Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Michal Křížek

Padesát let metody konečných prvků

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 37 (1992), No. 3, 129--140

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139386

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1992

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Padesát let metody konečných prvků

Michal Křížek, Praha

Metoda konečných prvků (MKP) je v současné době považována za nejefektivnější numerickou metodu pro řešení problémů matematické fyziky, tj. problémů popsaných diferenciálními či integrálními rovnicemi nejrůznějších typů, systémy těchto rovnic, variačními nerovnicemi apod. Typickým příkladem jsou parciální diferenciální rovnice popisující elektrický, magnetický nebo gravitační potenciál, Schrödingerova rovnice, rovnice vedení tepla, Navierovy-Stokesovy rovnice proudění, systém Maxwellových rovnic, nerovnice pro kontakt dvou pružně plastických těles atd.

Za objevitele MKP*) je považován prof. Richard Courant, německého původu, jehož práce [4] byla dne 16. června 1942 podána v redakci Bulletin of American Mathematical Society. Na str. 21 zmíněné práce se nad triangulovanou dvojrozměrnou oblastí hledá přibližné řešení jistého variačního problému ve tvaru spojité po částech lineární funkce. V té době se ovšem ještě nepoužívaly samočinné počítače, takže se na tuto novou a počtářsky náročnou metodu pozapomnělo. Asi o 10 let později byla MKP znovu objevena americkými inženýry při provádění pevnostních výpočtů leteckých konstrukcí na prvních komerčních počítačích.

Za první monografii o MKP lze patrně považovat Syngeho knihu [18] z roku 1957, kde jsou již vyšetřeny aproximační vlastnosti spojitých po částech lineárních funkcí nad triangulovanou oblastí. Od té doby vzniklo alespoň 100 knih a 10 000 článků o MKP, jejichž částečný přehled lze nalézt v [13, 19, 21]. Za nejlepší jsou považovány monografie [1, 3, 9, 17, 22].

Aplikační možnosti MKP vedly k bouřlivému vývoji software pro řešení pestrého spektra technických i vědeckých úloh. Celý výpočení proces totiž může být podstatně automatizován, tj. generování triangulací, sestavování matic tuhosti, řešení vzniklých soustav algebraických rovnic, grafické znázornění výsledků apod. lze svěřit počítači. Další velkou předností MKP je to, že umožňuje dokonale popsat vyšetřovanou oblast, což nebylo možné u klasických metod (jako např. u metody kolokací či metody sítí). Pro teoretickou numerickou analýzu (existence řešení, důkazy konvergence, odhady chyb atd.) je výhodné, že se MKP většinou opírá o fyzikální variační principy. To jednak umožňuje využívat efektivních nástrojů funkcionální analýzy a také nevyžaduje dodatečných předpokladů na vyšší hladkost řešení jako u klasických metod.

*) Počátky rozvoje MKP jsou podrobně popsány v [15].

RNDr. MICHAL KŘÍŽEK, CSc. (1952) je samostatným vědeckým pracovníkem Matematického ústavu ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.

Základní myšlenka metody konečných prvků

Pro jednoduchost se omezíme pouze na hledání řešení Poissonovy rovnice

$$-\Delta u = f \quad \text{v } \Omega \tag{1}$$

s homogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou

$$u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \tag{2}$$

kde Ω je polyedrická oblast v R^d ($d \geqq 1$) s hranicí $\partial\Omega$, $\Delta u = \partial^2 u/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2 u/\partial x_d^2$ a $f \in L^2(\Omega)$ je zadaná funkce. Analytické řešení této úlohy není obecně známo, a tak nám nezbývá, než ji řešit pouze přibližně. MKP pro přibližné řešení problému (1)–(2) vychází z jeho slabé (variační) formulace. K tomuto účelu si zavedeme Sobolevův prostor testovacích funkcí V, který lze formálně zapsat takto:

$$V = \{v \in L^2(\Omega) \mid \operatorname{grad} v \in (L^2(\Omega))^d,\ v = 0 \text{ na } \partial\Omega\}. \tag{3}$$

Poznamenejme, že pokud první „zobecněné" parciální derivace funkce v patří do $L^2(\Omega)$, pak má smysl uvažovat i hodnoty funkce v na hranici $\partial\Omega$ (podrobnosti viz [3, 12]).

