Garrett Birkhoff
Súčasné trendy v algebre [Dokončenie]

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 21 (1976), No. 5, 249--259

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139327

[7] G. S. OHM: *Bestimmung des Gesetzes, nach welchem Metalle die Kontaktelektrizität leiten nebst einem Entwurf zu einer Theorie des Voltaischen Apparates und des Schweigger's Multiplicators.* Journ. f. Chemie und Physik *46* (Jahrb. *16*) (1826), 137—166.
[8] G. S. OHM: *Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet,* T. H. Riemann, Berlin 1827.
[9] J. ZENNECK: *Georg Simon Ohm,* VDI-Verlag, Berlin 1939. (Zde jsou uvedeny další odkazy na literaturu.)

Súčasné trendy v algebre*)

Garrett Birkhoff, Harvard University

Éra modernej algebry, 1930—1970

10. Vznik „modernej" algebry

Tesne predtým ako GÖDEL rozdrvil veľké nádeje symbolických logikov na formalizáciu celej matematiky pomocou „peanštiny", VAN DER WAERDENOVA kniha *Moderne Algebra* (1930—31) vyvolala novú revolúciu. Cieľ tejto brilantne napísanej knihy je jasne uvedený v jej úvode.

„*Abstraktný, formálny* alebo *axiomatický* smer, ktorý dal algebre nový rozlet[29]), viedol predovšetkým k radu nových pojmov v teórii *grúp*, v teórii *polí*, v teórii *okruhov s ohodnotením* a v teórii *hyperkomplexných čísel*, k nahliadnutiu nových súvislostí a k ďalekosiahlym výsledkom. Hlavným cieľom tejto knihy je uviesť čitateľa do tohoto nového sveta pojmov."

Ako som už naznačil, axiomatický prístup, ako aj veľa z „modernej" algebry, bolo známe už pred rokom 1914. No ešte v roku 1929 prevládal na mnohých univerzitách včítane Harvardu názor, že v porovnaní s pojmami a metódami analýzy majú pojmy a metódy modernej algebry okrajový význam. Keď však van der Waerden ukázal matematickú a filozofickú jednotu modernej algebry a analýzy a význam výsledkov EMMY NOETHEROVEJ a jej žiakov (z ktorých treba spomenúť najmä E. ARTINA, R. BRAUERA a H. HASSEHO), dostala sa moderná algebra v matematike zrazu do centrálneho postavenia. Bez preháňania možno povedať, že sviežosť a entuziazmus van der Waerdenovho výkladu priam zelektrizovali matematický svet, najmä matematikov do tridsiatky, akým som bol aj ja.

---

*) G. Birkhoff: Current Trends in Algebra, Amer. Math. Monthly *80* (1973), 760—782

V tomto čísle otiskujeme druhou část článku, jehož překlad pořídili Jozef Dravecký a Peter Mederly.

[29]) Po nemecky: der die Algebra ihren erneuten Aufschwung verdankt.

Špeciálne tento vývoj spôsobil, že klasická *algebra reálnych a komplexných čísel* sa zdala byť neaktuálna alebo prinajmenšom patriaca do analýzy, a nie do algebry v pravom slova zmysle. Tento pohľad dokumentuje aj kniha *Moderne Algebra*, v ktorej sa polia reálnych a komplexných čísel *definujú* až po prebratí Galoisovej teórie a existencia a jednoznačnosť najmenšieho algebraicky uzavretého rozšírenia ľubovoľného poľa (STEINITZ 1910) je dokázaná výlučne algebraicky (transfinitnou indukciou). Aký je to kontrast s učebnicami WEBERA, SERRETA a PERRONA!

11. Teória zväzov

Tento nový postoj bol veľkým stimulom pre obrodenie teórie zväzov, ktorá od čias DEDEKINDOVÝCH priekopníckých prác ležala ladom. V roku 1933 som napísal, že teória zväzov predstavuje „výhodné postavenie, z ktorého možno vychádzať pri riešení kombinatorických problémov v ... abstraktnej algebre".[30]) Do roku 1938 pokročili už aplikácie teórie zväzov v logike, algebre, geometrii, pravdepodobnosti, v teórii miery a integrálu a vo funkcionálnej analýze natoľko, že American Mathematiacal Society usporiadala sympózium zaoberajúce sa touto vtedy veľmi čerstvou témou.[31])

12. Algebra na vysokých školách

Nahradenie klasickej algebry modernou algebrou si vyžadovalo určitý čas. Preto sa moderná algebra stala populárnou v prednáškach na vysokých školách v Spojených štátoch až po druhej svetovej vojne. Rozšíreniu modernej algebry napomohla čiastočne aj kniha *Survey of Modern Algebra* (Prehľad modernej algebry), ktorú MAC LANE spolu so mnou uverejnil v roku 1941. Náš prístup je z dnešného hľadiska už celkom konzervatívny. Na rozdiel od van der Waerdena sme uviedli základy teórie rovníc pred definíciou grupy a teóriu reálnych a komplexných matíc (včítane vety o hlavných osiach pre symetrické a hermitovské matice) spolu s geometrickými aplikáciami pred Galoisovou teóriou. V knihe je tiež zahrnutý pojem Booleovej algebry, ktorý sa nám zdal byť dôležitým pre študentov, aby mohli porozumieť algebru množín a logiku; neskôr sa k tomu ešte vrátim.

