Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Demeter Krupka; Jana Musilová

Pohybové integrály v mechanice vyššího řádu a v teorii polí

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 28 (1983), No. 5, 259--266

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139423

Pohybové integrály v mechanice vyššího řádu a v teorii polí

Demeter Krupka, Jana Musilová, Brno

Tento článek je věnován doc. RNDr. M.Černohorskému, CSc., který velkou část své vědecké a pedagogické činnosti zasvětil klasické mechanice a jako vysokoškolský pedagog se zasloužil o rozvoj vědeckého myšlení mladších generací fyziků.

1. ÚVOD

Důležitou součástí teoretických základů klasické mechaniky je vztah mezi pohybovými integrály mechanického systému, jakými jsou v případě izolovaných systémů například celková energie a celková hybnost, a geometrickými transformacemi konfiguračního prostoru systému, které nemění danou konfiguraci. Tento vztah je efektivně formulován variační teorií a je vyjádřen známým (prvním) teorémem Emmy Noetherové o invariantních variačních problémech [1].

Analogická je situace v teorii polí zahrnující interakce polí *prvního* řádu, tj. takové interakce, které mohou být charakterizovány pouze velikostí polí a jejich prostoročasových změn s přesností prvních derivací. Současná teorie, rozvíjející myšlenky Noetherové, je již dostatečně obecná a relativně uzavřená [2, 3]. Proti klasické mechanice se však pohybové integrály stávají diferenciálními formami a jejich „zákony zachování“ mají složitější matematickou strukturu; častým jevem je existence pohybových integrálů, jež nemají přímou fyzikální interpretaci.

Vývoj teoretické fyziky v posledních desetiletích si však vyžádal studium složitějších interakcí, než jsou interakce prvního řádu. V obecné teorii relativity, ale také například v teorii pružnosti [4], se můžeme setkat s interakcemi vyjádřenými pomocí variačních principů, ve kterých vystupují nejen první, ale také vyšší derivace interagujících fyzikálních objektů (polí). Je rozvíjena také *mechanika vyššího řádu*, ve které je časový vývoj mechanického systému určován lagrangiánem, závislým na polohách, rychlostech a také vyšších zrychleních částí systémů (viz například [5, 6]).

Základním cílem tohoto článku je přispět k teorii pohybových integrálů rovnic pro extremály variačních funkcionálů libovolného řádu. Tato teorie je matematickým základem výše uvedených nových směrů výzkumu v teoretické fyzice. Původním výsledkem, který zde formulujeme, je analogie známé rovnice Noetherové-Bessel-Hagenovy, svazující generátory jednoparametrických grup symetrie lagrangiánu (či přesněji jeho Eulerovy-Lagrangeovy rovnice) s lagrangiánem samotným [3]. Dále rozebíráme postup, umožňující najít rovnice s předem zadanými vlastnostmi symetrie, které mají odpovídající první integrály. Metodu určení rovnic s těmito vlastnostmi ilustrujeme na jednoduchém příkladě [7].

V práci se omezujeme na formulaci teorie na jednoduchých souřadnicových prostorech, svázaných s konfiguračním prostorem. Výsledky, které uvádíme, však mají širší platnost. Mohou být přeformulovány pro libovolné variety (viz např.[8]) a systémy polí na varietách v takovém stupni obecnosti, jaký je vyžadován soudobou obecnou teorií relativistických polí a moderní mechanikou [9].

2. ZÁKLADNÍ STRUKTURY

Představu o poměrně obecných pojmech a matematických strukturách, na nichž se zakládají moderní geometrické metody ve fyzice, lze získat i bez uvedení přesných definic pomocí důležitých a v aplikacích často užívaných speciálních případů těchto struktur. Nejdůležitější z nich zavedeme pro případ jednoduchých číselných prostorů.