Vynásobíme-li rovnici (1) libovolnou funkcí $v \in V$ a zintegrujeme-li obě strany vzniklé rovnice přes Ω, pak pomocí integrace per partes (Greenovy formule) dostaneme

$$(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) = (f, v) \quad \forall v \in V, \tag{4}$$

kde $(.,.)$ označuje standardní skalární součin v $(L^2(\Omega))^r$, $r = 1, 2, \ldots$. Je známo, že existuje právě jedno tzv. slabé (zobecněné) řešení $u \in V$ splňující (4).

Nekonečně dimenzionální problém (4) nyní nahradíme konečně dimenzionálním pomocí Ritzovy-Galerkinovy metody. Buď $V_h \subset V$ nějaký konečně dimezionální podprostor, $n = \dim V_h$ a hledejme $u_h \in V_h$ tak, aby

$$(\operatorname{grad} u_h, \operatorname{grad} v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{5}$$

Opět lze ukázat, že existuje právě jedno řešení $u_h \in V_h$, pokud $V_h \neq \emptyset$.

Hledáme-li $u_h \in V_h$ ve tvaru lineární kombinace bázových funkcí $v^1, \ldots, v^n$ prostoru V_h,

$$u_h = \sum_{j=1}^{n} c_j v^j, \tag{6}$$

pak pro neznámé $c_1, \ldots, c_n \in R^1$ dostaneme ze vztahů (5) a (6) soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\sum_{j=1}^{n} (\operatorname{grad} v^i, \operatorname{grad} v^j) c_j = (f, v^i), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

jejíž matice je symetrická a pozitivně definitní. Tato matice je ale obecně plná.

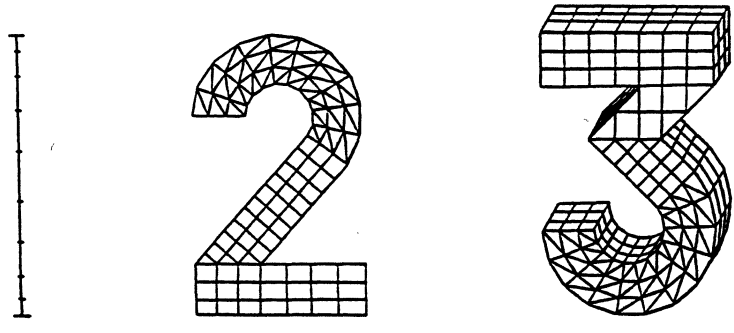
Metodu konečných prvků lze charakterizovat jako speciální případ Ritzovy-Galerkinovy metody, kdy prostor V_h a v něm bázové funkce volíme tak, aby matice

$$A = \Big((\operatorname{grad} v^i, \operatorname{grad} v^j)\Big)_{i,j=1}^{n} \tag{8}$$

soustavy (7) byla řídká, tj. aby jen $\mathcal{O}(n)$ prvků matice A bylo nenulových. To nám pak umožňuje podstatně rychleji vyřešit soustavu (7) a také mnohem snadněji uchovat matici (8) v paměti počítače než v případě plné matice. Poznamenejme, že matici (8) se v MKP tradičně říká matice tuhosti. Úlohy lineární statiky, jež byly MKP řešeny nejdříve, totiž vedou k maticím, které vyjadřují „tuhost" — vztah mezi zatížením a odpovídající deformací tělesa.

Řídkosti matice tuhosti se u MKP dosahuje pomocí následujících tří kroků:

(i) Stanoví se rozklad (triangulace) $\mathcal{T}_h$ vyšetřované oblasti na jednodušší uzavřené podoblasti, tzv. prvky (většinou úsečky, trojúhelníky, čtyřúhelníky, čtyřstěny, pětistěny nebo šestistěny) — viz obr. 1.



Obr. 1. Rozklad 1, 2, 3-dimenzionální oblasti na prvky.

(ii) Volí se prostor V_h tak, aby funkce $v_h \in V_h$ byly na každém prvku velmi jednoduchého tvaru (většinou polynomiální). Takový prostor V_h se pak nazývá prostorem konečných prvků.

(iii) Stanoví se báze $v^1, \ldots, v^n$ ve V_h tak, aby všechny v^i měly „malé" nosiče (tj. míra oblasti, kde v^i je nenulová, musí být malá ve srovnání s mírou oblasti Ω).

Pro ilustraci kroků (i)–(iii) uvedeme snad nejčastěji používaný prostor spojitých po částech lineárních funkcí pro $d = 2$. V tomto případě triangulace $\mathcal{T}_h$ bude konečná množina trojúhelníků taková, že

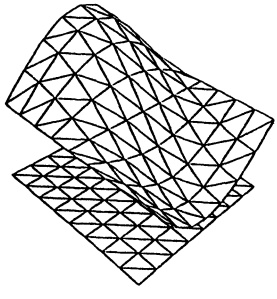
$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$$

a že každé dva různé trojúhelníky z $\mathcal{T}_h$ mají společnou pouze jednu celou stranu nebo jeden vrchol nebo jsou disjunktní. Symbol h (tzv. diskretizační parametr) charakterizuje maximální velikost trojúhelníků v triangulaci $\mathcal{T}_h$.

