré rabínské anekdotě: je pravdivé tvrzení, že obojí je pravda. Jinými slovy, napětí mezi těmito dvěma přístupy je charakteristickým rysem matematiky a také její hybnou silou.

Někdo může považovat za přirozené, že po rigoróznosti volají právě autoři mající osobní hlubokou a dlouhodobou zkušenost s „nepořádným“ světem teoretické fyziky, jiný to může považovat za paradox. Je však jisté, že řečené napětí pociťuje každý, ať už se zabývá některým oborem čisté matematiky, matematikou aplikovanou či

---

Z odpovědí na článek *„Theoretical Mathematics“: Toward a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics*, Bull. Amer. Math. Soc. *29* (1993), 1–13, jehož překlad je uveřejněn v minulém čísle, otištěných tamtéž, *30* (1994), 178–211, vybral, přeložil a komentářem opatřil Pavel Exner.

numerickou, matematickou fyzikou nebo jinou činností obsahující matematiku ve svém názvu či podstatě; každý si také musí vybrat nebo vymyslet vlastní recept, jak s tímto problémem naložit.

To je zřejmě důvod, proč Jaffeho a Quinnův článek vyvolal nebývalou odezvu; kromě Thurstona se ozvala i celá řada dalších. Málokterá z odpovědí představuje jednoduché a vyhraněné hledisko; některé jsou uvozeny konstatováním, že autor oceňuje postřehy Jaffeho a Quinna, ale nesouhlasí s celkovým vyzněním jejich manifestu. V diskusi se objevila celá řada zajímavých myšlenek. Z důvodů rozsahu však není možné ji otisknout celou, proto vybíráme jen některé postřehy a případné zájemce odkazujeme k originálním verzím příspěvků.

Michael Atiyah
Trinity College, Cambridge, U. K.

... Má hlavní námitka spočívá v tom, že Jaffe a Quinn předkládají dezinfikovaný pohled na matematiku, který ji odsuzuje ke stařecké artróze... Historie matematiky je plná příkladů, v nichž šťastná inspirace triumfovala nad nedostatkem rigoróznosti. Eulerova práce s divoce divergentními řadami a Ramanujanovy zázračné nápady jsou nejzjevnější z nich a matematika by byla o mnohé ochuzena, kdyby Jaffeho a Quinnův názor v oné době převládl...

Po pravdě řečeno, celá oblast mezi kvantovou teorií pole a geometrií (Jaffeho a Quinnův hlavní námět) vyprodukovala množství nových výsledků, v jejichž prospěch lze uvést řadu argumentů. V řadě důležitých případů máme nyní rigorózní důkazy získané jinými metodami... Kupříkladu, Wittenova práce značně rozšířila oblast použití Jonesových uzlových invariantů, a až se prach usadí, uvidíme podle mého názoru plně rigorózní topologickou kvantovou teorii pole v dimenzi 2+1. Feynmanovým integrálům lze dát přesný smysl nikoli analytickým postupem, ale užitím směsi kombinatorických a algebraických technik. Znevažující poznámky v Jaffeho a Quinnově článku jsou naprosto nepodložené...

Neobvyklé na současné interakci mezi teoretickou fyzikou a geometrií je, že na obou stranách se týká myšlenek na okraji poznání. To prudce zvyšuje přitažlivost pro obě zúčastněné strany, ale Jaffe a Quinn považují za nutné zdůrazňovat nebezpečí... Podle mého mínění jsme svědky jedné z nejvíce osvěžujících událostí v matematice dvacátého století. Terén, na nějž vstupujeme, se hemží nástrahami a sotva tušíme povahu a rozsah toho, k čemu spějeme; může to být dominantní téma pro století příští. Není divu, že mladá generace cítí vábení...