Fibrovaná varieta a její prodloužení

Nechť $X \subset R^n$, $V \subset R^m$ jsou otevřené množiny, $Y = X \times V \subset R^{n+m}$. Body těchto množin jsou dány standardními souřadnicemi $(x^i) = x \in X$, $(x^i, y^\sigma) = y \in Y$, kde $1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq \sigma \leqq m$. Zobrazení $\pi : Y \ni (x^i, y^\sigma) \to \pi(x^i, y^\sigma) = (x^i) \in X$ je tzv. (přirozená) *projekce*. Trojice (Y, π, X) je příkladem *fibrované variety* s bází X. Libovolné diferencovatelné zobrazení $\gamma : X \to Y$ s vlastností $\pi \circ \gamma = \mathrm{id}_X$, kde id_X je identické zobrazení X na sebe, se nazývá *řez* projekce π. V souřadnicích má řez γ tvar $\gamma(x) = (x, \gamma_0(x)) = (x^i, y^\sigma\gamma_0(x^j))$, kde $y^\sigma\gamma_0$ jsou složky funkce $\gamma_0 : X \to V$. (Pro $n = m = 1$ si lze $\gamma(X)$ představit jako graf funkce definované na intervalu X.) Množinu všech řezů projekce π označujeme $\Gamma(\pi)$. Dále označme $j^1Y = X \times V \times R^{nm}$, $j^2Y = X \times V \times R^{nm} \times R^{\frac{1}{2}nm(n+1)}, \ldots, j^rY = X \times V \times R^{nm} \times \ldots \times R^{ms}$, kde $s = \binom{n+r-1}{r}$. Je-li $\pi_r : j^rY \to X$ opět (přirozená) projekce, je trojice (j^rY, π_r, X) fibrovanou varietou s bází X. Fibrovaná varieta (j^rY, π_r, X) se nazývá *r-jetovým prodloužením* variety (Y, π, X). Přirozenou projekci $j^rY \to j^sY$ pro libovolné $r > s$ označíme $\pi_{r,s}$. Pro bod $w \in j^rY$ píšeme $w = (x^i, y^\sigma, y^\sigma_{j_1}, \ldots, y^\sigma_{j_1 \ldots j_r})$. Podobně jako pro (Y, π, X) lze definovat řezy fibrovaných variet (j^rY, π_r, X). Důležité (speciální) řezy fibrované variety (j^rY, π_r, X) jsou definovány touto konstrukcí. Nechť $\gamma \in \Gamma(\pi)$. Zobrazení $j^r\gamma : X \to j^rY$ definované vztahem $j^r\gamma(x) = (x, \gamma_0(x), D\gamma_0(x), \ldots, D^r\gamma_0(x))$, kde $D^k\gamma_0(x)$, $1 \leqq k \leqq r$, je matice tvořená parciálními derivacemi k-tého řádu zobrazení γ_0 v bodě x, tj. prvky $\partial^k y^\sigma\gamma_0(x)/\partial x^{j_1} \ldots \partial^{j_k}$, se nazývá *r-jetovým prodloužením řezu* γ.

Transformace fibrované variety a její prodloužení

Nechť $\alpha : Y \to Y$, $\alpha_0 : X \to X$ jsou vzájemně jednoznačná zobrazení třídy C^∞ s vlastností $\pi \circ \alpha = \alpha_0 \circ \pi$. Dvojici (α, α_0) nazýváme *transformací* fibrované variety (Y, π, X). Přirozeným způsobem vzniká prodloužení $(j^r\alpha, \alpha_0)$ této transformace na varietu (j^rY, π_r, X), položíme-li pro každý řez $\gamma \in \Gamma(\pi)$ $j^r\alpha(j^r\gamma(x)) = (j^r(\alpha\gamma\alpha_0^{-1}))(\alpha_0(x))$. Platí $\pi_r \circ j^r\alpha = \alpha_0 \circ \pi_r$, je tedy $(j^r\alpha, \alpha_0)$ transformací fibrované variety (j^rY, π_r, X). Transformace fibrované variety mají úzkou souvislost s vektorovými poli na varietě. *Vektorovým polem* na Y rozumíme diferencovatelné zobrazení přiřazující bodům variety Y tečné vektory k Y v těchto bodech. Tečný vektor k parametricky zadané křivce $\zeta(t)$ v bodě $y = \zeta(0)$ značíme $\Xi = [(y, \zeta)] = (y, (d\zeta(t)/dt)_0)$. Tečné vektory v bodě y tvoří vektorový prostor T_yY, tzv. *tečný prostor* k varietě Y v bodě y. Značíme $TY = \bigcup_{y\in Y} T_yY$ a podobně $TX = \bigcup_{x\in X} T_xX$. Projekcí π je indukováno *tečné zobrazení* $T\pi : TY \to TX$ vztahem $T\pi\Xi(y) = \xi(\pi(y)) = [\pi(y), \pi \circ \zeta)] \in TX$ pro libovolný vektor $\Xi(y) = [(y, \zeta)] \in TY$. Vektorové pole Ξ na Y se nazývá *π-projektabilní*, jestliže existuje vektorové pole ξ na X tak, že $T\pi(\Xi) = \xi$. Význačným speciálním případem π-projektabilních vektorových polí jsou tzv. *vertikální* vektorová pole Ξ_V s vlastností $T\pi(\Xi_V) = 0$, tj. vektorová pole s nulovými složkami „podél" báze X.