13. Vplyv Bourbakiho

Abstraktná matematika, ako ju znovuvybudoval N. BOURBAKI[32]) v diele *Éléments de Mathématique*, získala zanedlho popularitu na francúzskych univerzitách. Bourbakiho

---

[30]) Proc. Camb. Phil. Soc., *29* (1933) 441.

[31]) Bull. Amer. Math. Soc., *44* (1938) 793—827.

[32]) Literárny pseudonym, ktorý prijala v roku 1937 skupina vtedy mladých francúzskych matematikov, ktorí chceli vymaniť francúzsku matematiku spod nadvlády klasických analytikov. V Amer. Math. Monthly *57* (1950) 221—232 je autentické vyhlásenie názorov skupiny Bourbaki, v ktorom okrem iného tvrdia, že axiomatická metóda je *štandardizáciou matematických postupov* a že základnými matematickými štruktúrami sú grupa, usporiadanie a topologický priestor.

mnohozväzkové pojednanie, napísané zväčša v desaťročí 1945–1955, je pokusom odvodiť celú (čistú) matematiku systematicky z pojmov *množina* a *funkcia*. Obsah matematiky sa v ňom podáva vychádzajúc z abstraktne chápaných relačných *štruktúr nad množinami* a zo zobrazení (špeciálne *morfizmov*) medzi nimi; por. Kniha 1, kap. 4.

Algebraické štruktúry, definované ako množiny *prvkov* s (vnútornými alebo vonkajšími) finitárnymi *operáciami*, sa skúmajú vyššie uvedeným spôsobom v Knihe 2. Čitateľ je autoritatívne a neochvejne vedený starostlivo vybrúsenou a zostavenou postupnosťou definícií, príkladov a viet o grupách, okruhoch, poliach a o mnohých iných druhoch systémov, ktoré som spomínal. Ďalšie časti matematiky sa skúmajú takmer rovnakým spôsobom v nasledujúcich knihách. Matematika sa takto javí ako *vyleštený monolit vybudovaný čisto deduktívne z pojmov množiny a funkcie.*

14. Rozkvet abstraktnej algebry

Entuziazmus, ktorý vyvolala van der Waerdenova kniha, posilnený už opísaným spôsobom, sa stal základom nevídaného rozkvetu všetkých smerov abstraktnej algebry v posledných 40 rokoch. Najmä teórie *grúp*, *okruhov* a *polí* (ktorým bola venovaná najväčšia časť knihy *Moderne Algebra*) získali na hĺbke a dômyselnosti, čoho najdramatickejším príkladom je výsledok, že *každá konečná grupa nepárneho rádu je riešiteľná.* Tento výsledok, ktorý dokázali THOMPSON a FEIT na vyše 200 stranách vysoko odborných úvah, bol dlho domnienkou, ale dokázať ho, sa muselo zdať väčšine matematikov v roku 1930 beznádejným.

Za posledných 40 rokov LIEOVA a JORDANOVA teória a teória multilineárnych algebier dozreli na takú úroveň, že to, čo bolo známe v roku 1930, sa zdá byť amatérske, ak nie naivné. To isté platí o teórii zväzov, teórii pologrúp a kvázigrúp, teórii kategórií a o homologickej a kombinatorickej algebre, z ktorých každá bola v roku 1930 neznáma alebo skoro neznáma. Konečne algebraická geometria ako nová oblasť axiomatickej algebry získala solídny základ v hlbokých výsledkoch o komutatívnych okruhoch a ich ideáloch a o okruhoch s ohodnotením.[33])

15. Širší ohlas

Rozruch spôsobený nadšením abstraktnou algebrou mal širší ohlas. Van der Waerdenova kniha spôsobila, že v roku 1930 pre mladých ľudí, ako som bol ja, sa *klasická analýza* opierajúca sa o infinitezimálny počet (*analyse infinitésimale*), ktorá dve storočia v matematike dominovala, zdala odrazu byť starou a unavenou. Abstraktný prístupa ktorý van der Waerden použil v algebre, naozaj čoskoro prišiel do módy aj vo funkcionálnej analýze a v topológii. Myšlienka, že na celú matematiku sa dá pozerať ako na topologickú algebru, získala mohutnú podporu rozriešením piateho HILBERTOVHO

[33]) Napríklad každý, kto sa dnes seriózne zaoberá „algebraickou" geometriou, by mal pokladať dvojzväzkové pojednanie O. ZARISKI, P. SAMUEL: *Commutative Rings* za materiál pre *úvodné štúdium*; nemusí však poznať Newtonovu klasifikáciu reálnych kubických kriviek.

