Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Ernst Snapper

Co vlastně děláme, když děláme matematiku ?

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 35 (1990), No. 5, 241--249

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139366

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1990

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Co vlastně děláme, když děláme matematiku?

Ernst Snapper

ERNST SNAPPER se začal zajímat o filozofii matematiky ve svém rodném Holandsku, kde studoval na univerzitě v Amsterodamu, a jedním z jeho učitelů byl L. E. J. Brouwer. Přistěhoval se do Ameriky v roce 1938 a stal se jedním ze čtyř aspirantů J. H. M. Wedderburna. Jeho zájem o filozofii se znovu oživil v letech 1958—1963, kdy byl kolegou Maxe Zorna na univerzitě v Indianě, a vzplanul neuhasitelným plamenem, když se o několik let později jeden z jeho dvou synů stal filozofem.

Úvod: Za prvé, výrazem „dělat matematiku" rozumím běžnou výzkumnou činnost aktivního matematika. Filozofovat o matematice tak, jak to budu dělat já v tomto článku, tedy neznamená „dělat matematiku". Podstatná část toho, čemu se dnes říká „základy matematiky", jako je matematická logika nebo teorie množin, však na druhé straně není filozofováním o matematice, ale děláním matematiky. V tomto smyslu je třeba chápat název článku.

Za druhé, nebudu se snažit vysvětlit, co to znamená dělat matematiku tak, aby aktivní matematik řekl: „Ano, tohle přesně dělám". Naopak, matematici, které filozofie nezajímá, pravděpodobně ani nepoznají, že popisuji jejich činnost. To je v povaze filozofie. Filozof třeba řekne hospodskému pobudovi: „Podívej, ty když jsi střízlivý, používáš asi pár zákonů aristotelovské logiky." Filozof má pravdu, ale pobuda nebude pravděpodobně vědět, o čem filozof mluví.

Ve vztahu k matematice jsem konceptualista. Znamená to, že se domnívám, že matematické objekty jsou výtvorem lidské mysli. V elementární teorii čísel zkoumáme přirozená čísla. Co je to například číslo 3? Každá louka je plná trojic, třeba trojic krav nebo trojic sedmikrásek, ale číslo 3, které se vyhřívá na slunci, na žádné louce nenajdete. Ve vesmíru čísla neexistují. Souhlasím s těmi, kteří tvrdí, že se dají najít v našich myslích. To však znamená, že moje 3 není vaše 3, protože moje 3 je v mé mysli a vaše 3 ve vaší mysli. Mohou se pak navzájem domluvit různí matematici? Mohou, protože posloupnosti přirozených čísel, které se vytvářejí v myslích různých matematiků, jsou izomorfní. A izomorfismus, na rozdíl od identity, je vše, co je pro domluvu třeba.

Totéž platí pro všechny matematické objekty. Zkoumáme-li trojrozměrný prostor, který nás obklopuje, v myšlenkách si nahrazujeme rovné kolejnice Velké středozápadní dráhy přímkami a pomyslné trojrozměrné prostory různých matematiků jsou opět izomorfní. Matematici, stručně řečeno, vytvářejí ve svých myslích matematické struktury a studují takové vlastnosti těchto struktur, o nichž se mohou domluvit, tj. vlastnosti, které jsou invariantní vůči izomorfismům. Poincaré v [9] to vyjádřil takto: „Matematici nezkoumají objekty, ale vztahy mezi objekty. Za předpokladu, že se vztahy mezi objekty

---

ERNST SNAPPER: *What Do We Do When We Do Mathematics?* The Mathematical Intelligencer, Vol. *10*, No 4, 53—58. Přeložila HELENA NEŠETŘILOVÁ.

© 1988 Springer-Verlag New York.

nezmění, je jim lhostejné, nahradí-li se tyto objekty jinými. Nevěnují pozornost hmotě, zajímá je pouze forma sama o sobě.

„Dělat matematiku" tedy znamená mentálně *tvořit matematické struktury a dokazovat o těchto strukturách věty*. Dokazování vět je charakteristickým rysem matematické činnosti; jestliže věty nedokazujeme, zcela jistě neděláme matematiku.