Uvažujme nyní jednoparametrickou grupu transformací (α_t, α_{0t}) variety (Y, π, X), kde t je reálný parametr. Pro pevné $y \in Y$ je obrazem otevřeného intervalu parametrů křivka $t \to \alpha_t(y)$, jíž odpovídá tečný vektor v bodě y. Provedeme-li tuto konstrukci v každém bodě $y \in Y$, vznikne na (Y, π, X) projektabilní vektorové pole, jednoznačně určené danou grupou transformací. Naopak, každým projektabilním vektorovým polem Ξ je jednoznačně určena soustava jeho integrálních křivek a lokální jednoparametrická grupa transformací $(\alpha_t^{\Xi}, \alpha_{\xi_t}^{\Xi})$ variety (Y, π, X). *Prodloužení* $j^r\Xi$ vektorového pole Ξ se pak zavádí vztahem

$$j^r\Xi(j^r\gamma(x)) = \left\{\frac{d}{dt} j^r\alpha_t^{\Xi}\gamma\alpha^{\xi}(\alpha_{-t}^{\xi}(x))\right\}_0,$$

kde γ (resp. x) probíhá množinu $\Gamma(\pi)$ (resp. X).

Diferenciální formy, horizontalizace, Eulerova-Lagrangeova forma

K pojmu diferenciální p-formy na varietě, dnes již běžně v matematické fyzice používanému, pouze připomeňme, že jde o pole antisymetrických p-lineárních zobrazení p vektorových argumentů z tečného prostoru k varietě v daném bodě w do tělesa reálných čísel, kde w probíhá danou varietu. Základní informace o formách a operacích s nimi (vnější derivace d, vnější součin $\wedge$, Lieova derivace ∂_ξ podle vektorového pole ξ, kontrakce i_ξ a pullback f^* asociovaný se zobrazením f) najde čtenář například v knihách [9, 10].

Důležitou roli na fibrovaných varietách hraje pojem horizontální formy. *Horizontální* p-forma na fibrované varietě (Y, π, X) je p-forma na Y, která se anuluje vždy, když alespoň jeden z jejích vektorových argumentů je vertikální vektor. V souřadnicovém vyjádření takové formy se pak objeví jen diferenciály dx^i, $1 \leqq i \leqq n$ (složky formy obecně závisí na všech souřadnicích x^i, y^σ). Zcela analogicky jsou definovány horizontální formy na prodloužení (j^rY, π_r, X) variety (Y, π, X). Libovolné p-formě ω na (j^rY, π_r, X) lze přiřadit jednoznačně horizontální formu $h(\omega)$ na $(j^{r+1}Y, \pi_{r+1}, X)$ tak, aby platilo $j^r\gamma^*\omega = j^{r+1}\gamma^*h(\omega)$ pro každé $\gamma \in \Gamma(\pi)$. Toto přiřazení h se nazývá *horizontali-*

zace. V souřadnicích je lze definovat vztahy $h(f) = f$ pro funkci (0-formu), a dále $h(\mathrm{d}x^i) = \mathrm{d}x^i$, $h(\mathrm{d}y^\sigma_{j_1 \dots j_k}) = y^\sigma_{j_1 \dots j_k l}\, \mathrm{d}x^l$, kde formy na pravých stranách chápeme jako formy na $(j^{r+1}Y, \pi_{r+1}, X)$. Tyto vztahy spolu s požadavkem linearity a zachování vnějšího součinu pak definují horizontalizaci pro formy vyšších stupňů.

