Jaroslav Folta

Zlom tradice (K 150. výročí Lobačevského kazaňské přednášky)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 21 (1976), No. 5, 259--269

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139326

[10] MONTGOMERY, D., ZIPPIN, L.: *Topological Transformation Groups*, Wiley-Interscience, New York, 1955.
[11] VARGA, R. S.: *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.
[12] WILKINSON, J.: *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Clarendon Press, Oxford, 1966.
[13] YOUNG, D. M.: *Iterative Solution of Large Linear Systems*, Academic Press, New York, 1971.
[14] ROSE, D.; WILLOUGHBY, R. (red.): *Sparse Matrices and their Application*, Plenum Press, New York, 1971.
[15] BIRKHOFF G., HALL, M. (red.): *Computers in Algebra and Number Theory*, SIAM-AMS Proceedings, vol. IV, Amer. Math. Society, 1971.
[16] KNUTH, D.: *Algorithms*, 7 plánovaných szväzkov, Addion Wesley, Reading, Mass., 1969.
[17] TUTTE, W. (red.): *Recent Progress in Combinatorics*, Academic Press, New York, 1969.
[18] BIRKHOFF, G., BARTEE, T. C.: *Modern Applied Algebra*, McGraw-Hill, New York, 1970.
[19] BIRKHOFF, G., MAC LANE, S.: *A Survey of Modern Algebra*, Macmillan, New York, 1941.
[20] GRÄTZER, G.: *Univerzal Algebra*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1968.
[21] MAC LANE, S., BIRKHOFF, G.: *Algebra*, Macmillan, New York, 1967.
[22] PEANO, G.: *Formulario Matematico*, 4. vyd., Torino, 1908.
[23] VAN DER WAERDEN, B. L.: *Moderne Algebra*, 2 zv., Springer, New York, 1930—31.

Zlom tradice*)

(K 150. výročí Lobačevského kazaňské přednášky)

Jaroslav Folta

Dne 11. (23.) února 1826 přednesl NIKOLAJ IVANOVIČ LOBAČEVSKIJ, tehdy 34letý profesor kazaňské univerzity, před svými kolegy z fyzikálně matematického oddělení univerzity v Kazani svou přednášku věnovanou nové geometrii s žádostí, aby její francouzský text byl po posouzení otištěn v učených zápiscích univerzity. Text přednášky se však od recenzentů nevrátil. Teprve v r. 1834 (osm let poté) se objevuje v protokolu ze zasedání fakulty poznámka, že rukopis přednášky nazvané *„Stručný výklad základů geometrie s přesným důkazem věty o rovnoběžkách“* má být odevzdán do archívu. Dodnes se však nenalezl, a tak vlastně první tištěná práce věnovaná neeukleidovské geometrii je Lobačevského studie *„O základech geometrie“*, kterou v letech 1829—30 začal otiskovat Kazaňský věstník.

Práci nad svým objevem pak Lobačevský věnoval zbývajících třicet let svého života. Když před 120 lety 12. (24.) února 1856 oslepplý matematik umírá, začíná se poznenáhlu probouzet světová matematická veřejnost, aby našla cestu k seznámení s myšlenkami jeho nové geometrie.

*) Přednáška proslovená 10. února 1976 na slavnostním shromáždění JSMF a přírodo vědecké fakulty Univerzity Komenského v Bratislavě.

1. Eukleidův pátý postulát

EUKLEIDOVY *Základy*, vznikající ve 4. století před naším letopočtem, v době, kdy se už matematické znalosti konstituovaly ve vědeckou disciplínu, se snažily soustředit několik tehdy existujících matematických disciplín – ale zdaleka ne všechny – do jednotné, logické koncepce výkladu. Právě touto logickou konstrukcí, zdánlivě se opírající pouze o systém několika axiómů a postulátů, udivovaly nejen své současníky, ale rovněž další matematické generace. Ještě v 16. století jsou nadšeně charakterizovány HIERONYMEM CARDANEM: „Jejich nezvratnost a jejich dokonalost jsou tak absolutní, že s nimi nelze srovnávat žádné jiné dílo. Proto se v nich odráží světlo pravdy tak, že jen ten může rozlišit pravdu od lži v složitých otázkách geometrie, kdo si osvojil Eukleida".

Zdůraznění významu logické výstavby matematické teorie bylo jednou stránkou, v níž další vývoj matematiky čerpal z Eukleidových *Základů*. Současně však byl už v antice podrobován pozornému zkoumání systém výchozích principů, o které se geometrie opírala, především pak systém axiómů a postulátů, přičemž zvláštní kritice byl podroben právě relativně složitě formulovaný postulát o rovnoběžkách. Jaké byly asi pohnutky zařazení pátého postulátu do výchozích principů Eukleidových *Základů*?