Hned můžeme trochu upřesnit pojem „matematické struktury". Matematickou strukturu, bez ohledu na to, jak je komplikovaná, lze vždycky považovat za množinu. Dejme tomu, že uvažovaná matematická struktura je grupa G, to znamená, že je dána množina G a funkce f: $G \times G \to G$, která má obvyklé vlastnosti. Taková funkce f však není nic jiného než podmnožina kartézského součinu $(G \times G) \times G$ a možina $\{G, f\}$, jejíž dva prvky jsou množiny G a f, je grupa G chápaná jako množina. Zdá se tedy, že „dělat matematiku" znamená mentálně tvořit množiny a dokazovat o nich věty.

Situace je však přece jenom trochu komplikovanější. Jsou případy, kdy studujeme obecné vlastnosti všech struktur nějakého pevně zvoleného druhu. Předpokládejme, že studujeme topologii a prohlásíme, že spojitý obraz souvislého prostoru je souvislý. Naše tvrzení se vztahuje na všechny souvislé topologické prostory a souhrn takových prostorů není množina, ale to, čemu množinoví teoretici říkají „vlastní třída". Vlastní třídy jsou souhrny, které nemají kardinální čísla, jsou na to příliš velké. Použiji obvyklou terminologii teorie množin a budu říkat třída, abych označil buď množinu nebo vlastní třídu. Množina je třída, která má kardinální číslo; vlastní třída je třída, která je příliš velká na to, aby mohla mít kardinální číslo. To dává efektivní kritérium, pomocí něhož může člověk, který není množinový teoretik, rychle rozhodnout, je-li daná třída množina nebo vlastní třída. O příbuzném kritériu se zmíním v odstavci 4. Množinoví teoretici přirozeně vědí, že množiny lze také definovat jako ty třídy, které jsou prvky jiných tříd, zatímco vlastní třídy nemohou být prvkem žádné třídy.

„Dělat matematiku" znamená mentálně tvořit třídy a dokazovat o těchto třídách věty. Z toho plyne, že dvě základní otázky filozofie matematiky jsou: „Jak tvoříme třídy?" a „Jak dokazujeme věty?" Na každou z těchto otázek lze odpovědět několika různými způsoby. Mým hlavním tvrzením je:

Teze: *Každou rozumnou metodu, jak tvořit třídy, lze kombinovat s každou rozumnou metodou, jak dokazovat věty, a taková kombinace představuje mód matematiky.*

Nemyslím si, že matematika je jedinečná doktrína, existuje několik druhů matematiky podle toho, jak se rozhodneme tvořit třídy a jak se rozhodneme dokazovat věty. V současné době je známo několik různých metod, jak tvořit třídy, konkrétně metoda používaná v klasické matematice (odstavec 4) a metody, které používá intuicionismus a příbuzné konstruktivistické programy (odstavec 5). Pokud jde o konstruktivistické programy, omezím se v diskusi na intuicionismus. Vzhledem k tomu, že filozofie dává k dispozici různé teorie pravdivosti, existuje také několik různých postupů pro dokazování matematických vět. Každá teorie pravdivosti vede ke specifické důkazové metodě (odstavec 1) a volba důkazové metody je určena tím, kterou teorii pravdivosti přijmeme. V klasické matematice je důkazová metoda založena na korespondenční teorii pravdivosti (odstavce 2, 4), zatímco intuicionistická důkazová metoda je založena na pragmatické teorii pravdivosti (odstavce 3, 5).

Měli bychom si zvyknout na skutečnost, že existuje mnoho matematických módů, pravděpodobně mnohem víc, než jich známe v současné době. V žádném případě nemáme důvod domnívat se, že všechny metody, jak vytvářet třídy a jak dokazovat věty, byly už objeveny. Kromě toho lze známé metody z obou skupin různými způsoby kombinovat, a tak mohou vznikat nové druhy matematiky.

Odstavec 1. Jak dokazujeme věty?

