S. J. Taylor

Pravidelnost náhodnosti

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 25 (1980), No. 1, 28--34

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139245

Pravidelnost náhodnosti*)

S. J. Taylor, Liverpool

Samotný název je na první pohled rozporný; neboť co je opravdu náhodné, je vlastně nepředvídatelné – jak lze tedy mluvit o pravidelnosti? Tento zdánlivý spor ve skutečnosti tvoří podstatu našeho matematického modelu teorie pravděpodobnosti. Právě pravidelnost je rozhodujícím opodstatněním pro náš model, který se stal novým matematickým nástrojem se zásadním použitím v analýze, teorii potenciálu, teorii čísel, kvantové teorii, statistické mechanice...

Začněme otázkou: „Co je pravděpodobnost?“ Co mám na mysli, řeknu-li: „Při házení mincí padne orel s pravděpodobností $\frac{1}{2}$.“ Nebo: „Z dobře zamíchaného balíčku bridžových karet je náhodně tažená karta s pravděpodobností $\frac{1}{13}$ eso“? Napadnou nás alespoň tři myšlenky:

(i) představa bezvadnosti nebo symetrie vede k dělení na „stejně možné“ výsledky;

(ii) soustředíme-li se na výskyt jednoho možného výsledku, očekáváme na základě zkušenosti z mnohonásobného opakování pokusu postupné ustálení relativní četnosti;

(iii) po zvážení všech okolností máme filozofický vnitřní pocit, že určitý jev nastane s pravděpodobností p – a to i v případě, kdy není patrná žádná symetrie a není naděje pokus vícenásobně opakovat.

V porovnání s prvními dvěma postřehy je třetí snad ještě důležitější, neboť poskytuje racionální podklad pro rozhodování v praktickém životě. Přesto neexistuje žádný způsob, jak ověřit platnost tvrzení jako: „V červenci 1979 budou konzervativci v čele Spojeného království s pravděpodobností 0,65.“ V červenci 79 budeme znát orientaci vlády, ale takový pokus lze provést jen jednou, takže výsledek není průkazný pro uvedenou pravděpodobnost. Matematický model teorie pravděpodobnosti, který je dnes obecně přijímán, je v souladu s myšlenkami (i), (ii) a dává jim přesný význam. Lze ho užít ke kvantitativnímu popisu (iii), takže při daném rozhodnutí můžeme počítat očekávaný zisk nebo ztrátu, avšak pouze na základě neověřitelných předpokladů. Právě ve smyslu tohoto matematického modelu ukážeme, že se náhodnost chová pozoruhodně pravidelným způsobem.

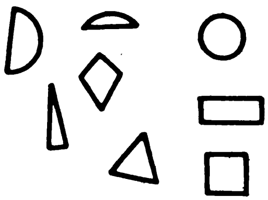
Kdykoli mám úvodní přednášku o pravděpodobnosti, nechávám posluchače provádět pokus dávající určitý experimentální pocit, do jaké míry je výše uvedená představa (ii) platná. Mám na mysli variantu Buffonova pokusu s jehlou. Pokus má tyto výhody: (a) odpověď není zřejmá; (b) dá se lehce provést přesně; (c) okamžitě vyniknou některé jednoduché závěry; (d) výsledky lze zachovat pro pozdější statistickou analýzu. K pokusu

---

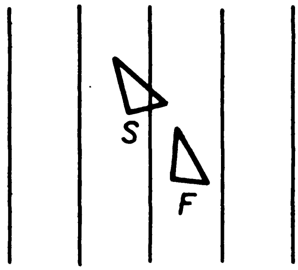
*) Poněkud rozšířený text přednášky konané při výročním zasedání Matematické společnosti v Liverpoolu v dubnu 1977.