Existují historici matematiky, kteří pokládají výklad Eukleidových *Základů* za výraz určité koncepce aplikované matematiky a soudí, že doeukleidovská matematika nebyla svázána eukleidovskými omezeními*), která byla výrazem abstrakce vyvozované z měřické praxe i užívaných měřických pomůcek. Pět Eukleidových postulátů tak vlastně zaručuje provádění geometrických konstrukcí (vyvozovaných ze zeměměřické praxe) v určité „ideální" formě. Postuláty zaručují především možnost užívání pravítka a kružítka a konstrukci úseček a kružnic. Čtvrtý postulát vnáší do systému pojem shodnosti a pátý (*dvě přímky ležící v rovině se protnou, jestliže vytvářejí s přímkou, která je obě protíná, „vnitřní" úhly, jejichž součet je menší než dva pravé*) umožňuje vlastně konstrukci trojúhelníka.

Nutno přiznat, že postuláty lze skutečně považovat za abstrakci jedné z nejzávažnějších částí tehdejší aplikované matematiky – hlavních principů procesu vyměřování. Konstruktivní omezení vyplývající ze zeměměřické praxe vedla pak v geometrické teorii k omezení na pouhé používání kružítka a pravítka, tj. na „eukleidovské konstrukce". Jestliže si uvědomíme, že geometři v té době znají i další konstruktivní postupy a používají k řešení různých matematických problémů zejména kinematických metod (trisekce úhlu pomocí kvadratrix či konchoidy, zdvojení krychle pomocí ERATOSTÉNOVA mezolabia apod.), pak vidíme, že z hlediska aplikace tehdejší geometrie je postavení i formulace pátého postulátu v systému Eukleidových *Základů* plně zdůvodněné.

Znění pátého postulátu však bylo proti ostatním postulátům komplikované a proto nacházelo pojetí rovnoběžek své kritiky už v antickém Řecku. Znám je zejména PROKLŮV pokus o důkaz pátého postulátu, opírající se o úvahu, že obrácená implikace pátého postulátu dává větu „součet dvou vnitřních úhlů v trojúhelníku je menší než dva pravé",

*) IMRE TOTH 1966 na základě rozboru některých textů Aristotela přišel k závěru, že v antické matematice do Eukleida se zkoumaly geometrické soustavy, v nichž nebyl součet úhlů v trojúhelníku roven dvěma pravým úhlům, ale mohl být buď větší, nebo menší než 2R. Podobné názory vyslovil o mezopotamské geometrii E. M. BRUINS.

kterou lze dokázat nezávisle na pátém postulátu. V Proklově důkazu věty: „Protíná-li jedna přímka jednu ze dvou neprotínajících se přímek, pak protne i druhou z nich“, je však skrytě využito vlastnosti ekvidistance rovnoběžek, jež je ekvivalentní s pátým postulátem.

Prostřednictvím SIMPLICIA, známého jako komentátora ARISTOTELA (žil počátkem šestého století n. l. v Aténách a po uzavření aténské akademie Justiniánem r. 526 odešel do Persie), přenesla se problematika postulátu o rovnoběžkách do vznikající arabské matematiky.

Prvá arabská práce věnovaná těmto otázkám byla sepsána AL-ABBAS IBN SAID -AL - DŽAUCHARÍM (poč. 9. stol. – Bagdád); navazuje na Simpliciův důkaz a je citována ve všech dalších pracích arabských geometrů (SABIT IBN KORRA; IBN AL -HAJSAM; OMAR CHAJJÁM).

2. Tři hypotézy o součtu úhlů v trojúhelníku

Nepříliš rychlý vývoj studia problematiky postulátu o rovnoběžkách v orientální matematice přece jen přinesl vědomí obdobnosti (či ekvivalence) některých tvrzení, takže začalo být jasné, že se nelze opírat o některé věty ve snaze o důkaz pátého postulátu, protože samy nejsou odvoditelné pouze z předchozích postulátů. Tak si vlastně matematici uvědomovali ekvivalenci tvrzení: bodem lze vést jedinou rovnoběžku k dané přímce v rovině; součet úhlů v trojúhelníku je roven 2R; rovnoběžky mají v každém bodě stejně velkou vzájemnou kolmici apod.

Nový obrat dostala tato bádání už v díle Omara Chajjáma, který paralelně vedle sebe formuluje tři hypotézy o zbývajících úhlech ve čtyřúhelníku, konstruovaném z úsečky, dvou shodných a k ní kolmých úseček a spojnice jejich koncových bodů (známý později jako Saccheriho čtyřúhelník). I zde lze sledovat přímou linii, kterou se myšlenky Chajjámovy vracely z Orientu do evropské matematiky. V polovině 13. století přijímá Chajjámovy výsledky a dále je rozpracovává NÁSIRRUDÍN TÚSÍ (1201 – 1274), jehož práce byla až v r. 1594 vydána arabsky a 1657 latinsky v Římě. Z latinského vydání je přejímá JOHN WALLIS 1693 a od Wallise je cituje jeden z prvních evropských předchůdců neeukleidovských idejí GIROLAMO SACCHERI ve své práci *Eukleides zbavený všech poskvrn* (1733). Druhá polovina 18. století znamená zvýšenou aktivitu matematiků v řešení „problému rovnoběžek“. Řada historických i soudobých „důkazů“ byla podrobena kritice z iniciativy göttingenského profesora matematiky ABRAHAMA G. KÄSTNERA v disertaci jeho žáka GEORGA S. KLÜGELA v roce 1763. Klügel ukazuje chyby 28 „důkazů“ a jeho spis podnítil LAMBERTA k hlubšímu studiu této problematiky (1766).