Důkaz a pravdivost jsou příbuzné pojmy. Dokazujeme přece, že něco je *pravdivé*. Ve filozofii existuje několik teorií pravdivosti, každá z nich s sebou nese svoji specifickou logiku. Tato logika určuje důkazovou metodu, spojenou s danou teorií pravdivosti: *pravdivost určuje důkaz, ne naopak.* Praxe logiky dané teorie pravdivosti — nebo ekvivalentně: praxe důkazové metody spojené s touto teorií pravdivosti — je důkazová metoda, kterou používá matematik. Je tedy zřejmé, že v matematice neexistuje jediná důkazová metoda, ale že tato metoda závisí na *volbě* teorie pravdivosti. Je-li tato teorie zvolena, je matematik při důkazech vět vázán na logiku této teorie. Například klasická matematika používá korespondenční teorii pravdivosti (odstavec 2), intuicionismus používá pragmatickou teorii pravdivosti (odstavec 3).

Logika zvolené teorie pravdivosti je matematicky zvládnuta, je-li vyjádřena jako formální logika ve formálním jazyce. Potom lze důkazy v této teorii pravdivosti vyjádřit buď v tomto formálním jazyce, nebo v matematikově přirozeném jazyce. Pokud zmíněná logika nebyla matematizována, lze důkazy ve zvolené teorii pravdivosti formulovat pouze v přirozeném jazyce. Zatím byly matematizovány pouze logiky korespondenční a pragmatické teorie; proto se omezím v dalším textu pouze na tyto dvě teorie. Přesto však *každá životaschopná teorie pravdivosti dává vzniknout důkazové metodě, kterou mohou matematici používat.*

Odstavec 2. Korespondenční teorie pravdivosti

Objekty, které jsou v této teorii pravdivé nebo nepravdivé, jsou deklarativní věty použitého jazyka. Předpokládejme, že tímto jazykem je čeština. Příkladem deklarativní věty je věta „Sníh je bílý“. Každá deklarativní věta se vztahuje k nějaké skutečnosti (faktu), uvedená věta ke skutečnosti, že sníh je bílý. Fakt, ke kterému se deklarativní věta vztahuje, může být něco v reálném světě mimo nás jako v příkladu „Sníh je bílý“, nebo to může být něco myšlenkového v nás, třeba „Sedm plus pět je dvanáct“. Uvědomme si, že nemá smysl ptát se, je-li nějaký fakt pravdivý nebo nepravdivý. Fakta mohou existovat, můžeme si je přát nebo se jich obávat, ale nemůžeme hovořit o jejich pravdivosti nebo nepravdivosti. *Ve zbytku tohoto článku bude* „věta“ *znamenat vždy „deklarativní větu“.*

Je-li věta pravdivá nebo nepravdivá, závisí na tom, jak odpovídá faktu, ke kterému se vztahuje. Věta „Sníh je bílý“ je pravdivá, protože sníh je skutečně bílý. Věta „Sedm plus pět je dvanáct" je pravdivá, protože sedm plus pět je skutečně dvanáct. Obecně, *věta S je pravdivá, jestliže odpovídá faktu F, ke kterému se vztahuje, takovým způsobem, že můžeme říci, že popisuje F správně; stručně řečeno, jestliže S souhlasí (koresponduje) s F. Jestliže S nesouhlasí s F, říkáme, že S je nepravdivá, nebo ekvivalentně, že pravdivá je* $\neg S$. ($\neg$ znamená „ne".)

Matematik, který nemá filozofické vzdělání, nemůže být s touto filozofickou definicí pravdivosti spokojen. Matematici chtějí, aby definice byla vždy jasná a jednoznačná, nikoliv vágní a neurčitá. Hlavní příčinou této nespokojenosti je však, jak uvádí Russell v [10], nevhodně zvolený termín. Místo „filozofické definice" by bylo vhodnější hovořit o „filozofické analýze". Na rozdíl od matematické definice je filozofická definice pouhý rozklad pojmu na jednotlivé složky. Uvedená definice rozkládá pojem pravdivosti na složky věta, fakt a korespondence. Termín „filozofická definice" už nebudu používat.