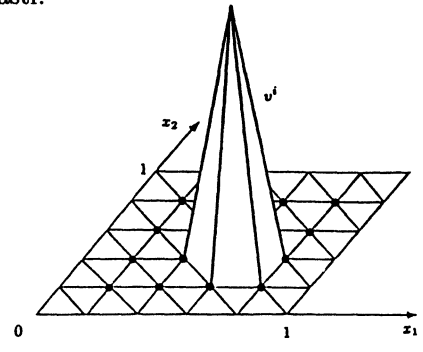
Abychom splnili (ii), položíme

$$V_h = \{v_h \in V \mid v_h|_K \in P_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \tag{9}$$

kde $P_1(K)$ značí prostor lineárních polynomů nad trojúhelníkem K. Lze dokázat (viz [12, str.27]), že funkce z V_h jsou spojité. Na obrázku 2 vidíme příklad takové funkce $v_h \in V_h$ nad triangulovanou čtvercovou oblastí.



Obr. 2. Graf funkce $v_h \in V_h$.



Obr. 3. Courantova bázová funkce.

Pro splnění nejdůležitějšího kroku (iii) označme $z_1, \ldots, z_n \in \Omega$ vnitřní uzly triangulace (tj. vrcholy trojúhelníků). Pak existuje báze $v^1, \ldots, v^n$ prostoru V_h taková, že

$$v^i(z_j) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases} \tag{10}$$

Tyto funkce splňují (iii) a nazývají se Courantovy bázové funkce na počest objevitele MKP. Typický tvar v^i odpovídající uzlu z_i je nakreslen na obrázku 3. V daném případě je nosič bázové funkce v^i šestiúhelník složený ze šesti trojúhelníků. Vidíme, že pokud z_i a z_j $(i \neq j)$ nejsou sousední uzly, je

$$(\operatorname{grad} v^i, \operatorname{grad} v^j) = 0,$$

což zaručuje řídkost matice tuhosti (8). Očíslujeme-li uzly z_i po řádcích, pak z (8) a (10) lze odvodit, že matice tuhosti, odpovídající triangulaci na obr. 3, má tvar

(11)
$$\begin{pmatrix}
4 & & & & & & & & & & & & & & & \\
-1 & 4 & & & & & & & & & & & & & & s \\
0 & -1 & 4 & & & & & & & & & & & & & y \\
0 & 0 & -1 & 4 & & & & & & & & & & & & m \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 4 & & & & & & & & & & & \\
0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4
\end{pmatrix}$$

Ze vztahů (6) a (10) navíc máme, že

$$u_h(z_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j v^j(z_i) = c_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

tj. vyřešením soustavy (7) přímo dostáváme hodnoty přibližného řešení u_h v uzlových bodech.

Povšimněme si ještě, že řešení u_h problému (5) je nezávislé na volbě bázových funkcí. Naproti tomu struktura (řídkost, pásovost, ...) matice (8) na volbě báze podstatně závisí.

Co je konečný prvek ?

Konečným prvkem rozumíme uspořádanou trojici (K, P, Σ), kde $K \subset R^d$ je prvek (tj. uzávěr omezené oblasti s neprázdným vnitřkem a lipschitzovskou hranicí), P je prostor funkcí definovaných na K a Σ je konečná množina lineárně nezávislých spojitých lineárních funkcionálů definovaných na P (tzv. stupňů volnosti konečného prvku*)).

Tak například pro lineární trojúhelníkový konečný prvek je K trojúhelník, $P = P_1(K)$ a $\Sigma = \{\Phi_i\}_{i=1}^3$, kde stupně volnosti Φ_i jsou definovány vztahem

$$\Phi_i(p) = p(Z_i), \quad p \in P_1(K), \; i = 1, 2, 3, \tag{12}$$

a kde Z_i (tzv. uzly konečného prvku) jsou vrcholy K. Není těžké se přesvědčit, že pro každou trojici reálných čísel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ existuje právě jeden polynom $p \in P_1(K)$,

$$p(x_1, x_2) = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2, \quad (x_1, x_2) \in K,$$

*) Stupňům volnosti se někdy též říká parametry konečného prvku.

takový, že

$$\Phi_i(p) = \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Jinými slovy řečeno, zadáme-li hodnoty ve vrcholech trojúhelníka K, pak existuje právě jedna lineární funkce, která těchto hodnot nabývá. Této vlastnosti se říká unisolventnost daného prvku. Vidíme tedy například, že pokud $p(Z_i) = 0$ pro $i = 1, 2, 3$, pak $p \equiv 0$ na K. Odtud a z (10) již přímo vidíme, že lze konstruovat bázové funkce s malými nosiči, což bylo požadováno v kroku (iii).