Lambert podobně jako už před ním Saccheri znovu zkoumá všechny tři hypotézy o velikosti úhlu vytvořeném dvěma kolmicemi k ramenům pravého úhlu. Se svým konečným řešením však zřejmě není spokojen a přestože jiné své práce publikoval velmi rychle, zůstává tato studie v jeho pozůstalosti a teprve devět let po jeho smrti je vydána. Formulace hypotézy pravého, ostrého či tupého úhlu a snaha po formálním rozvíjení důsledků z těchto hypotéz tvořila vrchol, ke kterému mohla dospět v 18. století eukleidovská tradice stále ještě příliš svázaná s představou fyzického prostoru jako rozhodce správnosti vyvozovaných matematických vět.

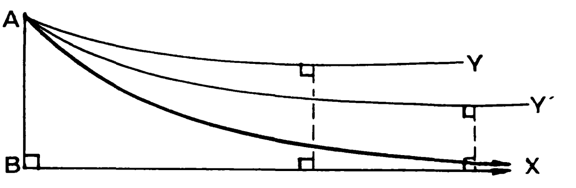
Proto může Saccheri formálně vyvodit řadu vět hyperbolické geometrie*), aby nakonec zcela odmítl hypotézu ostrého úhlu jako falešnou, „neboť odporuje přirozenosti přímky". A stejně i tradiční představa eukleidovské roviny svazovala úvahy J. H. Lamberta.

Lambert je však jedním z prvních, kdo si uvědomuje možnost matematického modelu, ve kterém by mohly (teoreticky správně, při konfrontaci s fyzickým prostorem zdánlivě i nepravdivě) platit jiné vztahy, než jsou ty, které nám poskytuje každodenní měřická zkušenost. Zde udělal Lambert ve svých úvahách značný krok kupředu, když napsal: „Přitom se mi zdá zvláštní, že druhá hypotéza [tupého úhlu] platí, když místo rovinných trojúhelníků vezmeme sférické, neboť u těch je jak součet úhlů větší než 180°, tak také exces úměrný ploše trojúhelníka" . . . „U [hypotézy ostrého úhlu] není . . . jen v každém trojúhelníku součet tří úhlů menší než 180° . . . nýbrž ještě odchylka od 180° roste podle velikosti plochy trojúhelníka; chci říci: když ze dvou trojúhelníků jeden má větší plochu než druhý, pak je v prvním součet úhlů menší než v druhém . . . z toho bych měl skoro činit závěr, že třetí hypotéza platí pro imaginární kulovou plochu . . .".

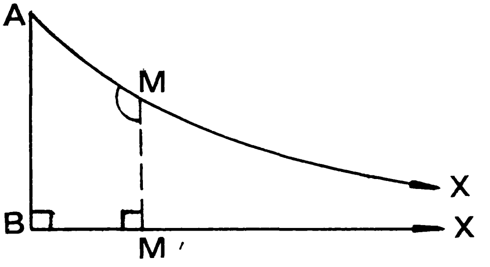
U Lamberta se tedy poprvé objevuje myšlenka jistého modelu interpretujícího neeukleidovské představy. Dosud tradiční, rovinná geometrie dostává – zatím jen náznakově – paralelní geometrii na speciální ploše, a pojem přímka začíná ztrácet svůj eukleidovský charakter. Tuší se zde závislost geometrie na charakteru (či zakřivení) prostoru, který popisuje. Lambertovy podnětné představy však zapadly. Zřejmě ani neměl úmysl je publikovat. Závěrečný krok jeho studie jakoby se vymkl duchu celého článku, podléhá zcela tradičním eukleidovským představám. Lze se domnívat, že právě s ním nebyl spokojen, a tak přestože žil ještě jedenáct let, neuveřejnil tuto studii a ta zůstala nakonec neznáma i po publikaci z pozůstalosti v r. 1786. Poprvé ji snad objevil až v roce 1893 Stäckel, když shromažďoval materiály k vývoji neeukleidovské geometrie.

---

*) 1. Platí-li hypotéza ostrého úhlu, pak se kolmice a nekolmice k téže přímce nemusí protnout.
2. Dvě přímky mají buď společnou kolmici, nebo se protínají nebo se blíží.
3. Dvě přímky, které se blíží, blíží se asymptoticky.
4. Mezi přímkami AY, které mají s BX společnou kolmici, neexistuje přímka, která by svírala s AB nejmenší úhel (obr. 1).
5. Je-li $MM' \perp BX$ a bod M se vzdaluje od bodu A, pak se úhel AMM' zmenšuje tak, že rozdíl mezi ním a pravým úhlem se může stát libovolně malý (obr. 2).



Obr. 1.



Obr. 2.