problému, ktorým sa ukázalo, že predpoklad diferencovateľnosti v teórii Lieových grúp sa dá nahradiť púhou spojitosťou: ľubovoľná lokálne euklidovská spojitá grupa je izomorfná s nejakou analytickou Lieovou grupou ([10], str. 184). Dokonca aj výskum v tradičnej pevnosti aplikovanej matematiky – v oblasti parciálnych diferenciálnych rovníc – sa postupne sústreďoval na hľadanie nových abstraktných pojmov umožňujúcich dokázať veľmi všeobecné existenčné vety a vety o jednoznačnosti.

Čiastočne ako dôsledok takéhoto presunu dôrazu väčšina mladých matematikov od roku 1960 je presvedčená, že celá matematika by mala byť odvodená axiomaticky z pojmov množina a funkcia a tento prístup nepokladajú už za moderný, ale za klasický. V roku 1959 zmenil van der Waerden názov svojej knihy *Moderne Algebra* na *Algebra*. A v roku 1960 Mac Lane a ja sme napísali inú *Algebru*, ktorá čo do abstraktnosti zašla ešte ďalej, sústrediac veľa z čistej algebry okolo centrálnych pojmov morfizmu, kategórie a „univerzality“. „Univerzálny“ prístup k algebre, s ktorým som prišiel v 30. a 40. rokoch zdôrazňujúc úlohu zväzov, bol rozpracovaný oveľa neskôr v dvoch významných knihách Cohna a Grätzera. V súbežnej línii rozvoja Lawvere (1965) predložil prácu *The category of categories as a foundation for mathematics* (Kategória kategórií ako základ matematiky), ktorá sa začína takto[34]):

Vo vývoji matematiky v posledných desaťročiach zreteľne silnie presvedčenie, že podstatnými vlastnosťami matematických objektov sú tie, ktoré môžeme určiť skôr pomocou ich abstraktnej štruktúry ako pomocou prvkov, z ktorých matematické objekty pozostávajú. Vzniká prirodzene otázka, či možno postaviť matematiku na taký základ, ktorý by dôsledne realizoval toto presvedčenie o povahe matematiky a špeciálne v ktorom by pojmy trieda a „patriť do triedy“ nehrali žiadnu rolu.

Pod základom sa tu rozumie jednoduchý systém axióm prvého rádu, pomocou ktorých by sa dali definovať všetky bežné matematické objekty a dokázať všetky ich obvyklé vlastnosti. Zdá sa, že takýto základ by bol prirodzenejší a pohotovejšie použiteľný ako klasický pri skúmaní takých oblastí ako algebraická topológia, funkcionálna analýza, teória modelov, všeobecných algebraických systémov atď.

16. „Nová matematika“ roku 1960

V posputnikovej dobe na začiatku a v strede 60. rokov nadšenie rástlo ešte viac. Konkrétne v Spojených štátoch sa vyvinula záľuba vykladať školákom formálne pojmy ako množina, funkcia a axióma, ktoré často ich učitelia len napoly pochopili. Jej zástanci podporovali rozšírenie mýtu, že vytvárajú „novú matematiku“, aká pred päťdesiatimi rokmi nebola známa. Jedným z okázalých cieľov tejto módy bolo školiť mladých ľudí tak, aby sa nimi vyplnil predpokladaný nedostatok učiteľov matematiky a výskumných pracovníkov. Zdalo sa to veľmi vítané v čase, keď povojnová populačná explózia a konjunktúra zoštvornásobili požiadavky na počet vysokoškolských učiteľov matematiky, zatiaľ čo pod vplyvom neotrasiteľnej viery v hodnotu základného výskumu vzrastala podpora pre výskum v čistej matematike ročne o 10–15 percent. Ale v roku 1972 sa to všetko zdalo čudné a neaktuálne.

Môžeme teda zhrnúť. V rokoch 1930–1960 sa algebra vyvíjala harmonicky, pričom

---

[34]) F. William Lawvere: *The category of categories as a foundation for mathematics*, Proc. Conf. Categorical Algebra, La Jolla, 1965 (zost. S. Eilenberg a kol.) Springer, 1966.

jej hlavný prúd plynul hladko, rýchlo a v závere triumfálne tým smerom, ako som naznačil. Istým ukazovateľom jej triumfu môže byť fakt, že zatiaľ čo tri z prvých štyroch „Field medals“ boli udelené za analýzu (v r. 1936 a 1950), tri zo štyroch udelených v r. 1970 boli za algebru.

V posledných 5—10 rokoch sa však objavili nové mocné prúdy. Niektoré z nich vznikli ako reakcia na extrémizmus: tak RENÉ THOM pred nedávnom napísal podnetný článok z nadpisom *Moderná matematika: výchovný a filozofický omyl*[35]), v ktorom tvrdí, že geometria by mala nahradiť algebru, pretože „každá otázka v algebre je alebo triviálna alebo neriešiteľná; naproti tomu geometria poskytuje širokú paletu zaujímavých problémov“.