Armand Borel
Institute for Advanced Study, Princeton

... Souhlasím samozřejmě s tím, že žádná část matematiky nemůže trvale vzkvétat bez solidních základů a důkazů a že jejich nedostatek poškodil například italskou algebraickou školu. Připadá mi, že totéž se zřejmě týká Thurstonova programu. Může se také stát, že požadavky na rigoróznost akceptované pro praktické potřeby určitého oboru shledá širší matematická obec jako naprosto nevyhovující. Případ, s nímž jsem učinil zkušenost, byla práce E. Cartana týkající se vnějších diferenciálních forem a konexí, jež vedla ke značně ostré diskusi mezi Cartanem a Weylem. Osobně mi tato teorie docela vyhovovala, ale později, když jsem byl konfrontován se současně uznávanými názory, jsem stěží dovedl pochopit, čemu že jsem to vlastně rozuměl. Všichni víme o Dirakově diagonalizaci libovolného samosdruženého operátoru a o Dirakově δ-funkci a je možné najít celou řadu dalších příkladů. Ale věřím v samokorigující schopnosti matematiky, o nichž mluvil již Hilbert ve své přednášce z roku 1900; ostatně všechny příklady, o nichž jsem se zmínil (kromě Thurstonova programu), byly časem uvedeny na správnou míru...

Daniel Friedan
Rutgers University, New Brunswick

Vztah experimentu k teoretické fyzice je v článku prezentován zkresleně. Mohu parafrázovat Fermiho (možná nepřesně): experiment, který najde něco nečekaného, je objev; souhlasí-li výsledky s naším očekáváním, je to měření... Pokud vím, matematika ani fyzika nikdy neoplývaly přebytkem originality. Je rozumné kritizovat způsob vyjádření originálních myšlenek jenom proto, že profesionální společenství je dokáže jen pomalu vstřebat, ocenit a/nebo dále rozvíjet?

Jeremy J. Gray
Open University, Milton Keynes

... Možná největší změna za posledních sto let nespočívá v tom, že by vzrostly nároky — autoři nás přesvědčují o tom, že tomu tak není —, ale že celý obor vyrostl. Poincarého nejinspirativnější přednášky mohly přitáhnout nanejvýš deset posluchačů, z nichž každý byl zaujat vlastními zájmy. Dnešní vůdčí postavy oboru iniciují semináře v půltuctu míst, pozornost mnohých zralých matematiků a možná i zanícení ambiciózních doktorandů. Překvapuje, že nehledě na tuto pozornost musíme stále čelit problémům, na něž upozorňují Jaffe a Quinn, jimž bychom měli být vděčni za návrh léčebné kúry. Protože však nejlepší teoretické práce dokážou zmást i experty, obávám se, že optimistická očekávání nejsou na místě.

Morris W. Hirsch
University of California, Berkeley

Nerigorózní způsoby užití matematiky běžné mezi přírodními vědci, inženýry, aplikovanými matematiky a dalšími, z nichž se někdy vyvine rigorózní teorie, jsou ve skutečnosti mnohem složitější než pouhá spekulace. Zatímco lajdácké důkazy jsou až příliš obvyklé, záměrná prezentace nedokázaných výsledků jako platných je naštěstí vzácná.

Mnohem častější je užití matematiky jako *epického prostředku*. Autor má příběh, který chce vyprávět, a cítí, že jej dokáže vyjádřit jasněji v matematické řeči. Aby vyprávění bylo konzistentní a vyhnulo se nekonečným průtahům, jež by rigoróznost vyžadovala, zavádí jisté předpoklady, spekulace a kroky učiněné *bona fide*, například: „Budeme nadále předpokládat, že řada konverguje — náhodné proměnné jsou nezávislé — ekvilibrium je stabilní — determinant se nerovná nule.“ V takových případech je často irelevantní, zda je rigorózní zdůvodnění možno doplnit nebo ne, protože autorovým cílem je přesvědčit čtenáře o plausibilitě jistého názoru o tom, jak se chovají některé systémy ve skutečném světě... ověření přichází z experimentu; cílem může být takový experiment navrhnout... Tento postup může čistému matematikovi připadat šokující, když se s ním poprvé setká, ale je nejenom neškodný, nýbrž i pro přírodovědce a inženýry nepostradatelný...