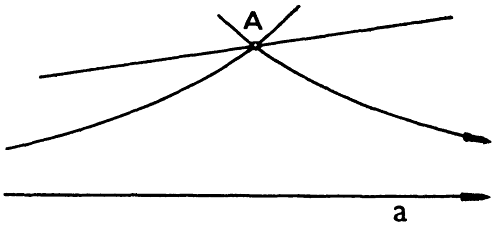
3. „... z ničeho nový zvláštní svět"

K rozhodujícímu kroku bylo třeba překročit mez, která nebyla jen krokem od eukleidovské planimetrie k neeukleidovské. Byl to velmi závažný krok, při kterém se začal měnit vztah matematiky a ostatních věd a při kterém se matematika zaměřila též na svůj vnitřní svět. Krok od kvantifikace fyzické reality k vytváření vlastních vnitřních modelů odpovídajících vnitřním logickým zákonům vypracované teorie, matematických modelů, které neměly okamžitou fyzickou verifikaci ve fyzikálních teoriích či ve vnějším světě. A proto byl tento krok tak obtížný pro objevitele nové teorie, proto buď zjevně, nebo skrytě hledali interpretaci této teoretické vize, a proto také naráželi na nepochopení nebo se tomuto nepochopení vyhýbali. Byl to krok, při kterém si matematika začala všímat správnosti svých teorií v rámci určitých podmínek a přestávala pretendovat na to, aby svými prostředky mohla rozhodnout o shodě svých matematických teorií se skutečnostmi vnějšího světa.

Prvá tři desetiletí 19. století jsou dobou objevu neeukleidovské geometrie. GAUSS píše v roce 1846 svému příteli astronomu SCHUMACHEROVI, že zná principy Lobačevského geometrie už 54 let, JÁNOS BOLYAI píše otci v listopadu 1823 „Jsem pevně odhodlán vydat dílo o rovnoběžkách, jen jestli se mi podaří dovést zkoumání do konce... Doposud jsem cíle nedosáhl, ale už jsem odhalil takové vynikající věci, že sám žasnu... Vytvořil jsem z ničeho nový zvláštní svět...". Publikoval však své myšlenky až v roce 1832 jako dodatek (Appendix) ke spisu svého otce Farkaše *Pokus o uvedení učící se mládeže do základů čisté matematiky* („Tentamen").

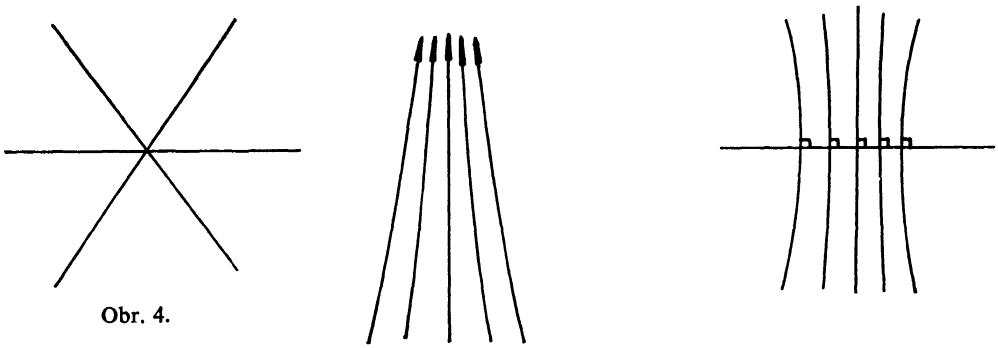
A tak zásluha za prvé veřejné překročení meze oddělující dvě epochy vývoje matematiky náleží Nikolaji Ivanoviči Lobačevskému. 11. února 1826 (podle starého kalendáře) přednášel svou novou geometrii v Kazani, a přestože se původní přednáška nedochovala, uveřejnil již 1829–1830 v univerzitním Kazaňském věstníku na pokračování stať *O načalach geometrii*, která rozšiřuje přednášku z r. 1826. Ovšem srovnáme-li jeho úvodní formulace s formulacemi např. Lambertovými, vidíme zcela jiné hledisko, oproštěné od geometrické empirie a zřetelně vědomé zrovnoprávnění hypotézy ostrého úhlu s hypotézou pravého úhlu: „Jedno i druhé můžeme připustit, aniž bychom kdy došli ke sporu; odtud vycházejí dvě geometrie: jedna, *běžně užívaná* [upotrebiteľnaja] pro svoji jednoduchost, je v souladu se všemi skutečnými měřeními; druhá *pomyslná* [voobražaemaja], obecnější, a proto ve výpočtech složitější, připouští závislost délek na úhlech. Chceme-li pro jeden trojúhelník připustit, že má součet úhlů roven 2R, bude mít součet tuto hodnotu pro každý trojúhelník. Jestliže naproti tomu pro jeden jediný připustíme, že je menší než 2R, pak se snadno dokáže, že s rostoucími stranami tento součet klesá". A reaguje na formulaci Eukleidova pátého postulátu: „Za žádných okolností se tedy nemohou protnout přímky, které s třetí tvoří úhly, jejichž součet je 2R. Je však možné, že se také neprotnou, i když tento součet je menší než 2R, pokud chceme připustit, že součet úhlů v trojúhelníku je menší než 2R". Odtud také vyplynul i další Lobačevského postup při rozvíjení myšlenky hyperbolické geometrie.