Geometrická interpretace MKP

Pro jednoduchost se opět omezíme jen na problém (1)–(2). Je-li tedy prostor V dán vztahem (3), pak

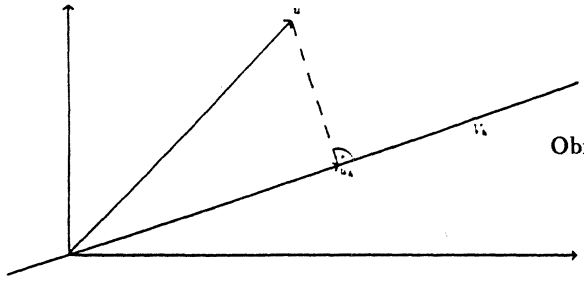
$$a(v, w) = (\text{grad } v, \text{grad } w), \quad v, w \in V,$$

reprezentuje skalární součin ve V, což plyne ze známé Friedrichsovy nerovnosti.

Odečtením vztahu (5) od (4) ihned dostáváme následující podmínku ortogonality:

$$a(u - u_h, v_h) = (\text{grad}(u - u_h), \text{grad } v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h,$$

která říká, že chyba $u - u_h$ je kolmá na podprostor $V_h \subset V$ vzhledem ke skalárnímu součinu $a(.,.)$ – viz obrázek 4.



Obr. 4. Geometrická interpretace MKP.

Z podmínky ortogonality navíc plyne, že

$$a(u - u_h, u - u_h) = \inf_{v_h \in V_h} a(u - v_h, u - v_h),$$

tj. MKP dává nejlepší aproximaci vzhledem k tzv. energetické normě $\sqrt{a(.,.)}$.

Poznamenejme ještě, že úloha (5) je ekvivalentní úloze hledání minima funkcionálu

$$J(v_h) = \frac{1}{2} a(v_h, v_h) - (f, v_h)$$

na prostoru V_h .

Shrnutí základních problémů v MKP

K základním problémům MKP patří vytvoření triangulace vyšetřované oblasti, sestavení a řešení vzniklé soustavy algebraických rovnic a studium otázek konvergence přibližného řešení k řešení přesnému, když se diskretizační parametr h blíží k nule. Navíc při řešení problémů složitějších než (1)-(2) (zejména nelineárních) je třeba mít vždy na paměti otázku existence a jednoznačnosti přesného a přibližného řešení.

Pro rovinné úlohy již existuje bezpočet poměrně jednoduchých algoritmů, které umožňují provést triangulaci dané oblasti. Rozklad prostorové oblasti na prvky může představovat mnohem obtížnější problém (např. když oblast není polyedrická), jehož zvládnutí se často neobejde bez aktivní lidské účasti.

Pro konstrukci prostorů konečných prvků je potřeba vyšetřovat unisolventnost použitých prvků. Pokud jsou všechny stupně volnosti ve tvaru hodnoty polynomu v bodě (viz např. (12)), hovoříme o Lagrangeových prvcích. Obsahují-li stupně volnosti hodnoty derivací (i vyšších) v bodě, hovoříme o Hermitových prvcích. Stupně volnosti však mohou mít zcela jiný tvar (např. $p \mapsto \int_K p \, \mathrm{d}x$). Vyšetřování unisolventnosti konečných prvků s větším počtem stupňů volnosti může představovat technicky dosti komplikovaný problém.