Neakceptuji varovný příklad o „pomalém začátku“ algebraické a diferenciální topologie způsobený tím, že Poincaré „tvrdil příliš mnoho a dokázal příliš málo“. Podle norem své doby toho dokázal až dost, ale matematika, jež by z toho mohla mít prospěch, nebyla dostatečně rozvinuta. Oněch „15 až 20 let“, po nichž teprve „začal skutečný rozvoj“, nebylo zas tak dlouho v tehdejší méně hektické době ... Poincaré dokázal být nepořádný: v roce 1900 oznámil, že má-li uzavřená varieta (v naší terminologii) stejná Bettiho čísla jako kulová plocha S^3, pak je s ní homeomorfní. Ale v roce 1904 uznal chybu (zanedbání fundamentální grupy), zformuloval protipříklad a vyslovil tvrzení, jež nazýváme jeho „hypotézou“...

Lze se zmínit o dalších varovných příkladech. *I Gauss publikoval neúplné důkazy.* Jeho první důkaz základní věty algebry v dizertaci z roku 1799 byl široce obdivován jako první zcela uspokojivé řešení problému. Opíral se ovšem o tvrzení „známé z vyšší geometrie“, jež „se zdá být dostatečně dobře dokázáno“: *Pokud větev reálné polynomiální křivky $F(x,y) = 0$ vejde do rovinné oblasti, musí ji opět opustit.* Gauss zjevně pociťoval, že je zapotřebí čtenáře přesvědčit, a dodal: „Pokud vím, nikdo o tom nikdy nepochyboval. Ale pokud by si někdo přál, zamýšlím při jiné příležitosti uvést důkaz, který všechny pochyby rozptýlí.“ Podle Smaleova článku [BAMS *4* (1981), 1–36; citace jsou vzaty odtud] tato „obrovská mezera“ nezmizela, ani když Gauss důkaz předělal o padesát let později, a byla zaplněna až v roce 1920.

Jednoduché konečné grupy. Autoři se zmiňují o 15000 publikovaných stránkách představujících klasifikaci těchto grup jako o „teoretické matematice“ a příkladu „velké vědy“, ale necharakterizují ji jako varovný příklad, jak bych učinil já. Byla klasifikace rigorózně dokázána? A jaký druh důkazu to je? Existuje expert, jenž může tvrdit, že ji celou přečetl a prověřil? Je téměř jisté, že na oněch 15000 stránkách se najdou chyby. Bylo mi řečeno, že některé části nebyly ve skutečnosti nikdy dokončeny. Jaký je potom status klasifikační věty? Lze na ni spoléhat? A je-li důkaz neúplný, nemělo by se to nahlas říci? Ostatně, kdo tu velí?...

Nedokazuj, prostě přednášej! Někteří uznávaní matematici strávili spoustu času, když ohlásili řešení známé hypotézy, občas se spoustou publicity v neodborném tisku, a poté o něm konali přednášky široko daleko, aniž by kdy v nich nebo v tištěné podobě uvedli podrobnosti důkazu, a nakonec museli uznat, že se mýlí. (Varianta předchozího postupu je, že článek byl otištěn v časopise bez recenzního řízení). To je spekulativní matematika ve své nejhorší podobě a je to neomluvitelné.

Benoit B. Mandelbrot
Yale University, New Haven

... Pro dobro vlastní i celé vědy je bezpodmínečně nutné, aby žádná skupina nevlastnila matematiku; nikdo nesmí mít mandát rozhodovat o jejím užití ani o něj usilovat. Z tohoto důvodu potřebuji ve svých poznámkách termín pro typické členy Americké matematické společnosti. Jelikož její sídlo je na Charles Street,... budu je nazývat „karlovskými matematiky".[1])