Nechť S je věta a F je fakt, ke kterému se vztahuje. Pokud jsme už nějakým způsobem rozhodli, že S souhlasí s F (tzn. že S je pravdivá), budu říkat, že S byla verifikována. V korespondenční teorii není třeba, aby věta nebo její negace byly verifikovány dřív, než smíme prohlásit, že věta musí být buď pravdivá, nebo nepravdivá. O každé větě se naopak předpokládá, že je buď pravdivá, nebo nepravdivá, ne však obojí současně. Platí to dokonce i pro takové věty, jejichž pravdivostní hodnota nebude nikdy známa, například „Před velkým třeskem žili lidé". Z toho je patrné, že korespondenční teorie předpokládá platónskou existenci pojmu pravdivosti. Skutečnost, že v korespondenční teorii je každá věta buď pravdivá, nebo nepravdivá, a to i tehdy, jestliže nebyla nebo nemohla být verifikována, vyjádřím tím, že řeknu, že korespondenční teorie je *verifikačně nezávislá.*

Zmíním se nyní o logice korespondenční teorie. Při omezení jazyka na predikátový jazyk prvního řádu L podal Tarski [11] matematickou definici (nikoliv však filozofickou analýzu) pravdivosti v metajazyce L. Takto vzniklá matematická teorie pravdivosti je základem pro obvyklou logiku prvního řádu s obvyklými formálními důkazy, kterou všichni učíme v kursech matematické logiky. Přijmeme-li korespondenční teorii pravdivosti, jsme při důkazech vět vázáni na použití klasické logiky. Korespondenční teorii a její matematizaci lze nalézt v [5, díly 1, 2].

Odstavec 3. Pragmatická teorie pravdivosti

Pragmatická teorie pravdivosti, která pochází od Williama Jamese, Charlese Pierce, Johna Deweyho a dalších pragmatistů, prožila svůj rozkvět v první čtvrtině tohoto století [5, díly 5, 6]. Výklad této teorie se u různých pragmatistů poněkud liší. Přidržím se výkladu, který uvádí Dewey.

Objekty, které jsou pravdivé nebo nepravdivé, jsou opět (deklarativní) věty použitého jazyka, například češtiny. Věta S se opět vztahuje k faktu F a verifikovat S zase znamená s konečnou platností rozhodnout, že S souhlasí s F. Na rozdíl od korespondenční teorie se nepředpokládá platónská existence žádného druhu pravdivosti. Nemůžeme proto tvrdit, že každá věta je buď pravdivá, nebo nepravdivá. Naopak, pokud se *neuzavře zkoumání*, kterým se verifikuje S nebo $\neg S$, se větě S nepřisuzuje vůbec žádná pravdivostní hodnota. Pragmatická teorie je tedy pravým opakem verifikačně nezávislé teorie; *pragmatická pravdivost je verifikace.* Měl bych asi uvést nějaký příklad.

Malá obměna jednoho příkladu, který uvádí Dewey [3], je tato: Nějaký člověk se ztratí v lese a řekne si: „Půjdu-li na sever, najdu z toho zatraceného lesa cestu ven.“ Je tato věta pravdivá, nebo nepravdivá? Je-li vyslovena uprostřed lesa, nemá žádnou pravdivostní hodnotu, protože ještě nebyla podrobena zkoumání. Půjde-li tento člověk skutečně na sever a dostane se z lesa ven, pak se v této chvíli věta *stává* pravdivou. Vidí-li však, že se po mnoha hodinách cesty na sever dostává stále hlouběji do lesa, dospěje k závěru, že se věta *stala* nepravdivou.

Záleží samozřejmě na tom, co přesně Dewey mínil „zkoumáním“. Zde se opět ocitáme ve filozofické situaci, ve které není možné formulovat přesnou matematickou definici, protože různých typů vět je příliš mnoho. Aby však bylo nějaké zkoumání podle pragmatistů přijatelné, musí v každém případě splňovat tyto dvě podmínky. Za prvé, zkoumání musí být tak konkrétní a praktické, jak jen uvažovaná věta dovoluje. V příkladě člověka, který se ztratil v lese, přípustné zkoumání nutně spočívá v tom, že člověk půjde na sever. Za druhé, musí být vždy možné uzavřít zkoumání v konečném čase. Omezíme-li se na věty, kterými se zabýváme v matematice, pak požadavky na to, aby nějaké zkoumání bylo podle pragmatistů přijatelné, přecházejí v podmínky, které na důkazy kladou intuicionisté. Takové důkazy se přirozeně nazývají „konstruktivní“. Vypůjčím si tento termín a řeknu obecně, že zkoumání je pro pragmatisty přijatelné, jestliže to je *konstruktivní zkoumání.* Obdobně verifikaci věty, založenou na konstruktivním zkoumání nazvu *konstruktivní verifikací.* Tvrzení, že pragmatická pravdivost je verifikace, můžeme nyní upřesnit takto: *pragmatická pravdivost je konstruktivní verifikace.*