Prostory konečných prvků V_h je třeba konstruovat tak, aby pro zjemňující se triangulace bylo sjednocení $\cup_h V_h$ husté v daném prostoru testovacích funkcí V s normou $\|.\|_V$. Jen za tohoto předpokladu lze totiž očekávat, že přibližná řešení u_h budou konvergovat k přesnému řešení u, tj.

$$\|u - u_h\|_V \to 0 \quad \text{pro } h \to 0. \tag{13}$$

Pro lineární (ale i některé nelineární) eliptické okrajové úlohy (viz např. (1)–(2)) lze otázku konvergence (13) přímo převést na vyšetřování aproximačních vlastností prostorů konečných prvků. To plyne ze Céova lemmatu [3], které tvrdí, že existuje konstanta $C > 0$ nezávislá na V_h tak, že

$$\|u - u_h\|_V \leqq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

Pokud je přesné řešení u dostatečně hladké, pak má smysl definovat jeho interpolaci $\pi_h u \in V_h$ a lze očekávat i jistou rychlost konvergence MKP, tj.

$$\|u - u_h\|_V \leqq C\|u - \pi_h u\|_V = \mathcal{O}(h^q), \quad h \to 0,$$

pro jisté $q > 0$, které závisí na použitých konečných prvcích.

Je-li například V dáno vztahem (3), pak lze normu $\|.\|_V$ přirozeně definovat takto:

$$\|v\|_V = ((v, v) + (\operatorname{grad} v, \operatorname{grad} v))^{1/2}. \tag{14}$$

Interpolace $\pi_h v$ z prostoru (9) je pak spojitá po částech lineární funkce taková, že $\pi_h u(z) = u(z)$ pro všechny uzly z odpovídající triangulaci $\mathcal{T}_h$. Budou-li úhly všech

trojúhelníků menší než nějaká pevná konstanta menší než 180°, která nezávisí na parametru h, platí následující apriorní odhad chyby (viz např. [2])

$$\|u - u_h\|_V \leqq C(u)h, \tag{15}$$

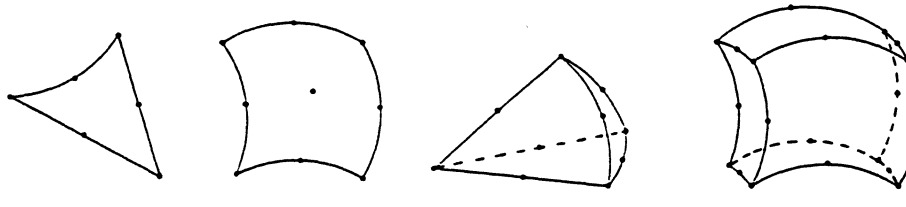
kde u, resp. u_h, je definováno (4), resp. (5), a kde $C(u)$ závisí jen na druhých derivacích u. Z (14) a (15) je patrné, že konvergují i první derivace řešení. Často se však vyšetřují i konvergence v jiných normách (např. v normě $L^2(\Omega)$, $C(\overline{\Omega})$ apod.).

Vztah (5) odpovídá tzv. primárnímu modelu MKP. Studují se ale též jiné modely (např. duální, smíšené, hybridní), které se opírají o jiné variační formulace než primární model. Současným použitím primárního a duálního modelu MKP lze získat dvoustranné odhady energie řešení a aposteriorní odhady chyby [14]. Je-li např. q_h přibližné řešení problému (1)–(2) pomocí duálního modelu, platí

$$\|u - u_h\|_V \leqq C\|q_h - \operatorname{grad} u_h\|_{(L^2(\Omega))^d}, \tag{16}$$

kde C je známá konstanta, tj. celou pravou stranu v odhadu (16) po provedení výpočtu známe.

Další třída problémů vzniká, má-li Ω křivočarou hranici. Pokud Ω aproximujeme polyedrem Ω_h, pak obecně nemusí být $V_h \subset V$ a hovoříme o tzv. nekonformní MKP. Nedokonalá aproximace oblasti Ω se může odrazit ve ztrátě přesnosti přibližného řešení. Východiskem jsou křivočaré (izoparametrické) prvky — viz obrázek 5, přestože jejich nasazení pro trojrozměrné úlohy může být značně obtížné. Například pro kouli neexistuje systém rozkladů (pro $h \to 0$) na čtyřstěny, které mají nejvýše jednu stěnu zakřivenou [12]. Musí se proto použít čtyřstěny s více zakřivenými stěnami nebo jiné prvky, což přináší další komplikace.



Obr. 5. Některé křivočaré prvky.

Zdrojem nepřesností je i numerická integrace. Například integrál

$$(f, v^i) = \int_\Omega f v^i \, \mathrm{d}x$$

ve vztahu (7) obecně nelze vypočítat analyticky. Počítáme-li jej numericky, pak ovšem dostaneme jiné přibližné řešení u_h^*, které je zatíženo chybou od numerické integrace, a tak vzniká nový problém odhadu normy $\|u - u_h^*\|_V$. Problémy jsou též s aproximacemi nehomogenních okrajových (nebo počátečních) podmínek nejrůznějších typů.