... Hlavní důvod, proč shledávám Jaffeho a Quinnův recept úděsným, je, že by způsobil spoušť v živých vědních oborech. Phillip Anderson popisuje matematickou rigoróznost jako „irelevantní a nemožnou". Zmírním ránu, když ji nazvu „nikoli k věci a obvykle zavádějící i v případě, že jí lze dosáhnout". Vezměme jako příklad statistickou teorii perkolace. Ta zahrnuje zjevně matematickou konstrukci, již objevil Hammersley, povoláním matematik; brzy však padla do rukou teoretických fyziků, kteří postupně objevili, že perkolace popisuje řadu zajímavých přírodních jevů, a odvodili dlouhatánský seznam vlastností (dodám, že mnohé jsou fraktální povahy). Matematici přitom značně zaostali... Každý, kdo nyní přijde s rigorózním řešením těchto mimořádně obtížných problémů, bude v matematice po zásluze veleben, i když jeho práce jen potvrdí intuitivní závěry fyziků. Doufám, že jednotlivcům mezi nimi, kteří ukázali cesty, jak perkolační problémy chápat, se přitom dostane uznání; mám však obavy, že nikoli. Všimnou si fyzici této matematiky? Pouze tehdy, budou-li výsledky obsahovat víc, než co už je známo, či budou-li rigorózní důkazy kratší a/nebo důvtipnější než heuristické argumenty...

... jsem zklamán, že Jaffe a Quinn se o mně zmiňují, aniž by připomněli, že kdykoli jsem při své činnosti narazil na něco, co by mohlo zajímat karlovské matematiky, dal jsem si práci, abych je vyhledal a popsal svůj výsledek jako hypotézu, a tedy jako výzvu dokázat jej či vyvrátit v obvyklém standardu rigorozity. Těší mě, že — ve všech oborech, jichž jsem se dotkl, ať už to byla harmonická analýza, teorie pravděpodobnosti nebo (což je nejznámější) teorie iterace funkcí — se našli skvělí matematici, kteří přijali mou výzvu a dospěli tak k zajímavým větám...

Jaffeho a Quinnův článek je ve svém soustředění na zásluhy a povýšeném vztahu k úspěšným oborům vně karlovské matematiky příkladem špatného vkusu. Jejich stížnost, že rigorozita je ohrožena, není dnes o nic víc pravdivá než ve dnech Bourbakiho nadvlády. Měl-li by převládnout tento přístup karlovských matematických ničemů, můžeme být připraveni o budoucího Poincarého či Levyho. Dovolte mi však zakončit

[1]) *Poznámka překladatele:* U nás na Karlově najdeme spíše fyziky, takže jakákoli podobnost je čistě náhodná. Naši matematici sídlí v Karlíně.

v pozitivním tónu. Je příjemné slyšet, že Jaffe a Quinn nezpochybňují nedávné zlepšení vztahů mezi matematikou a fyzikou. Nejlepší hranice je otevřená hranice, jež dovoluje, aby nominální fyzikové byli oceňováni za své matematické výsledky a nominální matematici za svou fyziku.

Karen Uhlenbeck
University of Texas, Austin

... Souhlasím s mnoha body článku. Čistí matematici by vskutku měli dokazovat věty a publikovat své výsledky včas a ve srozumitelně napsaném článku. Co možná potřebujeme jako dodatek k „mathematica rejecta“, o nichž jsme snívali v mládí, jsou „mathematica culpa“ pro starší a pokročilé. Bylo by možné tam posílat některé mladé matematiky za mimořádné hříchy a také nás starší, kteří tam směřujeme, jak život běží...

... stanovisko článku ohledně mladých matematiků je čistě chybné. Dobře si vzpomínám, jak jako student jsem byl spolužákem zasvěcován do mystéria teorie distribucí; řekl mi, že fyzici jich užívají nevědouce, co činí. Teprve skvělý a novátorský matematik jako idolizovaný Laurent Schwartz dokázal fyzikálnímu blábolu dát smysl. Tento přístup byl bohužel během mých formativních let utvrzován jak matematiky, tak i fyziky. Zdálo se, že matematici si myslí, že fyzici nedokážou dělat fyziku „správně“, zatímco fyzici nahlíželi na matematiky jako na bezcenný hmyz. Teprve, když jsem učinil zkušenost s matematickým rozvojem kalibrační teorie, dokázal jsem pochopit zásadní význam vnějších idejí v matematice, a naopak, že matematický jazyk může přinést opravdový užitek vně vlastního oboru...