Jak je to s logikou pragmatické teorie pravdivosti? S klasickou logikou zde samozřejmě nevystačíme. Věta „Existuje nekonečně mnoho prvočíselných dvojčat“ je v současné době bez pravdivostní hodnoty a zákon vyloučeného třetího se tu neuplatní. A jak je to s negací?

Uvažme opět člověka, který se ztratil v lese a označme S větu, kterou si řekl. Předpokládejme, že po mnoha hodinách cesty na sever, kdy les kolem něho stále houstnul, dojde k závěru, že pravdivá je $\neg S$. Jediným důvodem pro tento závěr je to, že dokončil zkoumání, které ukazuje, že S odporuje skutečnosti. Negace pragmatické teorie pravdivosti je intuicionistická negace.

Zkoumáme-li v tomto duchu pragmatickou interpretaci logických spojek a kvantifikátorů, zjistíme, že *logika pragmatické teorie pravdivosti je intuicionistická logika.* „Intuicionistickou logikou“ tu nemyslím žádnou formální logiku, ale pouze způsob zdůvodňování přijímaný intuicionisty. Když Heyting formalizoval tento způsob zdůvodňování [8, kap. VII], formalizoval pragmatickou logiku.

Úplné zdůvodnění toho, že intuicionistická logika je logika pragmatické teorie pravdivosti, by si vyžádalo další článek. Hlavním důvodem je však to, že intuicionistická pravdivost není nic jiného než pragmatická pravdivost omezená na takové věty, které se vyskytují v intuicionismu. Oba druhy pravdivosti jsou ztotožněny s konstruktivní verifikací.

Vzniká přirozeně otázka, je-li na místě ztotožňovat pravdivost a verifikaci tak, jak to dělají pragmatisté a intuicionisté. Carnap varoval před zaměňováním pravdivosti a verifikace [2]. Pravdivost je nadčasová, zatímco verifikace je časově vázaná v tom smyslu, že dnes věta nemusí být verifikována, ale zítra ano. Logika verifikační teorie závisí na tom, jak silná verifikace je použita. Není-li použita vůbec žádná verifikace jako v případě korespondenční teorie pravdivosti, dojdeme ke klasické logice. Čím je verifikace silnější, tím větší je posun logiky od klasické k intuicionistické. Nejsilnější možná verifikace je konstruktivní verifikace a její logika je intuicionistická logika. Protože souhlasím s Carnapem v tom, že bychom neměli zaměňovat pravdivost a verifikaci, nebudu už mluvit o pragmatické pravdivosti nebo intuicionistické pravdivosti, ale pouze o konstruktivní verifikaci.

Odstavec 4. Klasická matematika

Mód matematiky je určen úmluvou o tom, jak se mají tvořit třídy a jak se mají dokazovat věty (teze). Hledáme-li filozofický základ matematického módu, musíme si položit otázku: „Která filozofie je základem pro tvoření tříd?" a „Která filozofie je základem pro důkazovou metodu?"

V klasické matematice se k důkazům vět, ať už jsou prováděny v přirozeném nebo formálním jazyce, používá klasická logika. Filozofickým základem této důkazové metody je tedy korespondenční teorie pravdivosti (odstavec 2). Odpověď na otázku týkající se tvoření tříd není zdaleka tak jednoduchá.