Protože matice tuhosti A je řídká, lze při vhodném očíslování bázových funkcí dosáhnout toho, že má pásovou strukturu (viz např. (11)). Vzniká tedy přirozený problém,

jak lze očíslovat bázové funkce, aby šíře pásu w matice A byla co nejmenší. Počet aritmetických operací při řešení soustavy (7) Gaussovou eliminací je totiž přímo úměrný nw^2. Samostatnou otázku zde tvoří odhady zaokrouhlovacích chyb.

Při řešení skutečných trojrozměrných úloh je počet neznámých většinou tak veliký, že nelze přímé eliminace použít, protože se při ní musí uchovávat ve vnitřní paměti počítače celý pás (nebo polopás pro symetrické matice). Je sice možno použít tzv. frontální metody, které uchovávají matici tuhosti ve vnější paměti. Tyto metody jsou však náročné na počet aritmetických operací a zejména na čas, neboť komunikace mezi vnější a vnitřní pamětí je relativně pomalá. Pro řešení trojrozměrných úloh se tedy většinou používají iterační metody, které umožňují skladovat ve vnitřní paměti pouze nenulové prvky matice A a samozřejmě nějakou informaci o jejich poloze v A. Zde se ovšem objevuje další třída problémů související např. s volbou počáteční iterace nebo volbou kritéria pro zastavení iteračního procesu. Je též zapotřebí zabývat se odhadem chyby přibližného řešení zatíženého navíc iterační chybou. Velký okruh problémů vzniká v případě, kdy výsledná soustava algebraických rovnic je nelineární.

Většina zmíněných problémů je již softwarově řešena v souborech programů pro MKP. K nejznámějším patří: ABAQUS, ALGOR, ANSYS, BRAVO 3, COSMOS, ELLPACK, I-DEAS FEM, INTERLIB, LUSAS, MARC, MODULEF, MSC/PROBE, MSC/NASTRAN, NISA, NONSAP, PAFEC, PATRAN, PLTMG, STRUDL, SYSTUS, TPS 10 aj. Uživatel ale bohužel většinou neví, jakým způsobem se daný soubor s příslušným problémem vypořádal.

MKP v Československu

Československou numerickou matematiku proslavila ve světě známá „brněnská škola", vedená prof. Milošem Zlámalem. Jeho práce [23] je jednou z nejcitovanějších prací o MKP. V ní je podán asymptotický odhad chyby MKP pro lineární eliptické okrajové úlohy 2. a 4. řádu. Velkých úspěchů dosáhla brněnská škola zejména při vyšetřování křivočarých prvků, superkonvergence MKP a řešení nelineárních problémů. Největší její přínos však spočívá v tom, že dala podnět k důkladné a systematické matematické analýze MKP.

V 60. letech se v Brně používala MKP také pro výpočet některých technických problémů (např. namáhání konstrukcí). Na toto téma zde vznikla i první čs. kniha o MKP [10] autorů Koláře, Kratochvíla, Leitnera a Ženíška. Tato publikace je orientována jak teoreticky, tak prakticky. Některé její výsledky byly již předtím zveřejněny v Rozpravách ČSAV [11].

Z dalších knih čs. autorů, které jsou matematicky orientovány, je třeba jmenovat [24] (částečně též [16]), kde je MKP použita pro časově závislé úlohy; dále knihu [12] zabývající se řešením variačních problémů. Přehled nejpoužívanějších konečných prvků lze nalézt v [20]. Tradiční problematikou u nás pěstovanou je studium problémů mechaniky kontinua, které se v současnosti řeší převážně MKP - viz [8,14]. Zde je třeba jmenovat i knihu [7], věnovanou optimalizaci tvaru těles pomocí MKP. Aplikaci MKP v problémech proudění je věnována monografie [5], připravená do tisku. Pro studenty MFF jsou určena výborná skripta [6].

Metoda konečných prvků se pěstuje nejen na vysokých školách a ve výzkumných ústavech, ale také v mnoha podnicích (ČKD, ŠKODA, ...). Konstruktéry je využívána pro výpočet konkrétních problémů z praxe, k testování prototypů a k simulaci nejrůznějších podmínek kladených na strojní a jiné součásti. Používá se například pro výpočet pevnosti vysokotlakých nádob, oteplení elektrických strojů, obtékání lopatek turbín, dynamického namáhání rámových konstrukcí (úplný seznam by byl dlouhý). K řešení těchto úloh vzniklo několik čs. souborů programů (ADAM, DEFOR, IDA, IVS MKP, NE-XX, PMD, PROKOP, R&M, SIGMA, ...).