Tento princip umožňuje rozlišit ve svazku přímek v rovině tři třídy přímek podle polohy vůči přímce roviny neincidentní s vrcholem svazku: protínající, neprotínající a mezní neprotínající. Mezní neprotínající přímky Lobačevský chápe orientovaně a nazývá je rovnoběžkami, protože mají takto vzaté vlastnosti analogické eukleidovským rovnoběžkám (obr. 3). Tak je jediný typ neprotínajících se přímek v eukleidovské rovině



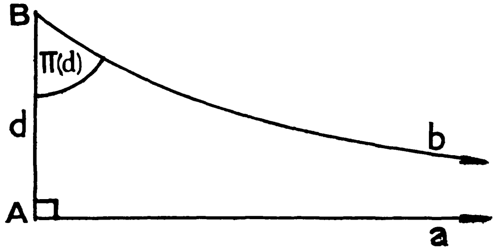
Obr. 3.

(rovnoběžky) diferencován na „souběžky" (Lobačevského rovnoběžky) a „rozběžky" (ostatní neprotínající se přímky), u kterých Lobačevský ukazuje na řadu zajímavých vlastností, především tu, že mají společnou kolmici. Tak v rovině existují tři typy svazků přímek (obr. 4).



Obr. 4.

Pro souběžky pak dokazuje některé věty, které už znali Saccheri a Lambert a zejména se zastavuje u úhlu paralelnosti, který se stává východiskem zavedení analytické metody do hyperbolické geometrie. Ukazuje, že úhel paralelnosti $\Pi(d)$ (obr. 5) je funkcí



Obr. 5.

vzdálenosti $AB = d$, přičemž platí, že pro

$$0 \leqq d < \infty \quad \text{je} \quad R \geqq \Pi(d) > 0$$

a dochází ke vztahu $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\Pi(d) = e^{-d}$.

Hlavní Lobačevského snahou je zavést do svých úvah analytický aparát, aby mohl konfrontovat výsledky dosažené ve vlastním systému s obvyklými výsledky analýzy. K tomu využívá skutečnosti, že v hyperbolické geometrii existují dvě plochy, které odpovídají eukleidovské „kouli s nekonečným poloměrem“ — horosféra (protínající kolmo trs souběžek) a ekvidistantní plocha (protínající kolmo trs rozběžek). Protože vnitřní geometrie na horosféře je ekvivalentní eukleidovské geometrii roviny, opírá se o ni při výkladu goniometrie trojhranu a na tomto základě pak zavádí systém souřadnic a analytickou metodu. V této soustavě se pak snaží využít matematické analýzy k řešení jednak některých známých integrálů, jednak integrálů, které neměly doposud řešení.

Tento, pro Lobačevského zřejmě velmi důležitý krok mu měl prokázat, že výsledky dosažené na základě jeho teorie, nejsou v rozporu s výsledky dosaženými dosavadními metodami. Přesto i u něho se projevuje snaha nejen prokázat vnitřní konzistentnost matematické teorie, ale též se přesvědčit o jejím vztahu k vnější realitě — o její pravdivosti. Uvažuje o možné reálné verifikaci své geometrie u velmi velkých trojúhelníků. Počítá úhly v trojúhelníku, jehož vrcholy tvoří stálice Země, Sirius a Slunce, aby zjistil, jak se mění velikost součtu úhlů v závislosti na růstu velikosti stran. Vypočtené odchylky však byly v mezích pozorovacích chyb.

Lobačevský tedy poprvé zveřejňuje novou koncepci geometrie, oproštěnou od svazující empirie a ihned napoprvé přináší bez rozpaků všechny hlavní myšlenky nové teorie.

4. Boj za zvrat tradice

Ohlas na Lobačevského objev byl takový, jak v Německu předpokládal Gauss — v té době ještě neznající Lobačevského — když v roce 1829 psal Wesselovi: „Pravděpodobně nebudu ještě dlouho moci zpracovat svá zkoumání prostoru v této otázce, aby je bylo možno publikovat. Je dokonce možné, že se k tomu nerozhodnu ani během celého svého života, protože se bojím křiku Boiótů, který se zvedne, až vyslovím v úplnosti své názory“.

A křik anonymních Boiótů zasáhl v Kazani Lobačevského na stránkách časopisu Syn otěčestva v r. 1834: „Rovněž těžko lze pochopit i to, jak pan Lobačevský z nejjednodušší a nejjasnější matematické disciplíny, jakou je geometrie, mohl udělat takovou těžkou, tak temnou a neproniknutelnou nauku, jestliže by nás o tom nepoučil on sám, když říká, že jeho geometrie se liší od *běžně užívané* — kterou jsme se všichni učili a pravděpodobně už se jí neodnaučíme — a je jen *pomyslná*. Protože pak je vše docela dobře pochopitelné. Co udělá fantazie — zvláště živá a současně zvrácená. Proč si třeba nepředstavit, že černé je bílé, okrouhlé hranaté a součet všech úhlů v trojúhelníku menší dvou pravých. Je to velice, velice možné, i když to rozum nepochopí“. . . . „Jak je možné myslet, že by pan Lobačevský — řádný profesor matematiky — napsal s nějakým vážným úmyslem knihu, která by sloužila tak málo ke cti i poslednímu farnímu učiteli... Proč místo *O načalach geometrii* nevolit název satira na geometrii, karikatura geometrie či něco podobného".