Nechcem však zotrvávať na nadsadených tvrdeniach desaťročia, na ktoré mnohí z nás (autor má na mysli amerických matematikov — pozn. prekl.) spomínajú s nostalgiou. Extrémne abstrakcie vo vedeckom výskume, pokusy vnútiť deťom nezrelú sofistiku aj nekritický expanzionizmus v základnom výskume v prírodných vedách vyvolali reakcie, ktoré hrozia teraz zájsť priďaleko v opačnom smere.

Namiesto toho chcem opísať štyri *pozitívne* súčasné trendy v algebre, ktoré sú podľa mojej mienky veľkým prísľubom do budúcnosti.

Štyri počítačmi ovplyvnené súčasné trendy

17. Nová numerická algebra

Už v 40. rokoch sa chýlilo k novej revolúcii, ktorej konečný vplyv na matematiku sa nedá predpovedať. Menovite konštrukcia výkonných *rýchlych číslicových počítačov* umožnila riešiť matematické problémy, ktorých riešenie by vzhľadom na veľkosť nákladov a množstvo potrebného času bolo predtým nemožné. Mnohým matematikom, medzi ktorých som patril aj ja, bolo od roku 1950 jasné, že *revolúcia v aplikovanej matematike*, plynúca z uvedeného vývoja, by mala otvoriť nové oblasti základného výskumu. Konkrétne, keďže v číslicových počítačoch sa reálné čísla dajú reprezentovať len *konečným* počtom platných číslic a pretože aj hodnoty reálnych funkcií sa dajú vyčísľovať len v *konečnom* počte tzv. uzlových bodov, použitie počítačov pri riešení diferenciálnych rovníc (například vo fyzike a v technike) si vyžaduje veľmi starostlivú *numerickú analýzu zaokrúhľovacích chýb*[36]).

Teda ak máme skutočne vyriešiť systém diferenciálnych rovníc (s požadovanou presnosťou), musíme ho obvykle najprv nahradiť nejakým aproximačným systémom *algebraických rovníc* (ktorý môžeme získať napríklad metódou konečných diferencií alebo konečných prvkov), ktorého neznáme predstavujú približné hodnoty v uzlových bodoch a ktorý potom riešime (taktiež približne) na číslicovom počítači. Nebudem tu hovoriť o tomto prvom kroku — *o diskretizácii* — pretože vety z numerickej analýzy

---

[35]) American Scientist, Nov. — Dec., 1971.

[36]) Matematici, ktorí si zvykli uvažovať výlučne deduktívne, by si mali uvedomiť, že v praxi sa analýza chýb opiera o empirické dôkazy aj o teoretické princípy.

a teórie aproximácie, o ktoré sa opiera, patria do klasickej analýzy, a nie do algebry. Postačí, ak poviem, že tento postup veľmi často vedie k veľkým maticiam a k nim patriacim systémom lineárnych rovníc, ktoré môžu obsahovať 50 000 alebo aj viac neznámych. Hlavným problémom potom je tento systém efektívne vyriešiť.

Pre tieto matice je príznačné, že majú mnohé špeciálne vlastnosti, ktoré musíme využiť, ak chceme dosiahnuť, aby výpočet bol efektívny. Majú obvykle väčšinu prvkov rovných nule a často sú symetrické alebo symetrizovateľné vhodnými permutáciami alebo lineárnymi transformáciami. Ich diagonálne prvky môžu byť dominantné (čiže aspoň také veľké ako súčet absolútnych hodnôt ostatných prvkov) a tiež všetky diagonálne prvky môžu byť kladné a všetky prvky mimo diagonály záporné. Matice, ktoré majú všetky uvedené vlastnosti sú tzv. *Stieltjesove matice*; vznikajú prirodzeným spôsobom pri riešení *problémov toku v sieťach.*

Najčastejšie chceme buď (i) *riešiť* lineárny systém (symbolicky zapísaný $Ax = b$), alebo (ii) určiť *vlastné hodnoty* matice A (to znamená korene rovnice $|A - \lambda I| = 0$). Pokiaľ ide o (i), väčšina matematikov v roku 1940 si predstavovala, že ak sa veľké lineárne systémy vôbec dajú riešiť, tak *Gaussovou elimináciou*, a to ostatné je len drina. Niekoľkí významní bádatelia v analýze (medzi nimi Gauss, Jacobi a von Mises) ocenili hodnotu *iteračných* metód (ktoré tiež používal Gauss) a študovali ich rýchlosť konvergencie; tieto metódy však boli (a stále sú) úplne obchádzané v učebniciach lineárnej algebry. Podobná situácia je aj s problémom vlastných hodnôt, kde skúsenosť väčšiny matematikov končí pri maticiach $A = \|a_{ij}\|$ typu 3×3 (ak nie 2×2), ktorých vlastné hodnoty sa dajú nájsť použitím učebnicových vzorcov riešením kubickej charakteristickej rovnice

$$\lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\,\lambda^2 + \beta\lambda - |A| = 0\,,$$

kde

$$\beta = a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23}a_{32} - a_{31}a_{13} - a_{12}a_{21}\,.$$