Nikdo zatím nebyl schopen najít filozofii, na jejímž základě jsou v klasické matematice tvořeny třídy. Musíme proto připustit, že z hlediska filozofie není klasická matematika v pořádku. Odhlédněme tedy na chvíli od filozofie a zkoumejme způsoby, kterými se v klasické matematice tvoří třídy. Neptáme se při tom, jak lze axiomatizovat tvoření tříd, ale jak je matematici při práci skutečně tvoří. Existují dva způsoby:

I. Tvoření tříd na základě dané třídy. Tento způsob tvoření tříd je vždy relativní v tom smyslu, že je dána třída a na základě této třídy se utvoří třída nová. Jako příklad lze uvést vytvoření množiny racionálních čísel na základě množiny celých čísel, množiny reálných čísel na základě množiny racionálních čísel atd.

II. Tvoření tříd na základě dané vlastnosti. Kdykoli je dána nějaká vlastnost objektů, můžeme vždy utvořit třídu všech objektů, které tuto vlastnost mají. Je všeobecně známo, že bezstarostné zacházení s takovými třídami vede k množinově teoretickým paradoxům, jako jsou třeba paradoxy Russellovy a Buraliho-Fortiho. „Bezstarostně" neznamená, jak si mnoho matematiků chybně myslí, že není možné třídu utvořit. „Bezstarostně" znamená, že vytvořená třída může být vlastní třída a nelze s ní proto zacházet jako s množinou. Zamysleme se nad tím hlouběji.

Existují vlastnosti dvojího druhu. Vlastnost prvního druhu je taková, že je-li X *množina*, jejíž všechny prvky mají tuto vlastnost, pak vždy existuje objekt, který má tuto vlastnost, ale nepatří do X. Příklady takových vlastností jsou: být neprázdnou množinou s daným kardinálním číslem; být množinou, která není svým vlastním prvkem; být ordinálním číslem; být spojitým topologickým prostorem.

Je-li vlastnost prvního druhu, pak *množiny*, jejichž všechny prvky mají tuto vlastnost, stále rostou a jejich růst se nikdy nezastaví. Je zřejmé, že nemůže existovat *množina*, která obsahuje všechny objekty s touto vlastností. Tyto objekty tvoří vlastní třídu a proti použití této vlastní třídy nejsou žádné logické námitky. Vlastní třídy nemají kardinální čísla a nemohou být prvky tříd. Mohou však sloužit jako definiční obory funkcí a lze s nimi provádět mnoho množinově teoretických operací. Jestliže však s vlastní třídou zacházíme jako s množinou, vzniká nebezpečí, že se, jak upozorňoval Russell, dostaneme do bludného kruhu; důsledkem je pak množinově teoretický paradox [7]. ***Příčinou množinově teoretických paradoxů není to, že utvoříme vlastní třídu, ale to, že s vlastní třídou zacházíme jako s množinou.***

Tento přístup k množinově teoretickým paradoxům je poněkud polemický. Russell byl toho názoru, že už jenom vytvořit vlastní třídu znamená dostat se do bludného kruhu, a je tedy z logického hlediska nežádoucí. V tomto bodě s ním nesouhlasím.

Vlastnost je druhého druhu, není-li to vlastnost prvního druhu, tj. jestliže všechny objekty, které mají tuto vlastnost, tvoří *množinu*. Pro aktivního matematika, který není množinový teoretik, je třídění vlastností na vlastnosti prvního a druhého druhu účelné, protože nevznikají pochybnosti o tom, kterého druhu je daná vlastnost, a tedy zda objekty, které mají tuto vlastnost, tvoří vlastní třídu nebo množinu. Množinoví teoretici toto kritérium nepotřebují, protože ti definují pojem množiny pomocí relace „být prvkem“.

Odstavec 5. Intuicionismus

Intuicionismus je na tom z filozofického hlediska nepochybně mnohem lépe než klasická matematika. To proto, že intuicionisté dokáží uspokojivě odpovědět na obě otázky: „Která filozofie je základem pro intuicionistický způsob tvoření tříd?“ a „Která filozofie je základem pro intuicionistický způsob dokazování vět?“ Uveďme stručně obě odpovědi.

Intuicionistický důkaz je konstruktivní důkaz, a tedy filozofie, která je základem pro intuicionistickou důkazovou metodu, je teorie konstruktivní verifikace s intuicionistickou logikou (odstavec 3).