Diferencovatelnou funkci $L = L(x^i, y^\sigma, y^\sigma_{j_1}, \dots, y^\sigma_{j_1 \dots j_r})$ na (j^rY, π_r, X) nazveme *Lagrangeovou funkcí* a horizontální n-formu $\lambda = L\omega_0$ na (j^rY, π_r, X), kde $\omega_0 = \mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n$, *Lagrangeovou formou* nebo prostě *lagrangiánem*. Funkce $E_\sigma(L)$, tvořící levé strany Eulerových-Lagrangeových rovnic Lagrangeovy funkce L, nazveme *Eulerovými-Lagrangeovými výrazy*. Eulerovy-Lagrangeovy výrazy mají tvar

$$E_\sigma(L) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \mathrm{d}_{i_1} \dots \mathrm{d}_{i_j} \frac{\partial L}{\partial y^\sigma_{i_1 \dots i_j}},$$

kde používáme standardní sumační konvenci a kde d_i značí úplnou derivaci vzhledem k x^i. Funkce $E_\sigma(L)$ lze považovat za složky pole geometrického objektu definovaného invariantně, tj. na souřadnicích nezávisle, tzv. *Eulerovy-Lagrangeovy formy* $E_\lambda = E_\sigma(L)\, \omega^\sigma \wedge \omega_0$ lagrangiánu λ, kde $\omega^\sigma = \mathrm{d}y^\sigma - y^\sigma_l\, \mathrm{d}x^l$. Tzv. *Eulerovo-Lagrangeovo zobrazení*, přiřazující lagrangiánu λ jeho Eulerovu-Lagrangeovu formu, je lineární a pro každou transformaci (α, α_0) variety (Y, π, X) platí $j^{2r}\alpha^* E_\lambda = E_{j^r\alpha^*\lambda}$. Poslední vztah vyjadřuje skutečnost, že Eulerovo-Lagrangeovo zobrazení je *přirozené*, tj. že Eulerova-Lagrangeova forma transformovaného lagrangiánu je rovna transformované Eulerově-Lagrangeově formě původního lagrangiánu. Řešení *Eulerových-Lagrangeových rovnic* $E_\sigma(L) = 0$ jsou řezy $\gamma \in \Gamma(\pi)$, které nazýváme *extremály* lagrangiánu λ.

3. ZOBECNĚNÉ TRANSFORMACE INVARIANCE

Geometrické nebo fyzikální symetrie konfiguračního prostoru se odráží ve vlastnostech invariance rovnic, charakterizujících vývoj daného fyzikálního systému, a obráceně vlastnosti invariance pohybových rovnic vedou k důležitým symetriím jejich řešení. Vzniklou situaci lze v rámci variační teorie charakterizovat tzv. zobecněnými transformacemi invariance lagrangiánu daných rovnic [11]. Říkáme, že transformace (α, α_0) fibrované variety (Y, π, X) je *zobecněná transformace invariance* lagrangiánu prvního řádu λ, zachovává-li Eulerovu-Lagrangeovu formu E_λ, tj. platí-li $j^2\alpha^* E_\lambda = E_\lambda$.

Význam uvedené definice spočívá především v souvislosti *grup* zobecněných transformací invariance s integrály pohybových rovnic, z nichž některé lze v mechanice interpretovat jako zachovávající se veličiny (například energie, hybnost).

Definici zobecněné transformace invariance lagrangiánu lze přímo přenést do teorie polí vyššího řádu. Poněvadž pro lagrangián λ na j^rY je Eulerova-Lagrangeova forma E_λ definovaná na $j^{2r}Y$, říkáme, že transformace (α, α_0) fibrované variety (Y, π, X) je *zobecněná transformace invariance* λ, platí-li

$$j^{2r}\alpha^* E_\lambda = E_\lambda .$$

Některé třídy zobecněných transformací invariance lze charakterizovat jednoparametrickými grupami, jednoznačně určenými jejich generátory (viz kap. 2). Úloha nalezení všech jednoparametrických grup zobecněných transformací invariance je tedy ekvivalentní nalezení příslušných generátorů. V důkazu tvrzení, které k tomu zformulujeme, stejně jako v teorii tzv. „diferenciálních zákonů zachování", hraje podstatnou roli diferenciální forma