Časopis odmítl uveřejnit Lobačevského odpověď a tak Lobačevský uveřejnuje v roce 1835 současně s publikací své práce *Voobražaemaja geometrija* v Zápiscích kazaňské univerzity jen velmi stručnou repliku: „... kritika byla pro mne veskrze urážlivá a soudím, že zcela nespravedlivá. Recenzent založil svůj odsudek jen na tom, že moji teorii nepochopil a pokládá ji za chybnou, protože se v příkladech setkává s jedním „nejapným" integrálem. Nenacházím však ve svém pojednání takový integrál... moje odpověď nebyla dosud po pěti měsících ještě otištěna".

Avšak ani posudek významného matematika akademika OSTROGRADSKÉHO nebyl příznivý. Když na žádost kazaňské univerzity si petrohradská akademie od něho vyžádala posudek, píše o práci, *O načalach geometrii*: ... „O tom, co jsem pročetl, považuji za svou povinnost sdělit akademii toto:
1. Ze dvou omezených integrálů, které p. Lobačevskij považuje za svůj objev, jeden je už známý. Je možné ho vyčíslit pomocí nejelementárnějších metod integrálního počtu. Výpočet druhého integrálu ... je skutečně něco nového. Patří cele panu kazaňskému rektorovi. Na neštěstí je nesprávný.
2. Vše, co jsem pochopil z geometrie pana Lobačevského, je více než podprůměrné.
3. Všechno, co jsem nepochopil, bylo zřejmě špatně vyloženo a lze tedy těžko luštit. Z toho jsem učinil závěr, že kniha ... nezasluhuje ... pozornosti Akademie". V soukromí pak Ostrogradský říkal o Lobačevském, že „není hloupý matematik, avšak je-li třeba ukázat ucho, on ho ukáže zezadu a nikoliv zepředu".

Lobačevský však přesto prohlubuje svou teorii a publikuje po své *Pomyslné geometrii* (1835) v následujícím roce *Aplikace pomyslné geometrie na některé integrály* a obě práce vycházejí také v letech 1836–7 francouzsky v Crellově Journalu. V letech 1835–1838 pak vydává v Zápiscích kazaňské univerzity svou nejobjemnější studii *Novyje načala geometrii s polnoj teoriej paralelnych.* V roce 1840 vychází v Berlíně německy jeho předposlední práce, *Geometrische Untersuchungen über die Theorie der Parallellinien.* *)

S touto prací se seznámil Gauss a píše v roce 1841 svému žáku astronomu ENCKEMU: „KNORR mi poslal malou práci Lobačevského, napsanou v ruštině a díky jí stejně jako jeho nevelké práci o rovnoběžkách v němčině, zachvátilo mne přání přečíst si více prací tohoto pronikavě myslícího matematika". A v dopise Schumacherovi 1846 hodnotí Lobačevského práci: „obsahuje základy té geometrie, která by měla platit..., kdyby eukleidovská geometrie nebyla pravdivá. Kdysi SCHWEIKART (1817) nazval tuto geometrii „astrální". Lobačevský ji nazývá „pomyslnou" ... co do materiálu jsem v práci nenašel pro mne nic nového, ale při svém výkladu autor sleduje jinou cestu, než byla ta, po níž jsem šel já; Lobačevský ji provedl mistrovsky v plně geometrickém duchu. Pokládám za povinnost Vás na tuto knihu upozornit, neboť bude pro Vás bezesporu zcela mimořádným zážitkem".

Dalo by se říci, konečně ocenění. Avšak zcela v Gaussově duchu – neveřejné, svým způsobem připomínající Gaussovo stanovisko i Gaussův poměr k Jánoši Bolyaiovi,

*) Roku 1855 dodiktoval už oslepl svou poslední práci *Pangeometria.*

o kterém píše 1832 GERLINGOVI „že ho pokládá za genia prvního řádu", ale v přímé odpovědi zachovává značný odstup. Lobačevskému však nenapsal Gauss vůbec nic. Jen Lobačevského doporučil roku 1842 za dopisujícího člena göttingenské učené společnosti jako „jednoho z nejlepších matematiků ruské říše".

