Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Milan Pišl; Jan Novotný

Úpatnicový pohyb

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 4 (1959), No. 5, 529--537

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139400

POKROKY MATEMATIKY, FYSIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK IV — ČÍSLO 5

MATEMATIKA

ÚPATNICOVÝ POHYB

M. Pišl a J. Novotný
katedra matematiky a d. geometrie na fakultě elektrotechnické ČVUT

V článku jsou studovány některé vlastnosti úpatnicového pohybu a ukázána jeho souvislost s kotálením. Popudem k zpracování byl referát v semináři o kinematické geometrii vedeném prof. Pírkem na katedře matematiky a d. geometrii fakulty elektrotechnické. Použito bylo komplexní symboliky tak jak se s ní pracuje v uvedeném semináři.*) Z této symboliky připomeňme:

Poloha libovolného pevného bodu roviny je určena komplexním číslem $z = x + \mathrm{j}y$, kde x a y jsou jeho kartézské souřadnice (v tomto pořadí).

Poloha běžného bodu čáry C zadané parametrickými rovnicemi $x = u_1(t)$, $y = u_2(t)$ ($u_i(t)$, $i = 1, 2$ reálné funkce reálného argumentu t) je v komplexní symbolice určena rovnicí $x + \mathrm{j}y = u_1(t) + \mathrm{j}u_2(t)$ čili komplexní funkcí $u(t)$ reálného argumentu t ve tvaru $z = u(t)$. Rovnici téže čáry C v neparametrickém tvaru dostaneme eliminací parametru t z rovnic $z = u(t)$ a $\bar{z} = \bar{u}(t)$, kde $\bar{z}(t) = u_1(t) - \mathrm{j}u_2(t)$. (Z komplexního vyjádření čáry $z = u(t)$ lze přejít k polárnímu $\varrho = \varrho(\varphi)$ vyloučením parametru t ze vztahů

$$\varrho = |z| = |u(t)|\,,$$
$$\varphi = \arg z = \arg u(t).)$$

Na příklad kružnice, zadaná parametrickými rovnicemi $z = m + r\cos t$, $y = n + r\sin t$ má v komplexní symbolice rovnici $z = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}$, kde $z_0 = m + {}$ $+ \mathrm{j}n$. Vynásobením rovnic

$$z - z_0 = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}$$
$$\bar{z} - \bar{z}_0 = r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}$$

vyloučíme parametr t a neparametrická rovnice kružnice (v komplexním tvaru) zní $(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2$.

Geometrický význam diferenciálu $\mathrm{d}z = u'(t)\,\mathrm{d}t$ je dán vztahem

$$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}z| = |u'(t)|\,\mathrm{d}t\,,$$

kde $\mathrm{d}s$ je diferenciál oblouku čáry $z = u(t)$. Pro čáru $z = u(s)$, kde parametr s je oblouk této čáry, platí $u'\bar{u}' = 1$.

Pod pojmem úpatnicový pohyb budeme rozumět komplanární pohyb neproměnného útvaru určeného takto:

*) Viz M. Pišl, *Křivky v Gaussově rovině*, PMFA-1-II/1957, str. 4 a další.

Dvě pevné přímky relativní (pohyblivé) roviny, které svírají stále stejný daný úhel ω, se pohybují tak, že jedna přímka prochází stále daným pevným bodem a druhá se stále dotýká dané křivky v absolutní (pevné) rovině.

Bude-li úhel sevřený oběma přímkami pravý, nazveme tento pohyb obyčejný úpatnicový pohyb.