$$\Theta_\lambda = L\omega_0 + \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=0}^{r-1} f_\sigma^{ij_1\ldots j_k}\omega^\sigma_{j_1\ldots j_k}\Big) \wedge \omega_i \,, \tag{1}$$

kde

$$\omega_i = (-1)^{i-1}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i-1} \wedge \mathrm{d}x^{i+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n \,,$$

$$f_\sigma^{ij_1\ldots j_k} = \sum_{l=0}^{r-k-1} (-1)^l\, \mathrm{d}_{i_1} \ldots d_{i_l} \frac{\partial L}{\partial y^\sigma_{i_1\ldots i_l i j_1\ldots j_k}} \,,$$

asociovaná s lagrangiánem r-tého řádu $\lambda = L\omega_0$. Tato forma patří do důležité třídy tzv. *Lepageových ekvivalentů* lagrangiánu λ, umožňujících invariantní formulaci teorie variačních problémů vyššího řádu [12]. Čtenář se může přesvědčit přímým rozepsáním vztahu (1), že v klasické mechanice, tj. pro $n = 1$, $r = 1$, vede tato forma ke konstrukci zobecněných hybností a hamiltoniánu. Zobecněné transformace invariance jsou charakterizovány tímto tvrzením:

Transformace (α, α_0) *fibrované variety* (Y, π, X) *je zobecněnou transformací invariance lagrangiánu* λ *právě tehdy, když pro jisté přirozené číslo* $s \geqq r$ *lze najít diferenciální* $(n-1)$*-formu* η *definovanou na* $j^s_{\blacksquare}Y$ *takovou, že platí* $\lambda - j^r\alpha^*\lambda = h(\mathrm{d}\eta)$

Důkaz tohoto tvrzení, využívající jednak vlastností horizontalizace, jednak linearity a přirozenosti Eulerova-Lagrangeova zobrazení, se opírá o podmínku charakterizující tzv. jádro Eulerova-Lagrangeova zobrazení, definované jako množina všech takových lagrangiánů λ, pro něž jsou Eulerovy-Lagrangeovy rovnice identicky splněny, tj. $E_\lambda \equiv 0$ Je známo, že všechny tyto lagrangiány vzniknou horizontalizací vnější derivace jisté $(n-1)$-formy η definované na j^sY, $s \geqq r$, tj. $\lambda = h(\mathrm{d}\eta)$. Tato skutečnost je pro r-tý řád důsledkem teorie Lepageových forem [12], pro první řád ji lze dokázat přímo [3]. Podmínka $E_\lambda - j^{2r}\alpha^*E_\lambda = 0$, charakterizující fakt, že (α, α_0) je zobecněná transformace invariance, je vzhledem k přirozenosti a linearitě Eulerova-Lagrangeova zobrazení ekvivalentní podmínce $E_{\lambda - j^r\alpha^*\lambda} = 0$, z níž vyplývá existence formy η s vlastností $\lambda - j^r\alpha^*\lambda = h(\mathrm{d}\eta)$.

Uvažujeme-li jednoparametrickou grupu $(\alpha_t^\Xi, \alpha_t^\xi)$ zobecněných transformací invariance lagrangiánu s generátorem Ξ, jehož projekce je ξ, pak podmínka $\lambda - j^r\alpha_t^{\Xi*}\lambda = h(\mathrm{d}\eta_t)$ platí pro každé t z jistého otevřeného intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$ a derivací podle t v bodě $t = 0$ dostáváme *infinitezimální verzi* kritéria zobecněné invariance

$$\partial_{j^r\Xi}\lambda = h(\mathrm{d}\eta)$$

(s formou η na parametru t již nezávislou). Tuto rovnci lze považovat za zobecnění rovnice Noetherové-Bessel-Hagenovy (NBH), známé z teorie prvního řádu [3, 11]. Tato rovnice není jen kritériem pro zjištění, zda *dané* vektorové pole Ξ generuje grupu zobecněných transformací invariance *daného* lagrangiánu. Její význam je podstatně širší: jestliže η probíhá prostor $(n - 1)$-forem definovaných na $j^s Y$, $s \geqq r$, lze řešením rovnice vzhledem k neznámé Ξ nalézt všechny generátory jednoparametrických grup zobecněných transformací invariance daného lagrangiánu nebo naopak, řešením vzhledem k λ určit všechny lagrangiány, kterým přísluší jednoparametrická grupa zobecněných transformací invariance generovaná daným vektorovým polem Ξ. Množina všech generátorů grup zobecněných transformací invariance má, stejně jako v případě lagrangiánu prvního řádu, strukturu Lieovy algebry (tento fakt můžeme použít např. při řešení rovnice NBH).