Tieto učebnicové metódy, ktoré sú v praxi veľmi nepresné a neefektívne pre väčšinu veľkých matíc[37]), boli v 50. rokoch nahradené novými algoritmami. Ako dôsledok objavu a analýzy týchto algoritmov sa vytvorila obsiahla nová oblasť „klasickej" algebry: *nová numerická algebra.* Súčasný stav poznatkov v tejto oblasti vynikajúcim spôsobom zachycujú s prehľadom napísané knihy Vargu [11], Wilkinsona [12] a Younga [13]; každý predvídavý mladý algebraik by sa mal aspoň oboznámiť s ich obsahom.

18. Riedke matice

V posledných piatich rokoch došlo tiež k podstatným vylepšeniam (oproti Gaussovi) *eliminačných* techník používaných na riešenie veľkých systémov, ktorých matice koeficientov sú riedke. Sú založené najmä na myšlienkach z teórie grafov; prierez súčasného stavu výskumu podáva [14].

---

[37]) Hoci nie až také neefektívne ako Cramerovo pravidlo, ktoré je často jediným receptom, ktorý sa učia študenti.

V reálnej i komplexnej numerickej algebre sú mnohe ďalšie zaujímavé oblasti výskumu. Spomeniem len tri, ktoré patria medzi najvýznamnejšie; výsledky v nich dosiahnuté sa uvádzajú v mnohých referatívnych časopisoch.

a) Hľadanie koreňov polynómov stupňa až 100.
b) „Neviazaná" minimalizácia funkcií viacerých premenných.
c) Lineárne programovanie a iné metódy hľadania miním funkcií „viazaných" rovnicami a nerovnicami.

Tieto „nové" oblasti vznikli vlastne tiež v 40. rokoch, ak nie skôr. Tak už v roku 1947 bolo známe lineárne programovanie a simplexová metóda riešenia jeho problémov, ktorú zaviedol George Dantzig; viď str. 20 knihy G. Hadley: *Linear Programming* (Addison-Wesley 1962). O 10 rokov neskôr Kemeny, Snell a Thompson v obľúbenej učebnici *Introduction to Finite Mathematics* (Prentice-Hall 1957) sprístupnili jeho základné metódy aj poslucháčom prvých ročníkov vysokých škôl.

19. Celočíselná aritmetika

V programovacích jazykoch pre počítače sa zásadne rozlišuje medzi *presnou* „celočíselnou aritmetikou" a *približnou* „aritmetikou reálnych čísel". Až doteraz som sa nezmieňoval o problémoch „celočíselného programovania" a riešenia diofantických rovníc na počítačoch, pretože sa týkajú algebry celých čísel a nie reálnej a komplexnej numerickej algebry. Pritom však aktivita v týchto oblastiach predstavuje ďalší silný trend v súčasnej numerickej algebre.

20. Teória automatov

Hoci mnoho matematikov považuje počítače iba za „mlynčeky na čísla", prípadne za superzdokonalené logaritmické pravítka, ktorých hlavnou matematickou úlohou je vykonávať prácne numerické výpočty, a hoci „aritmetické jednotky" bývajú najzložitejšími časťami samotného počítača (hardware), sú počítače v skutočnosti vhodné aj na mnohé iné veci. Veľké viacúčelové počítače sa konštruujú ako *univerzálne* nástroje schopné vykonávať rôznorodú „duševnú" činnosť. Podobne ako v priemyselnej revolúcii mali rozhodujúcu úlohu stroje, ktoré dokázali konať všetky druhy fyzickej práce lacnejšie a efektívnejšie ako ľudia, počítačová revolúcia má za cieľ to isté v oblasti mentálnej činnosti. Takéto perspektívy dodávajú štúdiu počítačov mimoriadne fascinujúci charakter. Čiastočne preto, že univerzálne počítače pozostávajú z konečného počtu prvkov, ich štúdium z matematického hľadiska spočíva na novom, *čisto algebraickom pojme*, ktorý budem definovať axiomaticky.