1. Některé vlastnosti úpatnic a protiúpatnic

Nechť je dána v rovině křivka C o parametrické rovnici $u = u(s)$, kde parametr s je oblouk této křivky, a bod M o polohovém radiusvektoru z_M. Veďme bodem M přímku π_1 tak, aby s každou tečnou π_2 křivky C svírala stále stejný úhel ω. Pak

*Geometrické místo průsečíků M_ω přímek π_1 a π_2 nazýváme **šikmou úpatnicí** Γ_ω bodu M vzhledem ke křivce C jako základní.*

Je-li úhel ω pravý $\left(\omega = \frac{\pi}{2}\right)$, nazývá se geometrické místo pat kolmic spuštěných z bodu M na všechny tečny křivky C obyčejnou (pravoúhlou) úpatnicí bodu M vzhledem ke křivce C jako základní.

Je-li přímka π_2 normálou dané křivky C, pak geometrickým místem průsečíků přímek π_1 a π_2 je šikmá protiúpatnice ev. obyčejná (pravoúhlá) protiúpatnice $\left(\text{pro } \omega = \frac{\pi}{2}\right)$ bodu M vzhledem ke křivce C jako základní. Bodu M se říká také někdy pól.

Tečna, orientovaná shodně s křivkou $u = u(s)$ (která nechť je orientována kladně s rostoucím parametrem), má v libovolném bodě u křivky $u = u(s)$ (pokud nebude nebezpečí, že dojde k nedorozumění budeme parametr vynechávat) isotropickou směrnici u' a neparametrickou rovnici $[z - u, u'] = 0$ odkud plyne

$$(z - u)\,\bar{u}' - (\bar{z} - \bar{u})\,u' = 0\,. \tag{1}$$

Označme ϑ úhel přímky π_2 a φ úhel přímky π_1 s první osou souřadnic. Pak ze vztahu

$$\widehat{\pi_2\pi_1} = \omega = \varphi - \vartheta + 2k\pi\,,$$

k celé takové, že $-\pi < \varphi - \vartheta + 2k\pi \leqq \pi$, plyne pro isotropickou směrnici přímky π_1

$$e^{j\vartheta} = e^{j(\omega+\varphi)} = u' e^{j\omega}\,.$$

Přímka π_1 jdoucí bodem z_M má tedy rovnici

$$(z - z_M)\,\bar{u}' e^{-j\omega} - (\bar{z} - \bar{z}_M)\,u' e^{j\omega} = 0\,. \tag{2}$$

Za předpokladu $\omega \neq 0$ a $\omega \neq \pi$ (tyto případy nemají pro naši úlohu smysl a omezíme se tedy v dalším na interval $0 < \omega < \pi$) dostaneme vyloučením $\bar{z}$ z rovnic (1) a (2)

$$z_\omega = c(\omega)\,((u - z_M) - (\bar{u} - \bar{z}_M)\,u'^2) + z_M\,, \tag{3}$$

kde $c(\omega) = \dfrac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}$, parametrické vyjádření pro radiusvektor průsečíku přímek π_1 a π_2. Index ω se vztahuje k příslušné volbě úhlu sevřeného přímkami π_1 a π_2 a je tedy rovnice (3) zároveň parametrickou rovnicí hledaného geometrického místa, tj. parametrickou rovnicí šikmé úpatnice bodu z_M vzhledem ke křivce $u = u(s)$, kde parametr s je oblouk původní čáry (nikoli již oblouk úpatnice).

Volíme-li speciálně $\omega = \frac{\pi}{2}$ dostaneme parametrickou rovnici obyčejné úpatnice

$$z_{\pi/2} = \tfrac{1}{2}((u - z_M) - (\bar{u} - \bar{z}_M) u'^2) + z_M . \tag{4}$$

Zcela analogicky odvodíme rovnice šikmé a obyčejné protiúpatnice Γ^*_ω a $\Gamma^*_{\pi/2}$, jestliže přímka π_2 je normálou dané křivky. Pro radiusvektor z^*_ω resp. $z^*_{\pi/2}$ dostaneme parametrické vyjádření

$$z^*_\omega = c(\omega) ((u - z_M) + (\bar{u} - \bar{z}_M) u'^2) + z_M \tag{3x}$$

resp.

$$z^*_{\pi/2} = \tfrac{1}{2}((u - z_M) + (\bar{u} - \bar{z}_M) u'^2) + z_M , \tag{4x}$$

kde opět $c(\omega) = \dfrac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}$.