Přejdeme nyní ke studiu lagrangiánů se zadanými zobecněnými transformacemi invariance. Nechť λ je lagrangián r-tého řádu, Ξ generátor jednoparametrické grupy zobecněných transformací invariance. Uvažujme Lepageův ekvivalent (1) lagrangiánu λ. Podle standardních pravidel pro počítání s Lieovými derivacemi je

$$\partial_{j^{2r-1}\Xi}\Theta_\lambda = i_{j^{2r-1}\Xi}\, \mathrm{d}\Theta_\lambda + \mathrm{d}i_{j^{2r-1}\Xi}\Theta_\lambda .$$

Odtud užitím rovnice NBH a úpravami dostaneme $h(\partial_{j^{2r-1}\Xi}\Theta_\lambda) = \partial_{j^r\Xi}\lambda = h(\mathrm{d}\eta) = h(i_{j^{2r-1}\Xi}\, \mathrm{d}\Theta_\lambda) + h(\mathrm{d}i_{j^{2r-1}\Xi}\Theta_\lambda) = i_{j^{2r}\Xi}E_\lambda + h(\mathrm{d}i_{j^{2r-1}\Xi}\Theta_\lambda)$. Pro každou *extremálu* $\gamma : X \to Y$ tedy platí

$$j^{2r-1}\gamma^* h(\mathrm{d}\eta - \mathrm{d}i_{j^{2r-1}\Xi}\Theta_\lambda) = \mathrm{d}j^{2r-1}\gamma^*(\eta - i_{j^{2r-1}\Xi}\Theta_\lambda) = 0 . \tag{2}$$

Toto tvrzení je obsahem *prvního teorému E. Noetherové* pro lagrangián λ. Diferenciální forma $\eta - i_{j^{2r-1}\Xi}\Theta_\lambda$ se nazývá *noetherovský tok* asociovaný s generátorem Ξ. Samotný vztah (2) se nazývá *diferenciálním zákonem zachování* toku $\eta - i_{j^{2r-1}\Xi}\Theta_\lambda$. Vzhledem ke svému tvaru se dá snadno (pomocí Stokesovy věty) integrovat na n-rozměrných oblastech $\Omega \subset X$. Pro případ klasické mechaniky částic se noetherovské toky stávají funkcemi poloh a rychlostí částic.

Uvedené výsledky, formulované globálně pro fibrovanou varietu zavedenou v kap. 2, lze zobecnit na případ obecných fibrovaných variet s tím, že jejich charakter bude pouze lokální, obecně však nemohou být bez dodatečných předpokladů o topologické struktuře fibrované variety (Y, π, X) rozšířeny na celou varietu.

4. INVARIANCE A INVERZNÍ PROBLÉM VARIAČNÍHO POČTU

V této části práce formulujeme a řešíme problém, jak k daným transformacím symetrie fyzikálního systému najít diferenciální rovnice *invariantní* vůči těmto transformacím a zároveň *variační*, tj. odvoditelné z nějakého lagrangiánu jako jeho Eulerovy-Lagrangeovy rovnice. Podobný problém pro lagrangiány prvního řádu byl studován v práci [7]. Obdobné problémy se vyskytují ve fyzice při studiu struktury interakcí fyzikálních systémů, jejichž symetrie jsou známé.