Pokud jde o tvorbu tříd, začínají intuicionisté vytvořením přirozených čísel 1, 2, 3, ... (0 mezi tato čísla nepatří). Přijímají kantovskou tezi o tom, že si tato čísla uvědomujeme na základě naší představy času a časových posloupností. Pečlivým studiem této teze v intuicionistickém kontextu dostaneme představu o mentálních pochodech, pomocí nichž získáme přirozená čísla.

Teze, která je základem pro intuicionistický způsob tvoření tříd, tvrdí, že dělat matematiku spočívá výhradně v tom, že postupně provádíme pouze ty mentální kroky, pomocí nichž dostáváme přirozená čísla [6, kap. IV]. Při tvorbě tříd lze použít jenom konečný počet těchto kroků a v důsledku toho má tvoření tříd konstruktivní charakter. Podrobnější rozbor této teze vede opět ke dvěma typům tvoření tříd.

*I. Expanze**) (rozpětí). Tento typ tvoření tříd je obdobou „tvoření tříd na základě dané třídy" v klasické matematice. Expanze je definována na základě dvou daných informací: zákona expanze a komplementárního zákona [8, kap. III].

*II. Species**). Tento typ tvoření tříd je obdobou „tvoření tříd na základě dané vlastnosti" v klasické matematice. Přesněji, species *je* vlastnost, kterou matematický objekt může mít [8, kap. III]. Aby byl matematický objekt prvkem dané species, musí splňovat dvě podmínky: (1) musí mít vlastnost, o kterou jde, a (2) musí být definovatelný nezávisle na definici species.

Z druhé podmínky vyplývá, že žádná species nemůže být svým vlastním prvkem a tato podmínka také zabraňuje jakékoli formě kruhovosti v intuicionistické relaci „být prvkem". Chrání tedy intuicionismus před množinově teoretickými paradoxy a způsobuje, že není třeba rozlišovat mezi species prvního a druhého druhu.

Názory na to, zda daná konstrukce třídy se skutečně opírá pouze o takové mentální kroky, pomocí nichž vznikají přirozená čísla se mohou lišit. To vedlo ke konstruktivistickým programům, které s intuicionismem souvisejí, ale odklánějí se od něho. Intuicionismus na příklad přijímá posloupnosti svobodné volby, ale konstruktivistický program Eretta Bishopa nikoli.

Odstavec 6. Epilog

V tomto článku byly zkoumány dvě otázky: „Jaký je filozoficlý základ způsobu, kterým tvoříme třídy?" a „Jaký je filozofický základ způsobu, kterým dokazujeme věty?" Při odpovědi na druhou otázku jsem vycházel z filozofie pravdivosti a verifikace. Na první otázku lze uspokojivě odpovědět v intuicionismu, intuicionistický způsob tvoření tříd je založen na kantovské filozofii časové posloupnosti. V případě klasické matematiky jsem nebyl schopen na první otázku odpovědět. Najít filozofii, která by byla základem pro klasický způsob tvoření tříd, představuje hlavní úkol, který stojí před filozofií matematiky. Jakmile bude tento problém vyřešen, budeme oprávněni tvrdit, že matematika je v pořádku nejenom po technické, ale i po filozofické stránce. Do té doby to však není možné.

Intuicionisté nebudou přirozeně souhlasit s tím, že existuje několik dobrých metod, jak tvořit třídy a jak dokazovat věty. Uznávají pouze jedinou metodu, jak tvořit třídy, a jedinou metodu, jak dokazovat věty, totiž svou vlastní. Tím by se však většina klasické matematiky redukovala na nesmyslné slovní kombinace a podle Descartovy úvahy by z toho plynulo, že neexistuji. To prostě nemohu přijmout. Na druhé straně však nesouhlasím ani s klasickými matematiky, kteří tvrdí, že intuicionismus není matematika.

---

*) Česká termonologie základních intuicionistických pojmů zatím neexistuje. Při překladu tohoto článku byl původní anglický termín „spread" překládán výrazem expanze (rozpětí). Tato volba se opírala o ruskou terminologii, ve které je „spread" překládán výrazem „поток" (= proud, tok, rozpětí).