Zjednodušení rovnic (3), (3x), (4) ,(4x) dosáhneme tím, že za pól zvolíme absolutní počátek 0. Dostaneme tak

$$z_\omega = c(\omega) (u - \bar{u}u'^2) \quad \text{resp.} \quad z_{\pi/2} = \tfrac{1}{2}(u - \bar{u}u'^2) \tag{5}$$

pro šikmou resp. obyčejnou protiúpatnici počátku vzhledem ke křivce $u = u(s)$, a

$$z^*_\omega = c(\omega) (u + \bar{u}u'^2) \quad \text{resp.} \quad z^*_{\pi/2} = \tfrac{1}{2}(u + \bar{u}u'^2) \tag{6}$$

pro šikmou resp. obyčejnou protiúpatnici počátku vzhledem ke křivce $u = u(s)$.

2. Vztahy mezi úpatnicemi

Rovnice (3) představuje jednoparametrické množství čar, bude-li ω nabývat všechny možné hodnoty z intervalu $0 < \omega \leqq \pi/2$. Vyberme si dvě libovolné z těchto křivek, které přísluší úhlům ω_1 a ω_2, tj. zvolme si dvě šikmé úpatnice Γ_{ω_1} a Γ_{ω_2} téhož bodu M vzhledem k téže křivce základní $u = u(s)$. Pro jejich radiusvektory platí podle rovnice (3)

$$z_{\omega_1} = c(\omega_1) ((u - z_M) - (\bar{u} - \bar{z}_M) u'^2) + z_M ,$$
$$z_{\omega_2} = c(\omega_2) ((u - z_M) - (\bar{u} - \bar{z}_M) u'^2) + z_M .$$

Spojením těchto rovnic dostaneme

$$z_{\omega_1} - z_M = \frac{c(\omega_1)}{c(\omega_2)} (z_{\omega_2} - z_M) .$$

Dosadíme-li ještě za podíl $\dfrac{c(\omega_1)}{c(\omega_2)} = \dfrac{\sin \omega_1}{\sin \omega_2} e^{j(\omega_1 - \omega_2)}$ máme

$$z_{\omega_1} - z_M = \frac{\sin \omega_1}{\sin \omega_2} (z_{\omega_2} - z_M) e^{j(\omega_1 - \omega_2)} .$$

Na pravé straně této rovnice jsou dva činitelé závislí pouze na volbě úhlů ω_1, ω_2, čili konstanty. Lze tedy vyslovit tuto větu:

Libovolná úpatnice dané základní křivky vzhledem k témuž pólu je podobná kterékoli jiné úpatnici téhož bodu vzhledem k téže křivce základní.

Tuto větu je možno ještě dále precisovat:

Kterákoli úpatnice Γ_ω dané základní křivky vzhledem k témuž pólu je až na otočení o úhel $(\omega - \omega_i)$ stejnolehlá s kteroukoli jinou úpatnicí Γ_{ω_i} téhož bodu vzhledem k téže křivce základní a to s poměrem stejnolehlosti $\dfrac{\sin \omega_i}{\sin \omega}$.

Zcela analogicky bychom dokázali platnost obdobné věty pro všechny negativní úpatnice (protiúpatnice).

3. Obálka jednoparametrické soustavy šikmých úpatnic

Právě odvozená vlastnost všech úpatnic téže dané základní křivky vzhledem k témuž pólu nám např. skýtá možnost ulehčení některých výpočtů při vyšetřování vlastností úpatnic. Můžeme se totiž omezit na vyšetřování úpatnice pravoúhlé a vlastnosti přenést na úpatnice šikmé. Dříve si však ještě odvoďme tuto vlastnost úpatnic:

Obálkou jednoparametrické soustavy všech úpatnic téže základní křivky vzhledem k témuž pólu je základní křivka.