Československo zorganizovalo řadu mezinárodních konferencí (APPLMATH I, EQUADIFF I-VII, ISNA II, LIBLICE I-IV, Mathematical Methods in Engineering I-VI, ...), kde bylo uvedeno množství přednášek o MKP. Uskutečnilo se i několik seminářů a letních škol zaměřených na MKP. Vcelku lze konstatovat, že rozvoj MKP v Československu snese srovnání s vyspělými krajinami a řada teoretických výsledků je světově uznávána.

Současné trendy v MKP

Nejnovější výsledky o MKP jsou publikovány ve více než 100 mezinárodních časopisech. K vyjmenování všech směrů, jimiž se nyní MKP ubírá, by tedy asi nestačilo ani celé číslo Pokroků. Proto se omezíme jen na ty nejpodstatnější.

K nim rozhodně patří adaptivní vytváření triangulací (zejména pro úlohy, jejichž řešení se prudce mění nebo má dokonce singularity). Na základě jistých aposteriorních odhadů se generují nové triangulace tak, aby např. chyba byla rovnoměrně rozložena po prvcích.

Velké oblibě se také těší metody více sítí (multigrid), které umožňují podstatně snížit počet aritmetických operací pro dosažení určité přesnosti. Tyto metody jsou iteračního charakteru a používají konečného počtu postupně se zjemňujících sítí (triangulací). Počet operací k získání přibližného řešení na nejjemnější síti lze pak zredukovat na $\mathcal{O}(n)$. Metody více sítí jsou často kombinovány s metodami dekompozice oblastí (substructuring), při nichž se vyšetřované těleso rozdělí na několik oblastí jednoduchého tvaru a na ně se pak použijí tzv. rychlé algoritmy.

Pro vyřešení vzniklé soustavy algebraických rovnic se v současnosti nejčastěji používají některé varianty metody sdružených gradientů. Jejich efektivnost lze zvýšit různými způsoby předpodmínění (preconditioning), což znamená, že místo původní soustavy se řeší jiná soustava (v jistém smyslu ekvivalentní), jejíž matice má menší číslo podmíněnosti [1,12]. Výsledkem je pak zrychlení konvergence iterací.

Pozoruhodný vývoj je zaznamenáván v počítačové realizaci MKP. Standardem se stal software, který umožňuje preprocessing, tj. uživatelsky příjemné zadání úlohy spolu s kontrolou vstupních údajů. Jsou vytvářeny interaktivní soubory programů MKP, které navíc umožňují spolupracovat např. s grafickými systémy CAD/CAM*) určenými pro automatické projektování. Existuje již množství špičkového software, který provádí postprocessing výstupních dat. Výstupy jsou nyní většinou ve formě izolinií,

*) Computer Aided Design/Computer Aided Manufacturing

různě obarvených, stínovaných nebo vyšrafovaných ploch, v perspektivním pohledu (viz obrázek 2) apod. Uživatel tím získá mnohem lepší představu o řešení daného problému než v dobách, kdy počítače chrlily stovky stran papíru potištěného dlouhými sloupci čísel. Řada algoritmů MKP je vyvíjena pro počítače s paralelní architekturou. Díky řídkosti matice tuhosti umožňují dnešní superpočítače zvládnout soustavy řádově až o 10^6 neznámých. Nejrozšířenější jsou ovšem implementace na osobních počítačích. Ty většinou v únosném čase vyřeší soustavy řádu až 10^4. Kvalitní programové systémy MKP jsou poměrně obsáhlé a v úhrnu mívají i přes 10^6 řádků zdrojového textu. Například systém I-DEAS FEM se sestává z přibližně 8.10^6 programových řádků a představuje zhruba 1200 „člověkoroků" vývojových prací.

Metoda konečných prvků se často kombinuje s dalšími metodami a teoriemi, jako je např. metoda hraničních prvků, teorie optimálního řízení a navrhování, teorie bifurkací, spektrální teorie operátorů, ... Nachází také stále širší uplatnění i v mnoha nefyzikálních oborech. Jmenujme např. lékařství (modelování pevnosti kostí a pružnosti cév), chemii (průběh chemických reakcí), ekologii (šíření exhalací) apod.

Závěrem mi dovolte poděkovat RNDr. J. Chlebounovi a RNDr. Z. Milkovi, kteří svými cennými připomínkami přispěli ke zlepšení obsahu článku.

Literatura

[1] O. Axelsson, V. A. Barker: *Finite Element Solution of Boundary Value Problems. Theory and Computation*, Academic Press, New York, 1984.