Snad to byl právě Gauss, který si více než Bolyai i Lobačevský uvědomoval závažnost nové geometrické teorie pro povědomí tehdejší matematiky. A snad právě jeho rozpaky nad vztahem nové teorie a fyzické reality mu bránily učinit rozhodující krok. Je dokonce možné, že Gauss hledal sám matematickou interpretaci této problematiky. Je možné, že mohl být ovlivněn Lambertovými úvahami o vztahu typu geometrie a křivosti plochy, o nichž se mohlo mluvit kolem r. 1821 v Gaussově okruhu, a víme, že v té době Gauss začíná svá zkoumání v teorii ploch, jež završuje v roce 1828 publikací dnes klasické práce *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, rozvíjející teorii vnitřní geometrie plochy. Gauss se zde sice zabývá plochami s konstantní kladnou křivostí, avšak po jeho smrti byly nalezeny poznámky, spadající nejpozději do roku 1827, v nichž Gauss uvádí rovnici křivky traktrix, jejíž rotací vznikne plocha konstantní negativní křivosti, která může být považována – jak říká Gauss – za antipod koule. Zde se tedy Lambertova představa koule s imaginárním poloměrem (ať už s vědomím prvotní ideje Lambertovy, či nezávisle na ní) přeměňuje na konkrétní vědecký úkol. Gauss sám však z této problematiky nic nepublikoval a můžeme se pouze domnívat, že své podněty a myšlenky předal svému žáku FERDINANDU MINDINGOVI, který v letech 1830–1840 uveřejnil v Crellově Journalu několik článků věnovaných plochám s konstantní negativní křivostí. Jako zvláštní případ těchto ploch se zde ukazuje pseudosféra. Avšak ani Minding neučinil ještě krok, který by spojil tuto klasickou diferenciálně geometrickou problematiku s problematikou neeukleidovské geometrie. To učinil až v roce 1868 BELTRAMI, který pro neeukleidovskou geometrii nalezl matematický model. A zdá se, že právě toto spojení vytvořilo předpoklady pro to, aby ideje neeukleidovské geometrie, které byly vlastně širší matematickou obcí objevovány teprve po zveřejnění některých poznámek z Gaussovy pozůstalosti po jeho smrti 1855, byly také matematiky přijaty.

Do konce šedesátých let 19. století je problematika jen velmi málo známa; stále se objevují nové pokusy o důkaz pátého postulátu. Dokumentuje to i situace v našich zemích. Z našich matematiků 19. století se o tuto problematiku zajímal na počátku století BERNARD BOLZANO, dále LADISLAV JANDERA, jehož nepublikované rukopisy jsou uloženy v literárním archívu Národního muzea v Praze, i CHRISTIAN DOPPLER. Objevují se i pozdější snahy W. SMETACZKA (1872) či W. MATZKY (1846) nebo J. F. KULIKA (1860).

V 70. letech však tyto pokusy končí, a i když se neobjevují žádné práce z neeukleidovské geometrie z pera našich matematiků, lze se domnívat, že byli s touto problematikou dobře seznámeni. Zásluhou bratří WEYRŮ se udržoval čilý styk Jednoty matematiků s italskými geometry, mezi nimiž BATTAGLINI byl propagátorem Lobačevského prací. Rovněž Beltramiho práce mohly být u nás přístupné, protože časopisy, v nichž byly uveřejněny, byly vyměňovány Jednotou. Poprvé byla pravděpodobně publikována jména Lobačevského a Bolyaie v Archivu matematiky a fyziky (1875) ve francouzském článku HOÜELOVĚ. Přestože v českých zemích byla intenzívně rozvíjena práce „České geometrické školy“ – zůstává problematika neeukleidovských geometrií vně zájmu našich geometrů. Teprve po dalších dvaceti letech (1896) se objevuje v Časopise pro pěstování matematiky a fyziky několik·zmínek a obsáhlejší referát Eduarda Weyra o výsledcích neeukleidovské geometrie v souvislosti s kazaňskými oslavami stého výročí narození N. I. Lobačevského. Byla to zřejmě i iniciativa Weyrova, že jeden ze STUDNIČKOVÝCH doktorandů (1900) VILÉM J. HAUNER se zaměřil na hlubší studium problematiky neeukleidovské geometrie, aby pak své výsledky počátkem 20. století publikoval v několika článcích v České mysli.*) Druhým hlubším zájemcem o tuto problematiku byl až astronom ARNOŠT DITTRICH.**)

Z tohoto příkladu, i když možná málo typického, je patrné, jak pozvolna v jednotlivých zemích nastupovala neeukleidovská geometrie svou cestu mezi ostatní matematické disciplíny. Ukazuje to zároveň, jak Lobačevského geometrie znamenala závažný zásah do tradičních geometrických představ a rovněž jaký významný obrat způsobila v celém matematickém myšlení.

Neeukleidovská geometrie patřila mezi ony nové oblasti matematiky, které pomohly matematice oprošťovat se od podřízenosti fyzice a začít vedle řešení problémů předkládaných jinými disciplínami rozvíjet stále silněji svoji vlastní vnitřní problematiku; rozvinutím stupně abstrakce pomohly připravovat situaci pro širší a netradiční uplatňování matematiky. Díky objevům prvé poloviny 19. století matematika rozpoznala, že argumentace názorem při rozhodování pravdivosti možných hypotéz nepostačuje a věnovala se hlubšímu zkoumání svých axiomatických a logických základů. Začal se oddělovat význam pravdivosti a správnosti matematické teorie a rozpoznala se závažnost rozvíjení vnitřních matematických modelů matematických teorií. Přitom se stále přesněji vymezovaly podmínky, za nichž je možné uskutečnit modelování. Prohloubilo se však zároveň materialistické pojetí matematiky. Posílilo se přesvědčení, že i abstraktní matematické teorie, vytvořené matematickými dedukcemi opírajícími se konec konců o vztahy reálného světa, vyjadřují vždy určité stránky reality, i když není vždy možno je okamžitě interpretovat a využít.

To byly důsledky zlomu tradice, ke kterému přispěla generace, v níž nikdo neopomene jmenovat Nikolaje Ivanoviče Lobačevského.