Nutnou podmínkou pro existenci obálky jednoparametrické (parametr ω) soustavy čar (5), z nichž každá je vyjádřena rovněž parametricky (parametr s), je platnost rovnice

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \omega} : \frac{\partial \bar{z}}{\partial \omega}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial s} : \frac{\partial \bar{z}}{\partial s}\right) = 0\,. \tag{7}$$

Tato podmínka je pouze nutná proto, že nemusí vést vždycky k obálce v obvyklém slova smyslu, nýbrž ke geometrickému místu singulárních bodů křivek dané jednoparametrické soustavy. Tento případ vyloučíme; předpokládáme tedy existenci obálky ve vlastním slova smyslu. Její rovnici určíme vyloučením parametru ω z rovnice (5) užitím rovnice (7). Vzhledem k této podmínce vypočteme postupně:

$$\frac{\partial z}{\partial \omega} = c'(\omega)\,(u - \bar{u}u'^2) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial \omega} : \frac{\partial \bar{z}}{\partial \omega} = -\,\frac{u - \bar{u}u'^2}{\bar{u} - u\bar{u}'^2}\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = c(\omega)\,(-\,2jk\bar{u}u'^2) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial s} : \frac{\partial \bar{z}}{\partial s} = \frac{\bar{u}u'^2}{u\bar{u}'^2}\,e^{2j\omega}\,,$$

kde k je křivost základní křivky a pomocí níž jsme nahradili u'' a $\bar{u}''$.

Dosadíme-li takto vypočtené výrazy do podmínky (7), nalezneme možnost explicitního vyjádření parametru ω parametrem s:

$$e^{-2j\omega} = -\,\frac{\bar{u}(u - \bar{u}u'^2)}{u(\bar{u} - u\bar{u}'^2)}\,. \tag{8}$$

Vypočtěme z rovnice (5) $e^{-2j\omega}$. Snadnou úpravou dostaneme

$$z = \frac{1}{1 - e^{-2j\omega}}\,(u - \bar{u}u'^2)$$

a odtud

$$e^{-2j\omega} = 1 - \frac{u - \bar{u}u'^2}{z}\,. \tag{9}$$

Porovnejme oba výrazy pro $e^{-2j\omega}$ (8) a (9); plyne odtud

$$\frac{z}{u - \bar{u}u'^2} = \frac{u(\bar{u} - u\bar{u}'^2)}{u(\bar{u} - u\bar{u}'^2) + \bar{u}(u - \bar{u}u'^2)} .$$

Jmenovatel pravé strany se dá upravit na tvar $(\bar{u} - u\bar{u}'^2)(u - \bar{u}u'^2)$, takže dostáváme

$$z = u ,$$

tj. parametrickou rovnici základní křivky. Lze tedy vyslovit větu:

Obálkou (jestliže ovšem existuje) jednoparametrické soustavy všech (šikmých) úpatnic dané základní křivky vzhledem k témuž pólu je tato základní křivka sama.

4. Tečna a normála v bodě úpatnice

Položme si otázku, zda úpatnice sama není obálkou nějaké soustavy čar. Každé z úpatnic přísluší tyto tři charakteristické body: Pól, příslušný dotykový bod na základní čáře a příslušný bod úpatnice. Každými z těchto tří bodů je jednoznačně určena kružnice o komplexní rovnici

$$\begin{vmatrix} z\bar{z} & z & \bar{z} \\ u\bar{u} & u & \bar{u} \\ c\bar{c}(u - \bar{u}u'^2)(\bar{u} - u\bar{u}'^2) & c(u - \bar{u}u'^2) & \bar{c}(\bar{u} - u\bar{u}'^2) \end{vmatrix} = 0 ,$$

kde $c = c(\omega)$. Po vyčíslení a úpravě přejde rovnice kružnice určená třemi shora uvedenými body v jednoduchý tvar

$$z\bar{z} - \bar{c}\bar{u}z - cu\bar{z} = 0 , \tag{10}$$

kde koef. $c = c(\omega)$ má stejný význam jako v rovnici úpatnice.