[2] I. Babuška, A. K. Aziz: SIAM J. Numer. Anal. *13* (1976), 214–226.

[3] P. G. Ciarlet: *The Finite Element Method for Elliptic Problems.* North-Holland, Amsterdam 1978.

[4] R. Courant: Bull. Amer. Math. Soc. *49* (1943), 1–23.

[5] M. Feistauer: *Mathematical Methods in Fluid Dynamics.* (Připraveno do tisku.)

[6] J. Haslinger: *Metoda konečných prvků pro řešení eliptických rovnic a nerovnic (skripta MFF UK).* SPN, Praha, 1980.

[7] J. Haslinger, P. Neittaanmäki: *Finite Element Approximation for Optimal Shape Design: Theory and Applications.* John Wiley & Sons, Chichester, 1988.

[8] I. Hlaváček, J. Haslinger, J. Nečas, J. Lovíšek: *Riešenie variačných nerovností v mechanike.* ALFA, Bratislava, 1982.

[9] C. Johnson: *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method.* Cambridge Univ. Press, 1988.

[10] V. Kolář, J. Kratochvíl, F. Leitner, A. Ženíšek: *Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků.* SNTL, Praha, 1972.

[11] V. Kolář, J. Kratochvíl, M. Zlámal, A.Ženíšek: *Technical, Physical and Mathematical Principles of the Finite Element Method.* Rozpravy ČSAV, řada TV81, sešit 2, 1971.

[12] M. Křížek, P. Neittaanmäki: *Finite Element Approximation of Variational Problems and Applications.* Longman, Harlow, 1990.

[13] J. Mackerle: *Finite Element Methods, A Guide to Information Sources.* Elsevier, Amsterdam, 1991.

[14] J. Nečas, I. Hlaváček: *Úvod do matematické teorie pružných a pružně plastických těles.* SNTL, Praha, 1983.

[15] J. T. ODEN: *Finite Elements: An Introduction*, In: Handbook of Numerical Analysis, vol. II. (ed. P. G. Ciarlet & J. L. Lions). North-Holland, Amsterdam, 1991.
[16] K. REKTORYS: *Metoda časové diskretizace a parciální diferenciální rovnice.* SNTL, Praha, 1985.
[17] G. STRANG, G. FIX: *An Analysis of the Finite Element Method.* Prentice-Hall, New Jersey, 1973.
[18] J. L. SYNGE: *The Hypercircle in Mathematical Physics.* Cambridge Univ. Press, 1957.
[19] B. A. SZABÓ, I. BABUŠKA: *Finite Element Analysis.* John Wiley & Sons, New York, 1991.
[20] E. VITÁSEK: *Numerické metody.* SNTL, Praha, 1987.
[21] J. R. WHITEMAN: *A Bibliography for Finite Elements.* Academic Press, New York, 1975.
[22] O. C. ZIENKIEWICZ: *The Finite Element Method in Engineering Science.* McGraw-Hill, New York, 1971.
[23] M. ZLÁMAL: Numer. Math. *12* (1968), 394–409.
[24] A. ŽENÍŠEK: *Nonlinear Elliptic and Evolution Problems and Their Finite Element Approximations.* Academic Press, London, 1990.

Synchrotronové záření

Jaromír Hrdý, Praha

1. Úvod

Elektromagnetické záření v širokém spektrálním oboru je významnou sondou, pomocí níž získáváme informace o nejrůznějších látkách. Každý zdroj záření má jistý maximální výkon. Ten, spolu s použitou optikou, vytváří jisté meze, které ohraničují naše možnosti zkoumání. Obecné schéma experimentu je přitom následující: ze zdroje vychází elektromagnetické záření, které je optickými prvky zpracováno (monochromatizováno, polarizováno, fokusováno atd.) a přivedeno na zkoumaný vzorek. Tam dochází k interakci záření se vzorkem a výsledkem je záření (nemusí již být nutně elektromagnetické), které nese hledanou informaci a které dopadá do vhodného detektoru. I když existují detektory, které jsou schopné detekovat každý foton nebo částici, přesto vyžadují zachycení určitého množství fotonů nebo částic k tomu, aby se měřený signál bezpečně oddělil od šumu a byl určen s požadovanou přesností. Jinými slovy, proces detekce vždy vyžaduje určitý čas, který též nemůže být neomezeně dlouhý.

RNDr. JAROMÍR HRDÝ, DrSc. (1938) je vedoucím vědeckým pracovníkem FZÚ ČSAV, Na Slovance 2, 180 40 Praha 8.