Přejdeme k přesnější formulaci. Uvažujme fibrovanou varietu (Y, π, X) a systém funkcí ε_σ, na $j^{2r}Y$, kde $\sigma = 1, \ldots, m$, $m = \dim Y - \dim X$. Tyto funkce definují systém parciálních diferenciálních rovnic řádu $2r$

$$\varepsilon_\sigma\left(x^i, f^\nu(x^i), \frac{\partial f^\nu}{\partial x^i}, \ldots, \frac{\partial^{2r} f^\nu}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_{2r}}}\right) = 0 \tag{3}$$

pro neznámé funkce $f^\nu = f^\nu(x^i)$. Klademe při standardním značení $\varepsilon = \varepsilon_\sigma \omega^\sigma \wedge \omega_0$. ε je diferenciální $(n + 1)$-forma na $j^{2r}Y$. Říkáme, že systém rovnic (3) je *variační*, existuje-li lagrangián λ tak, že ε je jeho Eulerova-Lagrangeova forma, $\varepsilon = E_\lambda$, tj. že $\varepsilon_\sigma = E_\sigma(L)$. Nechť dále G je Lieova grupa transformací fibrované variety (Y, π, X). Řekneme, že systém rovnic (3) je *G-invariantní*, jestliže forma ε je invariantní vzhledem ke každé transformaci grupy G. K řešení výše formulovaného problému nyní použijeme rovnici Noetherové-Bessel-Hagenovu a větu o řešení inverzního variačního problému, dokázanou v práci [12]. Současným uplatněním těchto vět dostáváme toto tvrzení:

Systém rovnic (3) je variační a G-invariantní tehdy a jen tehdy, jsou-li splněny tyto dvě podmínky:

(I) *Pro každé vektorové pole Ξ, generující transformace grupy G*

$$\partial_{j^{2r}\Xi}\varepsilon = 0 . \tag{4}$$

(II) *Funkce ε_σ splňují systém rovnic*

$$\frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial y^\nu_{j_1 \ldots j_l}} - (-1)^l \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial y^\sigma_{j_1 \ldots j_l}} - \sum_{k=l+1}^{r} (-1)^k \binom{k}{l} \mathrm{d}_{j_{l+1}} \ldots \mathrm{d}_{j_k} \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial y^\sigma_{j_1 \ldots j_k}} = 0 , \tag{5}$$

$l = 0, \ldots, r$.

K praktickému určení G-invariantních a variačních rovnic tedy použijeme vztahů (4), (5), ve kterých ε_σ jsou hledané funkce. Pak s každým vektorovým polem Ξ, generujícím transformace grupy G, lze svázat jistý noetherovský tok. Skutečně, podle předpokladu existuje lagrangián λ tak, že $\varepsilon = E_\lambda$, Ξ tedy generuje zobecněné transformace invariance lagrangiánu λ a hledaný noetherovský tok dostaneme ve tvaru $\eta - i_{j^{2r-1}\Xi}\Theta_\lambda$ (viz kap. 3). Je tedy a priori jasné, že získané rovnice $\varepsilon_\sigma = 0$ mají „pohybové" integrály, definované grupou G analogicky jako v klasické mechanice, a že tyto integrály lze explicitně určit.

Na závěr uvedeme aplikaci obecné teorie v mechanice částic [7].

Fibrovanou varietou systému dvou částic v klasické mechanice je $(R \times R^3 \times R^3, \pi, R)$, kde $R^3 \times R^3$ je konfigurační prostor (6 stupňů volnosti) a čas t probíhá bázi R. Na varietě $R \times R^3 \times R^3$ působí jako grupa transformací strukturní grupa klasické mechaniky – Galileiho grupa G. Nechť $t \to (x^i(t), y^i(t))$ je křivka v $R^3 \times R^3$, $i = 1, 2, 3$, a hledejme systém rovnic druhého řádu

$$\begin{aligned} &\varepsilon_k(t, x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i, y^i, \dot{y}^i, \ddot{y}^i) = 0 , \\ &\bar{\varepsilon}_k(t, x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i, y^i, \dot{y}^i, \ddot{y}^i) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

pro tuto křivku („trajektorii" dvou částic). Lze ukázat, že tento systém rovnic je G-invariantní a variační právě tehdy, když