Rovnice (10), protože koef. $u = u(s)$ je závislý na parametru s, představuje jednoparametrické množství takových kružnic. Hledejme jejich obálku. Derivujeme-li rovnici (10) podle s dostaneme

$$\bar{c}\bar{u}'z + cu'\bar{z} = 0 . \tag{11}$$

Z rovnic (10) a (11) vypočteme z jako funkci u. Je

$$z^2 - c(\omega)(u - \bar{u}u'^2) z = 0$$

a odtud (poněvadž $z \neq 0$)

$$z = c(\omega)(u - \bar{u}u'^2) .$$

Výsledek lze tedy shrnout ve větu:

Úpatnice dané základní křivky vzhledem k pólu je obálkou jednoparametrické soustavy kružnic určených: pólem, příslušným dotykovým bodem na základní křivce a příslušným bodem úpatnice.

Odtud je již zřejmá konstrukce normály a tečny libovolné úpatnice dané základní křivky vzhledem k pólu: *Normálu sestrojíme jako spojnici bodu úpatnice se středem kružnice jdoucí pólem, bodem úpatnice a příslušným dotykovým bodem na základní křivce.*

Pro obyčejnou úpatnici sestrojíme normálu jako spojnici bodu úpatnice se středem úsečky OT, kde O je pól a T příslušný bod na základní křivce (dotykový).

Snadno bychom ukázali, že všechny kružnice konstruované shora uvedeným způsobem (pro tutéž základní křivku a tentýž pól) jsou ve stejném vztahu jako příslušné úpatnice, tj. jsou až na otočení stejnolehlé. Přitom úhel otočení a poměr stejnolehlosti jsou tytéž jako pro všechny úpatnice téže základní křivky vzhledem k témuž pólu.

Je evidentní, že na námi konstruovaných kružnicích leží také příslušný bod protiúpatnice dané základní křivky vzhledem k témuž pólu a pro tutéž hodnotu úhlu ω (obdobné vlastnosti těchto křivek by se ukázaly zcela analogicky).

5. Odvození pohybových rovnic úpatnicového pohybu

Jak již bylo řečeno dříve, definujeme úpatnicový pohyb jako komplanární pohyb určený takto: Dané dvě orientované přímky π_1 a π_2 relativní soustavy, které svírají konst. úhel ω $(-\pi < \omega < \pi, \omega \neq 0)$ se pohybují tak, že přímka π_2 je kladně orientovanou tečnou pevné orientované křivky C absolutní roviny a přímka π_1 prochází stále pevným bodem M absolutní roviny.

Nechť křivka C má v absolutní rovině parametrickou rovnici $u = u(s)$, a parametr s nechť je oblouk této křivky (tj. $u'\bar{u}' = 1$). Orientace nechť je volena kladně s rostoucím parametrem. Položme počátek O absolutní soustavy do bodu M. Relativní soustavu Σ zvolme takto: relativní počátek Ω položme do průsečíku M_ω přímek π_1 a π_2 a orientovanou přímku π_2 zvolme za první osu.

Zvolíme-li v relativní soustavě Σ pevný bod (ζ), bude analytické vyjádření úpatnicového pohybu jakožto pohybu komplanárního znít:

$$z = m + \zeta n\,, \tag{12}$$

kde komplexní funkce $m = m(s)$ a $n = n(s)$ udávají polohu soustavy Σ vzhledem k soustavě S v každé fázi pohybu. Při tom $n = n(s)$ je jednotková tj. $|n| = 1$. Naší úlohou je určit funkce $m(s)$ a $n(s)$ tak, aby byly splněny podmínky charakterisující úpatnicový pohyb, tj. aby v každé fázi:

1. přímka π_1 procházela bodem M,
2. přímka π_2 byla tečnou křivky C.