Definícia. *Konečný automat* (stroj s konečným počtom stavov) M pozostáva z množiny A vstupných symbolov, množiny S stavov a množiny Z výstupných symbolov, pričom sú dané dve operácie $v : A \times S \to S$ a $\zeta : S \times Z \to Z$. Operácia v priraďuje vstupnému symbolu $a \in A$ a momentálnemu stavu $s \in S$ nový stav $v(a, s) \in S$; operácia ζ priraďuje usporiadanej dvojici (a, s) výstup $\zeta(a, s) \in Z$. Konkrétnejšie si možno predstaviť, že takýto konečný automat M z počiatočného stavu s_0 postupne prechádza rekurzívne definovanými stavmi $s_k = \nu(s_{k-1}, a_k)$, pričom na výstupe tlačí postupne symboly $z_k = \zeta(s_{k-1}, a_k)$ pre $k = 1, 2, \ldots, n$. Takýmto spôsobom prevádza konečné postupnosti vstupných symbolov čiže programy, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ na postupnosti výstupných symbolov $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Z abstraktného hľadiska je konečný automat vlastne len novým druhom algebraického systému $M = [A, S, Z, \nu, \zeta]$. Ak si ho zjednodušíme ignorovaním Z a ζ (v teórii kategórií sa tomu hovorí zabúdajúci funktor), popisuje takto zjednodušený systém M *akciu voľnej pologrupy* (množiny A^* všetkých možných vstupných programov) *na istej množine* (ktorou je množina S stavov).

Výsledná teória automatov bez výstupu sa pekne hodí do axiomatickej (čiže modernej) algebry a ako sa nedávno ukázalo[38]), možno na ňu aplikovať metódy tzv. univerzálnej algebry.

21. Turingove stroje

Podobné konečným automatom, ale o niečo komplikovanejšie, sú „Turingove stroje", ktoré definoval logik Turing v roku 1936, prv než existovali rýchle univerzálne číslicové počítače. Turing dokázal, že jeho stroje môžu vykonávať väčšinu procesov matematického „myslenia". Tak napríklad sú schopné vytlačiť binárny alebo desatinný rozvoj ľubovoľného definovateľného (čiže „vypočítateľného") reálneho čísla ako je e, π alebo k-ty nulový bod Besselovej funkcie $J_n(x)$. Vedia tiež „odvodiť všetky dokázateľné formuly *zúženého* Hilbertovho funkcionálneho počtu", a to tak, že napíšu všetky pravdivé vety a ani jednu nepravdivú.

Asi dvadsať rokov po tom, čo Turing ukázal, že jeho stroje *principiálne* môžu vykonávať mechanické dokazovanie viet, o akom snίval Leibniz, Whitehead, Russell a Hilbert, Hao Wang to *prakticky* uskutočnil. Zostavil totiž špeciálny program, ktorý za niekoľko minút vyprodukoval „dôkazy" všetkých 350 viet predikátového počtu s rovnosťou, ktoré uviedli Whitehead a Russell v *Principia Mathematica.*[39])

22. Zložitosť výpočtov, optimalizácia

Veľmi silný je tretí trend v algebre, ktorý sa prejavuje vlastne v celej matematike, totiž záujem o *zložitosť výpočtov* a o *optimalizáciu*. Vo všetkých *aplikáciách* algebry má efektívnosť narábania so symbolmi zrejme prvoradý význam, avšak písať o nej v odborných časopisoch venovaných čistej matematike bolo po mnoho rokov tabu.

Toto snobské tabu týkajúce sa efektívnosti zastrelo niektoré veľmi významné základné

[38]) G. Birkhoff, J. D. Lipson: *Heterogeneous Algebras*, J. Comb. Analysis, *2* (1969).

[39]) H. Wang: *IBM*, J. Res. Develop. *4* (1960) 2—22. Všeobecná otázka počítača ako „mozgu" sa preberá v literatúre citovanej v poznámke 22.

fakty. Príklad z oblasti matematickej logiky: ani v učených knihách od Whiteheada a Russella, ani v Hilbertovej škole sa *nevyskytli* vážne snahy o zvýšenie efektívnosti formálnych deduktívnych schém. Na druhej strane LEIBNIZ a PEANO sa naozaj snažili (a s úspechom, zvlášť Leibniz) vypracovať symbolické postupy, ktoré by zlepšili účinnosť, a teda aj použiteľnosť matematických úvah.

Tento rozdiel si bolestne uvedomujeme pri porovnaní počtu symbolov, ktoré potrebovali Russell a Whitehead na odvodenie základných formúl a vlastností množín a relácií, s počtom slov, pomocou ktorých matematici zájdu rovnako ďaleko. Doteraz sa vo väčšom rozsahu mechanicky dokazovali vety len v oblasti predikátového počtu samotnej logiky, a to s použitím výkonného počítača (Hao Wang, viď § 21).

Keď si matematickí logici konečne uvedomili význam efektívnosti, začali analyzovať výpočtovú zložitosť aplikovania všeobecných definícií na špeciálne prípady. Ich analýza už priniesla ovocie pri vypracovaní kratších postupov násobenia čísel a matíc.