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= f_{kj}\ddot{x}^j + h_{kj}\ddot{y}^j + g_k , \\ \bar{\varepsilon}_k &= \bar{f}_{kj}\ddot{x}^j + \bar{h}_{kj}\ddot{y}^j + \bar{g}_k \end{aligned}$$

pro $j, k = 1, 2, 3$, kde

$$f_{kj} = f \cdot g_{ij}r^i g_{kl}r_l + \frac{\partial h}{\partial \beta}(g_{ij}\dot{r}^i g_{kl}r^l + g_{ij}r^i g_{kl}r^l + g_{ij}r^i g_{kl}\dot{r}^l) +$$

$$+ 2\frac{\partial h}{\partial \gamma} g_{ij}\dot{r}^i g_{kl}\dot{r}_l + h \cdot g_{kj},$$

$$h_{kj} = \bar{f}_{kj} = -f_{kj} + cg_{kj}, \bar{h}_{kj} = f_{kj} + Kg_{kj},$$

$$g_k = -\bar{g}_k = \varphi g_{kl}r^l + \psi g_{kl}r^l,$$

a platí

$$2\frac{\partial f}{\partial \gamma} = \frac{\partial^2 h}{\partial \beta^2}, \psi = 2\frac{\partial h}{\partial \alpha}\beta + \frac{\partial h}{\partial \beta}\gamma,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = 2\frac{\partial f}{\partial \alpha}\beta + \frac{\partial f}{\partial \beta}\gamma, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} = f - \frac{\partial h}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 h}{\partial \alpha \partial \beta}\beta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial \beta^2}\gamma.$$

Zde $r^i = x^i - y^i$, $\dot{r}^i = \dot{x}^i - \dot{y}^i$, $g_{kl} = \delta_{kl}$ jsou komponenty metrického tenzoru, f, h, φ, ψ jsou funkce proměnných $\alpha = g_{ij}r^i r^j$, $\beta = g_{ij}\dot{r}^i r^j$, $\gamma = g_{ij}\dot{r}^i \dot{r}^j$ a c, K jsou libovolné konstanty.

Z rozboru těchto rovnic mj. vyplývá, že třetí Newtonův zákon je přímým důsledkem variačnosti pohybových rovnic. Newtonovy rovnice jsou speciálním případem rovnic (6); jsou to právě ty rovnice, které mají lagrangián tvaru $L = T_1 + T_2 - U$, kde T_1, T_2 jsou lagrangiány volných částic a interakční člen U závisí pouze na proměnné r^i.

Literatura

[1] NOETHER E.: *Invariante Variationsprobleme.* Göttigen Nachr. 1918, 235—258.

[2] TRAUTMAN A.: *Invariance of Lagrangian systems, in General Relativity.* Clarendon Press, Oxford, 1972, 85—99.

[3] KRUPKA D.: *On generalized invariant transformations.* Rep. Math. Phys. (Toruň) *5* (1974), 353—358.

[4] LANDAU L. D., LIFŠIC E. M : *Teorija uprugosti.* Nauka, Moskva, 1967.

[5] ANDERSON D.: *Noether's theorem in generalized mechanics.* J. Phys. A.: Math., Nucl., Gen. *6* (1973), 299—305.

[6] SARLET V., CANTRIJN F.: *Higher order Noether symmetries and constants of the motion.* J. Phys. A.: Math. Gen. *14* (1981), 479—492.

[7] ŠTEFANOVÁ M., ŠTĚPÁNKOVÁ O.: *Variationality and invariance of systems of partial differential equations.* Práce SVOČ, MFF UK Praha (1982), Scripta Fac. Sci. Nat. UJEP Brunensis, v tisku.

[8] KRUPKA D., MUSILOVÁ J.: *Calculus of odd base forms on differential manifolds.* Folia Fac. Sci. Nat. UJEP Brunensis, Brno, v tisku.

[9] ABRAHAM R., MARSDEN J. E.: *Foundations of Mechanics.* Benjamin/Cummings Publ. Comp., Inc., London, 1978.

[10] SPIVAK M.: *Matematičeskij analiz na mnogoobrazijach.* Mir, Moskva 1968.

[11] TRAUTMAN A.: *Noether equation and conservation laws.* Commun. Math. Phys. *6* (1967), 248—261.

[12] KRUPKA D.: *Lepageanform sin higher order variational theory.* Sborník Symposia o moderních směrech v analytické mechanice, Torino (1982), v tisku.