Při naší volbě relativní soustavy souřadné má přímka π_1 jakožto první relativní osa rovnici

$$\zeta - \bar{\zeta} = 0\,,$$

a přímka π_2 relativní rovnici

$$\zeta \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} - \bar{\zeta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} = 0\,.$$

V určité pevné fázi pohybu představuje rovnice (12) zároveň transformační rovnici mezi soustavou Σ a S. Dosadíme-li za ζ z rovnice (12) do relativních rovnic přímek π_1 a π_2 dostaneme jejich absolutní rovnice

$$(z - m)\,\bar{n} - (\bar{z} - \bar{m})\,n = 0\,, \tag{x}$$

$$(z - m)\,\bar{n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} - (\bar{z} - \bar{m})\,n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} = 0\,. \tag{xx}$$

Vyjádříme-li pomocí rovnic (x) a (xx) podmínky 1. a 2. pro úpatnicový pohyb, dostaneme

$$\bar{n}m - n\bar{m} = 0\,, \tag{11x}$$

$$(z - u)\,\bar{u}' - (\bar{z} - \bar{u})\,u' \equiv \lambda((z - m)\,\bar{n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} - (\bar{z} - \bar{m})\,n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\,,\ \lambda \neq 0\,. \tag{12x}$$

Z identity (12x) plyne

$$\lambda n = u'\,,\quad \lambda\bar{n} = \bar{u}'\,,\quad (\bar{m}n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - m\bar{n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) = \bar{u}u' - u\bar{u}'$$

a odtud eliminací parametru λ:

$$n = u' , \tag{12}$$

$$\bar{n}e^{-j\omega}m - ne^{j\omega}\bar{m} = u\bar{u}' - \bar{u}u' . \tag{12xx}$$

Rovnicí (12) je určena hledaná funkce $n = n(s)$. Dosazením do rovnic (11x) a (12x) dostaneme soustavu

$$\bar{u}'m - u'\bar{m} = 0 , \quad e^{-j\omega}\bar{u}'m - e^{j\omega}u'\bar{m} = u\bar{u}' - \bar{u}u' ,$$

určující druhou hledanou funkci $m = m(s)$. Řešením plyne

$$m = c(\omega)(u - \bar{u}u'^2) , \tag{13}$$

kde $c(\omega) = \dfrac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}$ je komplexní konstanta závislá pouze na úhlu ω. Dosazením (12) a (13) do rovnice (11) dostaneme pohybovou rovnici úpatnicového pohybu

$$z = c(\omega)(u - \bar{u}u'^2) + \zeta u' . \tag{14}$$

Pro $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ dostaneme pro obyčejný úpatnicový pohyb

$$z = \tfrac{1}{2}(u - \bar{u}u'^2) + \zeta u' . \tag{15}$$

6. Určení rovnic polhodií

Z podmínky pro nulovost okamžitého přírůstku dráhy ve fázi $s = s_0$ úpatnicového pohybu (14) plyne

$$- 2c(\omega)\,\bar{u}(s_0)\,u'(s_0)\,u''(s_0) + {}^1\zeta u''(s_0) = 0 , \tag{16}$$

a odtud (za předpokladu $u'' \neq 0$)

$${}^1\zeta = 2c(\omega)\,\bar{u}(s_0)\,u'(s_0) . \tag{16x}$$

V každé fázi $s = s_0$ pohybu (14) existuje tedy v relativní soustavě právě jeden bod, jehož relativní radiusvektor je vyjádřen rovnicí (16x), který je v okamžitém klidu. Obráceně, každý bod ζ relativní soustavy, který splňuje vztah

$$\zeta = 2c(\omega)\,\bar{u}(s)\,u'(s) , \tag{17}$$

je ve fázi s v okamžitém klidu. Rovnice (17) je tedy parametrickou rovnicí tzv. hybné polhodie.