S. J. TAYLOR: *The regularity of randomness.* The Mathematical Gazette Vol. *62*, No. 419 (March 1978). Přeloženo se souhlasem autora a vydavatele.

je třeba systém rovnoběžných přímek stejně od sebe vzdálených o délku h (dobře se hodí, pokud je k dispozici, palubová podlaha, jinak se čáry pečlivě namalují na lepenku, která se položí na zem), dále soubor konvexních rovinných obrazců (obr. 1a) různých tvarů o průměru menším než h (obrazce z plastické hmoty lze nejsnadněji získat z dětských stavebnic). Každý student při pokusu hází jedním obrazcem z výšky na zem.



Obr. 1a.



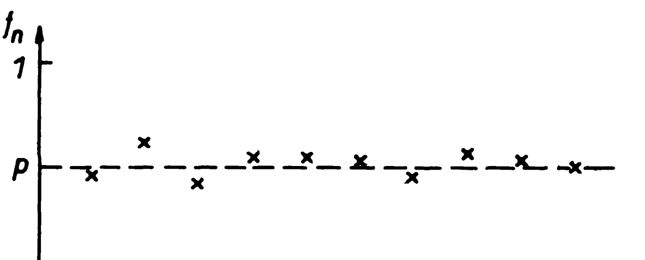
Obr. 1b.

Předmět se odrazí nebo smekne a pak zůstane ležet. Jev S nastává tehdy, leží-li na některé z rovnoběžných čar; jev F nastává, pokud leží mezi dvěma rovnoběžkami (obr. 1b). Pokus je opakován alespoň 2^{10}-krát a číslo jedna zaznamenáváme pokaždé, když nastává jev S. V případě, že nastává F, zaznamenáváme nulu. Pro $n = 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$ počítáme hodnoty posloupnosti

$$f_n = \frac{1}{n} \,.\, (\text{počet výsledků } S \text{ v prvních } n \text{ pokusech}) =$$

$$= \frac{1}{n} \,.\, (\text{součet prvních } n \text{ poznamenaných čísel})\,.$$

Pak nakreslíme (v logaritmické stupnici) graf relativní četnosti jevu S po n pokusech.



Obr. 2.

Při zvětšujícím se n se zpočátku posloupnost $\{f_n\}$ chová nepravidelně, ale ukazuje se, že se pak blíží určité hodnotě, která při našem modelu bude pravděpodobností jevu S.

Při popsaném experimentu je nejlepším odhadem veličiny $p = P(S)$ hodnota f_n v posledním bodě grafu. Každý student si pro svůj pokusný obrazec poznamená barvu, plochu, průměr, obvod a empirickou hodnotu pravděpodobnosti p. Tyto výsledky jsou zpracovány do tabulky pro všechny užité obrazce. Ukazuje se, že pouze jediný z výše zmíněných údajů je podstatný pro určení hodnoty p. Který to je? Před pokusem jsem posluchače nechal hlasovat o tom, který parametr je rozhodující a – jak to obvykle bývá mezi matematiky – poměr hlasů byl zhruba 6 : 3 : 1 pro průměr : obvod : plochu. Správný vzorec je ve skutečnosti velmi jednoduchý,

$$P(S) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\text{obvod}}{h} .$$

Důkaz je elementární a lze ho nalézt v [1], str. 97–99.

Získaný graf závislosti f_n na n nám připomíná konvergentní posloupnost, pojem známý z analýzy. Konverguje f_n k číslu p? Poznamenejme však, že $\{f_n\}$ je výsledkem náhodného pokusu, není to tedy pevná posloupnost. Buďme pro začátek skromnější. Je-li dáno $\varepsilon > 0$, je naděje, že $p - \varepsilon < f_n < p + \varepsilon$? Odpověď je kladná v tomto smyslu: K danému $\delta > 0$ umím najít N tak, že pro každé $n \geqq N$ je

$$P(p - \varepsilon < f_n < p + \varepsilon) > 1 - \delta .$$

K důkazu potřebujeme pojem nezávislých jevů a poznatek, že nf_n má binomické rozdělení $B(n, p)$, takže