Po r. 1610 píše GALILEO MARCO VELSERIMU: „Musím postupovat opatrněji a obezřetněji než druzí, když ohlašuji něco nového, protože věci pozorované poprvé a vzdálené běžným lidským představám jsou prudce popírány a napadány, a proto jsem nucen, abych skrýval a zatajoval jakoukoli novou myšlenku, dokud nemám pro ni naprosto jistý a hmatatelný důkaz; ... neboť je ustálený zvyk, že je lépe zmýliti se vespolek se všemi, než samojediný mluviti pravdivě“.***) Vyjadřuje tím vlastně obavy, které se vynoří před každým, kdo musí cestu k pravdivému poznání klestit bořením všeobecně uznávaných představ, obavy, které stály i před objeviteli neeukleidovské geometrie. Lobačevský,

*) Srv.: Česká mysl *4* (1903), str. 13–22, 98–110, 161–174, 256–269, 348–357, 410–428 a Česká mysl *9* (1908), str. 170–185.

**) Viz: Čas. pěst. mat. fys. *40* (1911), str. 34–44, 184–194; *41* (1912) str. 330–339, a články v Annalen der Natur- und Kulturphilosophie *12* (1913).

***) In: G. LORIA, *Galileo Galilei*, Praha–Svoboda 1949, str. 35.

který se vrhl bez obav z křiku Boiótů do boje s tradičními představami, utrpěl řadu šrámů, ale přispěl k tomu, aby se matematika mohla začít na novém základě rozvíjet rychleji – zlomil tradici.

Literatura

BONOLA R., LIEBMANN H.: *Die nichteuklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung*, 2. vyd. Berlín 1919.

BRUINS, E. M.: *La géométrie non-euclidienne dans l'antiquité*, Université de Paris 1967.

FOLTA J.: *Základy geometrie v pracích českých matematiků 19. století*, Sborník pro dějiny přírodních věd a techniky *11*, Praha 1966, 169–202.

FOLTA J., ŽÁČKOVÁ J.: *Problém verifikace hyperbolické geometrie* (Lambert a Gauss), Dějiny věd a techniky *2* (1969), 1–8.

Галченкова Р. И., Лумисте Ю. Г., Ожигова Е. П., Погребысский И. Б.: *Фердинанд Миндинг 1806—1885*, Наука, Ленинград 1970.

HALL T., *Carl Friedrich Gauss*, MIT Press 1971.

Юшкевич А. П. (edit.), *История математики т. I–III*, Москва 1970–1972.

KAGAN V. F.: *N. I. Lobačevskij, tvůrce nové geometrie*, Praha 1951.

Каган В. Ф.: *Основания геометрии I*, Москва–Ленинград 1949.

Ливанова А.: *Три судьбы. Постижение мира*, Москва 1969.

Лобачевский Н. И.: *Полное собрание сочинений, т. I–V*, Москва–Ленинград 1945–1951.

PAVLÍČEK J. B., *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského*, Praha 1953.

Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П.: *Омар Хайям*, Москва 1965.

Розенфельд Б. А.: *Неевклидовы пространства*, Москва 1969.

TÓTH I.: *La géométrie non-euclidienne dans le développement de la pensée*, Études d'Histoire et de philosophie des sciences, Acad. Rép. Pop. Roumaine (bez data), 53–70.

TÓTH I., *Das Parallelenproblem im Corpus Aristotelicum*, Archive for History of Exact Sciences *3* (1967), 249–422.

Matematika se těší obzvláštní vážnosti přede všemi jinými vědami z jednoho důvodu: její věty jsou absolutně jisté a nesporné, kdežto věty všech jiných věd jsou až po jistý stupeň sporné a vždy v nebezpečí, že je nově objevené fakty zvrátí. Proto by však přece badatel na jiném poli ještě nepotřeboval matematikovi závidět, kdyby se jeho věty nevztahovaly na předměty skutečné, nýbrž jen na předměty pouhé naší obrazivosti. Neboť se nemůžeme divit, že přijdeme ke shodným logickým závěrům, dohodneme-li se o fundamentálních větách (axiómech), jakož i o metodách, jimiž se z těchto fundamentálních vět mají odvozovat jiné věty. Ale ona velká vážnost matematiky záleží na druhé straně v tom, že je to rovněž matematika, která dodává exaktním přírodním vědám určitou míru jistoty, které by bez matematiky nemohly dosáhnout.

Ptát se na smysl anebo účel vlastního bytí a bytí tvorstva vůbec zdálo se mně z objektivního hlediska vždycky nesmyslné. A přece naopak má každý člověk určité ideály, které usměrňují jeho snažení a úsudek. V tomto smyslu jsem pohodlí a štěstí nikdy nepovažoval za vlastní cíl (této mravní zásadě říkám také ideál stáda vepřů). Mé ideály, které vždy přede mnou zářily a znovu a znovu mě naplňovaly radostnou životní odvahou, byly dobro, krása a pravda. Kdybych necítil, že se shoduji se stejně smýšlejícími, kdybych se nezabýval objektivním, na poli umění a vědeckého bádání věčně nedostižným, jevil by se mi život prázdný. Všední cíle lidského snažení: majetek, zevní úspěch a přepych se mně od mých mladých let zdály hodny opovržení.

A. Einstein