Užitím transf. rovnice (14) pro fázi $s = s_0$ najdeme pro bod ${}^1z$ absolutní roviny, který v této fázi splývá s bodem ${}^1\zeta$ daným rovnicí (16x), vyjádření

$${}^1z = c(\omega)\,(u(s_0) + \bar{u}(s_0)\,u'^2(s_0)) . \tag{16xx}$$

Obráceně, každý bod z absolutní roviny, který splňuje vztah

$$z = c(\omega)\,(u(s) + \bar{u}(s)\,u'^2(s)) \tag{18}$$

splývá ve fázi s s bodem ζ relativní soustavy, který je v této fázi v klidu.

Rovnice (18) je parametrickou rovnicí tzv. pevné polhodie. Srovnáním rovnice (18) s rovnicí (6) lze vyslovit větu

Pevnou polhodií daného úpatnicového pohybu je protiúpatnice dané základní čáry $u = u(s)$ vzhledem k danému pevnému bodu M.

7. Nahrazení úpatnicového pohybu kotálením

Ukážeme, že úpatnicový pohyb, popsaný rovnicí (14) lze nahradit kotálením hybné polhodie po polhodii pevné tohoto pohybu. To znamená, že trajektorie libovolného pevného bodu roviny Σ v rovině S při daném úpatnicovém pohybu je táž, jako trajektorie téhož pevného bodu, pohybuje-li se relativní soustava tak, že se hybná polhodie kotálí po polhodii pevné.

Nutnou a postačující podmínkou pro kotálení je, aby se dvě čáry dotýkaly a v dotyčných bodech měly shodné diferenciály oblouků.

V předcházejícím odstavci bylo ukázáno, že v každé fázi úpatnicového pohybu splývá bod ${}^1z = c(\omega)\,(u + \bar{u}u'^2)$ pevné polhodie s bodem ${}^1\zeta = 2c(\omega)\,\bar{u}u'$ hybné polhodie. Stačí tedy ukázat, že v těchto bodech obě polhodie mají společnou tečnu a rovné diferenciály oblouků.

Tečna v bodě ${}^1\zeta$ hybné polhodie má vzhledem k soustavě Σ isotropickou směrnici kolineární s

$$ {}^1\zeta' = 2c(\omega)\,(1 + \bar{u}u'')\,, \tag{19}$$

která vzhledem k soustavě S má tvar (užitím (14))

$$ {}^1\zeta'_S = 2c(\omega)\,u'(1 + \bar{u}u'')\,, \tag{19x}$$

kde indexem S vyznačujeme, že měříme vzhledem k soustavě S, tj. vzhledem k první absolutní ose.

Tečna v bodě ${}^1z$ pevné polhodie má isotropickou směrnici kolineární s

$$ {}^1z' = 2c(\omega)\,u'(1 + \bar{u}u'')\,. \tag{20}$$

Srovnáním rovnic (19x) a (20) plyne, že hybná a pevná polhodie mají ve společných bodech společnou tečnu, čili že se dotýkají.

Pro diferenciály oblouků dostáváme z rovnic (19) a (20)

$$ \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\sigma^2\,,$$

kde symbolem s vyznačujeme oblouk na pevné polhodii a symbolem σ oblouk na hybné polhodii. Skutečně, hybná a pevná polhodie mají ve společných bodech až na orientaci shodné diferenciály oblouků.

Lze tedy úpatnicový pohyb nahradit kotálením jeho polhodií.

9. Podvojné kotálnice

V pevné rovině je dána čára $z = f(s)$ a v hybné rovině čára $\zeta = \bar{f}(s)$, kde s je oblouk na obou čarách, takže platí $f' . \bar{f}' = 1$.