Druhý termín, v angličtině „species", byl vzhledem ke svému latinskému původu překládán do češtiny výrazem species (podst. jm. žen. r., viz Slovník jazyka českého, SPN 1989). Za návrh překladu obou termínů děkuji RNDr. P. Hájkovi, CSc. Pozn. překl.

Dummett ve velmi zajímavém článku [4] diskutuje i otázku „Jak dokazujeme věty?" Ptá se, jsme-li nuceni používat k tomuto účelu intuicionistickou logiku místo klasické a jeho odpověď je založena na teorii významu. Teorie významu závisí na teorii pravdivosti a teorii verifikace. Já jsem použil pouze druhou a třetí teorii, nikoli však první. Moje diskuse se proto zjevně pohybovala na nižší filozofické úrovni než Dummettova. Mohl jsem si to dovolit, protože jsem se nikdy neptal, má-li být některá z těchto logik preferována, nemyslím si to totiž. Studuje-li někdo pravdivost, musí použít klasickou logiku; studuje-li konstruktivní verifikaci, musí použít intuicionistickou logiku. V matematice jako v každé jiné intelektuální činnosti si může každý svobodně vybrat, chce-li zkoumat pravdivost nebo verifikaci.

Dummettovy závěry vlastně možnost svobodné volby v matematice nepopírají. Na jedné straně tvrdí, že konceptualistický přístup k přirozeným číslům, tedy takový, který jsem v tomto článku zastával já, sám o sobě nikoho nenutí, aby preferoval intuicionistickou logiku před klasickou, ledaže by byl dost tvrdohlavý na to, aby „popíral, že existuje nějaké tvrzení, které je nyní pravdivé, o tom, jaký by byl výsledek výpočtu, který ještě nebyl proveden, kdyby byl tento výpočet proveden". Na druhé straně však uvádí důraznou argumentaci, jejímž smyslem je ukázat, že nezávisle na tom, je-li někdo ve vztahu k matematickým objektům konceptualista nebo platonik, musí dávat přednost intuicionistické logice před klasickou. Tato argumentace se podstatným způsobem opírá o Wittgensteinovy názory na jazyk. Dummett potom, co své zdůvodnění skončí, říká: „Nebudu tady zdržovat tím, že bych se pokoušel tuto argumentaci hodnotit ..." Pokud by takové hodnocení nezvratně ukázalo, že argumentace musí být přijata, pak bych si pomyslel, že s Wittgensteinovou teorií jazyka není všechno v pořádku. V této chvíli však nevidím rozpory mezi Dummettovým a svým článkem.

Napíše-li někdo článek, vkládá do něho vždy svoje naděje. Já doufám, že můj článek přispěje k tomu, aby filozofie matematiky získala opět úctu, které se kdysi těšila.

Literatura

[1] P. Benacerraf a H. Putnam: *Philosophy of Mathematics*, 2. vyd. Camridge University Press, 1983, (brož. vyd.).

[2] R. Carnap: „Truth and Confirmation". V *Readings in Philosophical Analysis*, red. H. Feigel a W. Sellars, New York, 1949.

[3] J. Dewey: *Essays in Experimental Logic.* Chicago, 1916.

[4] M. Dummett: „The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic". Přetištěno v [1].

[5] *The Encyclopedia of Philosophy.* Macmillan and The Free Press, New York and London, 1967.

[6] A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel a A. Levy: *Foundations of Set Theory.* North-Holland, Amsterdam, 1973.

[7] K. Gödel: *„Russell's Mathematical Logic"*. Přetištěno v [1].

[8] A. Heyting: *Intuitionism, an Introduction.* 2. vyd. North-Holland, Amsterdam, 1966.

[9] H. Poincaré: *Science and Hypothesis.* Dover, New York, 1952, brož. vyd.

[10] B. Russell: *Principles of Mathematics*, 1. vyd. W. W. Norton, New York, 1903, brož. vyd.

[11] A. Tarski: „The Concept of Truth in Formalized Languages". Přetištěno v Tarski: *Logic, Semantic, Metamathematics.* Oxford, 1956.

Katedra matematiky a informatiky, Dartmouth College, Hanover, NH 03755 USA