... Jenom kombinované elitářství čisté matematiky a fundamentální fyziky vysokých energií si může činit nárok na to, aby jeho odrůda spekulativní a aplikovatelné matematiky měla samostatné jméno. Je možné nelineární dynamiku, jež má vlastní aktivní a zajímavé napojení na jiné fyzikální obory, prohlásit za teoretickou matematiku? A co s matematickou biologií, která byla možná zdržena nedostatkem pozornosti věnované matematikou zacházení se složitou informací? Někteří tvrdí, že tento obor zoufale potřebuje právě matematiku k dosažení hlubšího porozumění. Byl bych rád, kdyby se diskuse započatá Jaffem a Quinnem rozšířila a pokryla lesk a bídu interakce mezi čistou matematikou a mnoha dalšími aplikovanými obory.

René Thom
IHES, Bures-sur-Yvette

... Námět mě zajímá z mnoha důvodů, nejenom proto, že jsem byl osobně zahrnut mezi „výstražné případy“. V tomto bodě mohu pouze potvrdit, že popis mého matematického vývoje je docela přesný. Před rokem 1958 jsem žil v prostředí tvořeném převážně bourbakisty, a i když jsem sám neměl zvláštní sklony k rigorozitě, tito lidé — H. Cartan, J.-P. Serre a H. Whitney (mající bourbakistické aspirace) — mi pomohli zachovávat přijatelnou úroveň přesnosti. Uzdu svým přirozeným sklonům jsem popustil teprve po získání Fieldsovy medaile (1958) a to vedlo nakonec ke katastrofálním následkům. Navíc jsem se o několik let později stal kolegou Alexandra Grothendiecka v IHES, kteréžto skutečnost mě utvrdila v názoru na rigorozitu jako postradatelnou část matematického myšlení. Trochu lituji toho, že když jiní autoři citují mou práci v teorii singularit, nezdůrazňují její pozitivní aspekty jako lemma o transverzalitě, teorii stratifikovaných prostorů, charakterizaci „slušných“ zobrazení,... Vše to bylo bylo poprvé *napsáno* v mých nerigorózních článcích. Pochopitelně mnozí lidé (Milnor, Mather, Malgrange, Trotman a jeho škola, McPherson, abych se zmínil jen o několika) si mohou činit nárok na podstatnou část zásluh za rigorózní prezentaci této teorie.

... Stále věřím, že rigorozita je relativní pojem, nikoli absolutní. Závisí na základech, jež čtenáři mají a podle očekávání užívají při svém usuzování. Od zhroucení Hilbertova programu a objevení Gödelovy věty víme, že rigorozita není než lokální a sociologické kritérium. Je pravda, že takováto praktická kritéria lze často „uspořádat“ podle abstraktních logických požadavků, ale v žádném případě není jisté, že tyto sociologické kontexty je možné uspořádat *úplně*, byť i jen asymptoticky.

Jeden z hlavních argumentů článku Jaffeho a Quinna je, že při použití v dalším výzkumu bychom měli vědět, zda je publikovaný výsledek možno považovat za *spolehlivý*, tj. zda je jeho platnost obecně akceptována. Mám pocit, že pro badatele v matematice není etické užívat výsledků důkazu, jemuž „nerozumí“, s výjimkou zvláštního případu, kdy chce tvrzení vyvrátit...

Vedle těchto dopisů, z jejichž obsahu jsme uvedli jenom malou část, do diskuse přispěli také:

G. J. CHAITIN, IBM Research Division, který nachází v algoritmické teorii informace argumenty na podporu Jaffeho a Quinna,

JAMES GLIMM, State University of New York, Stony Brook, který jako Jaffeho dlouholetý spoluautor hájí jeho názory,

SAUNDERS MC LANE, University of Chicago, jenž obsáhle probírá a na příkladech ilustruje posloupnost *intuice, pokus, omyl, spekulace, hypotéza, důkaz;* je také protivníkem Jaffeho a Quinnova „nadšení pro fyziku“,