V hybné rovině zvolíme pevný bod ζ_0. Jeho trajektorií v pevné rovině je čára o rovnici

$$ z = f + (\zeta_0 - \bar{f})\,\frac{f'}{\bar{f}'} = f + (\zeta_0 - \bar{f})\,f'^2\,. \tag{21}$$

Ukážeme, že tato čára: je stejnolehlá s obyčejnou úpatnicí základní čáry $z = f(s)$ v poměru $2 : 1$, při čemž pólem i středem je bod $z_0 = \bar{\zeta}_0$, tj. bod, který má v pevné rovině touž polohu vzhledem k základní čáře $z = f(s)$, jakou má v pohyblivé rovině bod ζ_0 vzhledem k čáře $\zeta = \bar{f}(s)$.

Pro obyčejnou úpatnici čáry $z = f(s)$ vzhledem k bodu $z_0 = \bar{\zeta}_0$ jako pólu platí (viz (3))

$$ u = \tfrac{1}{2}\,((f - z_0) - (\bar{f} - \bar{z}_0)\,f'^2) + z_0 = \tfrac{1}{2}\,((f + \bar{\zeta}_0) - (\bar{f} - \zeta_0)\,f'^2)\,.$$

Poněvadž pro čáru u^0, která je s ní stejnolehlá v poměru 2 : 1 vzhledem k bodu $z_0 = \bar{\zeta}_0$ jako středu, platí

$$u^0 = 2(u - z_0) + z_0 = 2u - \bar{\zeta}_0 ,$$

dostáváme

$$u^0 = f + \bar{\zeta}_0 - (\bar{f} - \zeta_0) f'^2 - \bar{\zeta}_0 = f + (\zeta_0 - \bar{f}) f'^2 = z ,$$

čímž je tvrzení dokázáno. Lze tedy vyslovit větu

Kotálí-li se křivka vně po shodné křivce, dotýkajíc se jí v homologických bodech, popíše libovolný bod, pevně s ní spojený, trajektorii, která je homotetická v poměru 2 : 1 k úpatnici pevné polhodie vzhledem k bodu, který má k ní touž polohu, jakou má vytvořující bod k pohyblivé polhodii.

O DÉLCE KŘIVKY[1])

J. M. Landis (Moskva)

Látka v tomto článku vyložená je — jak ukázala zkušenost — dobře přístupná žákům nejvyšších tříd středních škol, kteří mají zájem o matematiku. Byla předmětem přednášky, určené pro žáky 9. a 10. tříd[2]). Domníváme se, že hlavní myšlenka výkladu pojmu délky křivky, jak je dále podána, by se mohla zpracovat pro školní výuku matematice. *J. M. L.*

Délku křivky lze jak známo definovat různým způsobem. Podáme zde definici, která není příliš známa celé matematické obci, neboť se opírá o myšlenky A. N. Kolmogorova, týkající se ovšem případu obecnějšího[3]) (libovolné tak zvané A-množiny v n-rozměrném prostoru).

Kolmogorovova definice je však velmi blízká naší intuitivní představě o délce. Podle našeho názoru je této představě blíže než klasická definice, vycházející z vepisovaných lomených čar (jde jen o metodologickou stránku otázky, neboť — jak ukážeme dále — obě definice jsou ekvivalentní), a dále, což je obzvláště podstatné, pomocí této definice lze dokázat, že délku křivky lze zavést jediným způsobem při některých přirozených požadavcích.

Budeme zkoumat křivky v rovině. Pro jednoduchost se omezíme na prosté oblouky, to jest na vzájemně jednoznačné a spojité obrazy úsečky (na oblouky homeomorfní s úsečkou[4])).

---

[1]) Е. М. Ландис, О длине кривой, Matěmatičeskoje prosveščenije, 1957, č. 1.

[2]) Přednášku konal autor 11. listopadu 1956 na Moskevské státní universitě.

[3]) Vyloženo v článku A. N. Kolmogorov, *Beiträge zur Masstheorie*, Mathematische Annalen 107, 1932, str. 351—356.

[4]) O homeomorfním zobrazení viz na příklad článek Boltjanskij a Jefremovič, *O topologii I*, v tomto časopise, č. 3, 1959.