Konečným cieľom záujmu o zložitosť výpočtov v algebre je samozrejme *optimalizácia* symbolických metód. A obrátene, z problému optimalizácie už vyplynulo mnoho základných problémov, ktorých riešenie by malo byť trvalým predmetom výskumov budúcich generácií čistých algebraikov. Dva z nich sú: (i) problém „najkratšej formuly“ v Booleových algebrách, (ii) problém najefektívnejšieho kódovania v teórii informácie.

Ďalšie fascinujúce optimalizačné problémy, v súvislosti s ktorými sa nedávno dosiahli prekvapujúce objavy, sú: (iii) aký najmenší počet operácií s číslicami treba na vynásobenie n-ciferných celých čísel, (iv) aký najmenší počet algebraických operácií treba na vynásobenie dvoch matíc typu $n \times n$, (v) ako možno sústavu n lineárnych rovníc o n neznámych riešiť s čo najmenším počtom operácií sčítania, odčítania, násobenia a delenia? Mrzí ma, že nemám čas zaoberať sa týmito problémami na tomto mieste a musím vás odkázať na literatúru [15] a ([16], zv. 2, str. 258–278).

23. Kombinatorická algebra

Štvrtý zo súčasných trendov v algebre smeruje k zdôrazneniu *kombinatorických ideí*[40]), najmä takých, ktoré sa týkajú *grafov* a *sietí*. Tento trend zaiste vyplýva z intuitívneho spoznania skutočnosti, že štruktúra číslicových počítačov a deduktívnych postupov matematiky sa nedá analyzovať bez použitia kombinatorických metód. HERMANN WEYL napísal v roku 1949: „Sieť nervov spájajúcich mozog so zmyslovými orgánmi je predmetom, ktorý svojou povahou nabáda ku kombinatorickému skúmaniu. Moderné počítače pomocou mechanických a elektronických zariadení prakticky realizujú náš pohľad do kombinatorickej štruktúry matematiky[41])“.

Vo všetkých prácach, od prvých výhonkov, ktorými sú kurzy „diskrétnej matematiky“ mienené ako *príprava* na kurzy axiomatickej algebry[42]), pravdepodobnosti a štatistiky,

[40]) WALLIS, TCHIRNHAUS aj LEIBNIZ uznávali už pred rokom 1700, že kombinatorika patrí do algebry. Pozri ([3], str. 14) a ([15], str. 2).

[41]) E. F. BECKENBACH (redaktor), *Applied Combinatorial Mathematics*, Wiley, 1964, str. 537.

[42]) Na strednej úrovni pozri C. L. LIU, *Introduction to Combinatorial Mathematics*, McGraw-Hill, 1968, pokročilejší čitateľ môže pozrieť M. HALL, *Combinatorial Theory*, Ginn, 1967.

až po náročné 7zväzkové dielo [16] DONALDA KNUTHA *o umení programovať na počítačoch,* sa do popredia dostáva to isté: permutácie, kombinácie, rozklady, generujúce funkcie, stromy, triedenie, vyhľadávanie a tiež diferenčné rovnice, blokové schémy atď. Aj po zbežnom prečítaní citovaných kníh je jasné, že sa skončilo 200ročné panstvo infinitezimálneho počtu a analýzy a že na vysokých školách sa tieto predmety budú stále viac nahrádzať kurzami algebry v najširšom zmysle, t. j. diskrétnej matematiky a prednáškami o manipulácii so symbolmi, ktorá už nie je iba umením, ale *vedou.*

Tento trend je v istom zmysle pokračovaním revolúcie, ktorú začal van der Waerden, no predsa sa od nej významne líši. Axiómy a deduktívne systémy vytvárané podľa vzoru EUKLIDOVÝCH *Základov* sa už nezdajú také podstatné. To isté platí o grupách, okruhoch, ich podgrupách, podokruhoch a morfizmoch. Nahrádzajú ich rozličné *relačné štruktúry* (medzi nimi čiastočne usporiadané množiny a „komplexy" v zmysle kombinatorickej topológie), na štúdium ktorých sa v oveľa menšej miere hodia všeobecné algebraické metódy, ktoré mali ústredné postavenie v „modernej algebre" rokov 1930–1960.

Naproti tomu spomedzi algebraických štruktúr, na rozdiel od relačných štruktúr, najprístupnejšie číslicovým počítačom a kombinatorickému štúdiu sú lupy, monoidy a zväzy (alebo grupoidy, pologrupy a polozväzy), ktoré väčšina algebraikov v rokoch 1930–1960 takmer ignorovala. Zjednodušene hovoriac, tak ako *grupy* súvisia so *symetriami,* tak *lupy* súvisia s dezénmi (ťažko preložiteľné angl. slovo *patterns* – pozn. prekl.), *monoidy* s *pôsobením* (napríklad vstupných inštrukcií na stavy automatu) a *zväzy* so *štruktúrou.*

Špeciálne ROTA[43]) a jeho spolupracovníci ukázali, že teória zväzov je východiskom, z ktorého možno výhodne riešiť kombinatorické problémy vo všeobecnosti a nie len problémy algebry, ako som napísal v roku 1933 (viď § 7). N. S. MENDELSOHN zašiel ešte ďalej, keď nedávno použil pojmy univerzálnej algebry na vytváranie „combinatorial designs" a obrátene ([17], str. 123–132).