DAVID RUELLE, IHES, Bures-sur-Yvette, jenž podotýká, že podle Sinaiových informací Kolmogorov uvedl plný důkaz KAM teorému ve dvourozměrném případě na svých přednáškách,

ALBERT SCHWARZ, University of California, Davis, který v zásadě souhlasí s Jaffem a Quinnem a uvádí další příklady; jejich závěry o zásluhách však považuje za příliš kategorické,

EDWARD WITTEN, Institute for Advanced Study, Princeton, jenž zastává názor, že Jaffe a Quinn prezentují značně úzké hledisko, a obhajuje naděje vkládané do teorie superstrun, a konečně,

SIR CHRISTOPHER ZEEMAN, Herford College, Oxford, U. K., který obhajuje Thomovu teorii; chválí Jaffeho a Quinna za to, že diskusi vyvolali, ale nesouhlasí s dělením na spekulativní a rigorózní „obor“.

Jménem vydavatelů *Bulletinu* Richard Palais diskusi přivítal o ocenil její prospěšnost. Nicméně dal najevo jistou únavu, jež vedla k doporučení přenést do budoucna podobné debaty do *Notices of the American Mathematical Society*, oddíl *Forum*. Jak se však sluší, dal na závěr A. Jaffemu a F. Quinnovi příležitost k odpovědi, z níž vyjímáme:

Reakce: ... Rádi bychom řekli, jak si vážíme péče a myšlenkového úsilí, jež autoři vložili do svých odpovědí, a příležitosti odpovědět jim ve stejném duchu. Obdrželi jsme také reakce od fyziků — viz Friedanovu odpověď —, ale chtěli bychom zdůraznit, že článek nebyl adresován fyzikům zabývajícím se fyzikou. To je úplně jiná záležitost a fyzikové mohou profitovat z pracovního stylu, který je v matematice kontraproduktivní. Chtěli jsme oslovit matematiky a fyziky, kteří chtějí, aby jejich práce byla považována za matematiku. V každém případě dialog započal.

Hodnota hypotézy: Většina čtenářů správně pochopila, že se vyjadřujeme o spekulativním uvažování pozitivně a chceme zvýšit jeho význam... Někteří jako Atiyah mají za to, že se stavíme k hypotézám nepřátelsky. Pochopitelně s ním souhlasíme, že potlačení spekulací by vedlo ke „stařecké artróze". Nechápeme však, proč by takový účinek mělo jejich označení pravým jménem nebo explicitní přiznání jejich neúplnosti.

Oceňujeme Thomovu poznámku, že „rigorozita" má stejný kořen jako *rigor mortis*.[2]) Je hodně pravdy na tom, že dostatečně „zrigorizovaná" matematika je mrtvá a skutečný život dlí ve spekulacích, jak tvrdí Atiyah. Můžeme si matematiku představit jako strom: jen listy a vrstvička pod kůrou jsou skutečně „živé", nicméně strom je podpírán obsáhlou literaturou tvořící „mrtvé" dřevo. Tvrdíme, že materiál musí být skutečně zdravý, aby mu bylo umožněno zemřít a vtělit se do dřeva. „Samokorigující schopnost vědy" znamená v této metafoře, že je-li publikováno příliš shnilého dřeva, větev se ulomí a strom musí vyhnat jinou haluz.

Účinek na studenty: Napsali jsme, že studenti mohou být negativně ovlivněni problémy, o nichž jsme se zmínili. Atiyah a Uhlenbeck, mezi jinými, to zřejmě pochopili jako výzvu k tomu, aby studenti byli drženi stranou od spekulací (a vzrušení). To nebylo naším záměrem. Oba jsme jako studenti takové oblasti vyhledávali a nelitujeme toho. Považujeme to spíše za otázku obecně uznávaných standardů, cílů a modelů chování. Tvrdíme, že je nebezpečné, když se do spekulativní práce pustí student, jenž nechápe její zvláštní charakter; pokud nemá mimořádný talent, nedopadne dobře.

O specifičnosti a uvádění jmen: Někteří nám vyčetli, že jsme se omezili na interakci matematiky s teoretickou fyzikou. Jistě existují hluboké vztahy i s dalšími disciplínami, ale náš výběr byl motivován třemi hledisky. Za prvé, probíraná oblast je význačná kvantitou i kvalitou aktivity, jež se v ní odehrává... Za druhé, máme s ní oba osobní zkušenost. Za třetí, považovali jsme specifičnost za důležitou, protože

---

[2]) *Poznámka překladatele:* Tuto část jsme vypustili podobně jako Thomův návrh nálepek pro třídění matematických prací: *kolébka, náhrobní kámen* a *chrám*.

detailní argumentace v určitém kontextu je užitečnější než obecnosti či příklady z různých oblastí mající málo společného. Věříme, že naše závěry mají obecnější platnost.

Omlouváme se těm, kteří považují za nevhodné, že jsme užili jmen žijících matematiků; někteří to na smůlu pochopili jako osobní útok. Tak jsme to jistě nemysleli. Zmínili jsme se jen o mimořádně dobře známých, vysoce ceněných matematicích, kteří požívají vážnosti v celé obci. Měli jsme za to, že tito lidé, jejichž zásluhy a reputace jsou mimo jakoukoli pochybnost, mohou být diskutováni na úrovni vyšší než osobní.

Odpověď Thurstonovi: ... [Thurston] pečlivě a s výřečností popsal vizi matematiky, jež se od naší v některých směrech liší. Ale jak sám zdůrazňuje, odpověď závisí do značné míry na tom, jak je formulována otázka. Máme za to, že jeho vycizelované otázky otvírají cesty k chápání problémů, ale také odvádějí diskusi od našich specifických předmětů zájmu...

K porozumění dospíváme na různých úrovních. Věříme, že Thurston má na mysli způsob chápání, jejž by si učitel přál vštípit svým žákům. Postačuje pro ocenění významu, ale nikoli pro aktivní použití nebo další rozvoj. Říká, že tradičně napsané články jsou špatným prostředkem uvedení do předmětu; jsou ale také brusem, na němž mistrovství získává své ostří. A přinejmenším jsou posledním útočištěm v procesu učení. Thurston sám se může dobrat uspokojivého porozumění neformálními prostředky komunikace, je však matematik nevšední výkonnosti a měl by být opatrný, extrapoluje-li svou zkušenost na potřeby ostatních.

Rigorózně napsané články mají vedle vzdělávací i jiné funkce včetně toho, že určují, co je platné a hodnověrné. Důkazy skýtají zdroj technických prostředků pro jiné problémy a nápovědi o nových neočekávaných jevech. Thurston mluví o společenských aspektech poznání (a odvolává se na fakt, že experti v zásadě přijali Wilesův důkaz velké Fermatovy věty ještě před prověrkou podrobností). Ale experti byli sdostatek opatrní ve svém hodnocení, aby řekli, že konečný závěr poplyne pouze z detailní argumentace. V době, kdy píšeme tuto odpověď (prosinec 1993), závěry ještě chybějí a je možné, že tento zázračně plodný problém přinese ještě další poučení[3])...

Je zřejmé, že Thurston dokázal identifikovat pravé slabiny a potřeby ve vzdělávacích, společenských a komunikačních aspektech matematiky. Ale jeho rozbor nezahrnuje vše; podařilo se mu odvést diskusi od toho, co považujeme za principiální záležitost, totiž významu „poctivé reklamy“ v publikacích o výsledcích výzkumu a psaném důkazu jako konečném cíli. Máme zvláštní pocit, že jeho rozbor se lépe hodí na jiné vědy, kde nástroje pro ověřování hodnověrnosti nejsou tak účinné jako v matematice. Ale připadá nám také, že i v matematice, kde se jeho závěry omezují spíše na vzdělávání než na výzkum, jsou komplementární s našimi a vzájemně kompatibilní.

---

[3]) *Poznámka překladatele:* Wilesův článek byl publikován v *Annals of Mathematics* na jaře tohoto roku (1995).