Prirodzene vzniká otázka, kam tieto nové trendy povedú. Osobne som presvedčený len o jednom: Klasická „moderná algebra" rozvinutá van der Waerdenom sa ich rozvojom nestane zaostalou o nič viac, ako sa pod jej vplyvom stala zaostalou reálna a komplexná algebra alebo infinitezimálny počet. Ako zdôrazňuje KNUTH ([16], zv. 1, str. 1) (viď tiež [2]) slovo *algoritmus,* ktoré má vo výpočtovej matematike také ústredné postavenie, vzniklo z mena pôvodcu slova algebra AL-CHWARIZMIHO.

V skutočnosti úvahy o číslicových počítačoch len *podnietili* štyri súčasné trendy v algebre, ktoré som popisoval, rovnako ako rozvoj infinitezimálneho počtu a analýzy bol podnietený uvažovaním o geometrii, mechanike a matematickej fyzike. Tieto trendy prosto otvárajú nové oblasti matematiky a úlohou budúcich generácií bude skúmať tieto oblasti s ich stále pestrejšími a bohatšími vzťahmi a aplikáciami. Pritom staré a nové idey sa budú prelínať a pretvárať a z tohoto procesu azda v najbližších desaťročiach vzídu nové pojmy a nové trendy. Nepochybne jedine takýto neustály vývoj umožní algebre zostať trvale sviežou a vzrušujúcou vedou.

---

[43]) *On the foundations of combinatorial theory,* J. für Wahrsch., *2* (1966), 340–368; *Combinatorial geometries* (preliminary edition), M. I. T. Press, 1970; a literatúra tam citovaná.

[10] Montgomery, D., Zippin, L.: *Topological Transformation Groups*, Wiley-Interscience, New York, 1955.
[11] Varga, R. S.: *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.
[12] Wilkinson, J.: *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Clarendon Press, Oxford, 1966.
[13] Young, D. M.: *Iterative Solution of Large Linear Systems*, Academic Press, New York, 1971.
[14] Rose, D.; Willoughby, R. (red.): *Sparse Matrices and their Application*, Plenum Press, New York, 1971.
[15] Birkhoff G., Hall, M. (red.): *Computers in Algebra and Number Theory*, SIAM-AMS Proceedings, vol. IV, Amer. Math. Society, 1971.
[16] Knuth, D.: *Algorithms*, 7 plánovaných szväzkov, Addion Wesley, Reading, Mass., 1969.
[17] Tutte, W. (red.): *Recent Progress in Combinatorics*, Academic Press, New York, 1969.
[18] Birkhoff, G., Bartee, T. C.: *Modern Applied Algebra*, McGraw-Hill, New York, 1970.
[19] Birkhoff, G., Mac Lane, S.: *A Survey of Modern Algebra*, Macmillan, New York, 1941.
[20] Grätzer, G.: *Univerzal Algebra*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1968.
[21] Mac Lane, S., Birkhoff, G.: *Algebra*, Macmillan, New York, 1967.
[22] Peano, G.: *Formulario Matematico*, 4. vyd., Torino, 1908.
[23] Van der Waerden, B. L.: *Moderne Algebra*, 2 zv., Springer, New York, 1930—31.

Zlom tradice*)

(K 150. výročí Lobačevského kazaňské přednášky)

Jaroslav Folta

Dne 11. (23.) února 1826 přednesl Nikolaj Ivanovič Lobačevskij, tehdy 34letý profesor kazaňské univerzity, před svými kolegy z fyzikálně matematického oddělení univerzity v Kazani svou přednášku věnovanou nové geometrii s žádostí, aby její francouzský text byl po posouzení otištěn v učených zápiscích univerzity. Text přednášky se však od recenzentů nevrátil. Teprve v r. 1834 (osm let poté) se objevuje v protokolu ze zasedání fakulty poznámka, že rukopis přednášky nazvané „*Stručný výklad základů geometrie s přesným důkazem věty o rovnoběžkách*" má být odevzdán do archívu. Dodnes se však nenalezl, a tak vlastně první tištěná práce věnovaná neeukleidovské geometrii je Lobačevského studie „*O základech geometrie*", kterou v letech 1829—30 začal otiskovat Kazaňský věstník.

Práci nad svým objevem pak Lobačevský věnoval zbývajících třicet let svého života. Když před 120 lety 12. (24.) února 1856 osleplý matematik umírá, začíná se poznenáhlu probouzet světová matematická veřejnost, aby našla cestu k seznámení s myšlenkami jeho nové geometrie.

---

*) Přednáška proslovená 10. února 1976 na slavnostním shromáždění JSMF a přírodo vědecké fakulty Univerzity Komenského v Bratislavě.