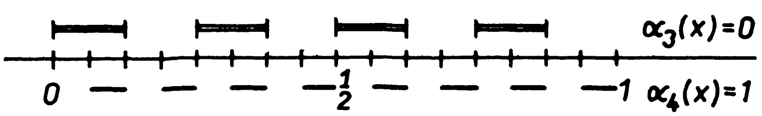
$$P(nf_n = r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} ,$$

$$P(p - \varepsilon < f_n < p + \varepsilon) = \sum_{|r-np|<n\varepsilon} \binom{n}{r} p^r q^{n-r} ,$$

kde $q = 1 - p$. Poslední hodnotu lze odhadnout pomocí numerické integrace; viz [2], text od str. 104. Tomuto výsledku se říká *slabý zákon velkých čísel*: je-li pokus nezávisle opakován n-krát a pokaždé je pravděpodobnost úspěchu p, pak pro velká n bude pravděpodobně relativní četnost úspěchů f_n blízká p. Tento zákon má četné užitečné aplikace – v dobách, kdy býval větší zájem o studium, jsme ho používali k rozhodování, kolik nabídnout míst, abychom získali požadovaný počet studentů pro daný ročník.

Slabý zákon však nestačí k závěru, že $f_n \to p$ pro $n \to \infty$; nestačí, aby se f_n lišilo o méně než ε pro dané n; hodnoty $|f_n - p|$ musí být malé pro *všechna* velká n.

Naše definice bude mít smysl jen tehdy, budeme-li mít definovanou pravděpodobnost na prostoru nekonečných posloupností opakujících se pokusů. Pomocí abstraktní teorie míry můžeme vytvořit vhodný model pro libovolné p; jako ilustraci budeme uvažovat



Obr. 3.

jen speciální případ $p = \frac{1}{2}$, pro který máme dobrý intuitivní model.

Uvažujme dvojkový rozvoj čísla $x \in (0, 1)$,

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots, \quad \alpha_i = 0 \text{ nebo } 1 .$$

Mysleme si, že v $(0, 1)$ zvolíme „náhodně" reálné číslo x. Pak

$$P(a < x < b) = b - a \quad \text{pro} \quad 0 \leqq a < b \leqq 1$$

(obecněji $P(x \in E)$ je rovno Lebesgueově míře množiny E).

Pro každé n množina $\{x; \alpha_n = 0\}$ odpovídá 2^{n-1} intervalům délky 2^{-n}; takový jev má tedy pravděpodobnost $\frac{1}{2}$. Pro různá n jsou odpovídající jevy nezávislé. Pro volbu $\delta_1, \delta_2 \in \in \{0, 1\}$ a $n < m$ sestává se množina $\{x; \alpha_n(x) = \delta_1, \alpha_m(x) = \delta_2\}$ z 2^{m-2} intervalů délky 2^{-m}; pravděpodobnost je tedy $\frac{1}{4}$; vidíme, že

$$P(x; \alpha_n(x) = \delta_1, \alpha_m(x) = \delta_2) = P(x; \alpha_n(x) = \delta_1) \, . \, P(x; \alpha_m(x) = \delta_2) \, .$$

Definujme nyní $E = \{x \in (0, 1); f_n(x) \nrightarrow \frac{1}{2}\}$, kde

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)$$

je relativní četnost cifry jedna ve dvojkovém rozvoji. Dá se dokázat, že E má míru 0. To znamená, že pro každé $\delta > 0$ můžeme pokrýt množinu E posloupností otevřených intervalů (a_r, b_r) o celkové délce nepřesahující δ. Protože máme přesný model pro posloupnost nezávislých pokusů, z nichž pro každý je pravděpodobnost úspěchu rovna $\frac{1}{2}$, dokázali jsme, že s pravděpodobností 1 relativní četnosti úspěchů $\{f_n\}$ konvergují pro $n \to \infty$ k $\frac{1}{2}$. Toto je speciální případ *silného zákona velkých čísel*; v této formě pochází od Borela. Náhodnost má tedy v limitě za následek pravidelnost a to je konec konců zásadní ospravedlnění našeho pravděpodobnostního modelu.

Je možno silný zákon dále vylepšit? Vidíme, že f_n se blíží k $\frac{1}{2}$, ale jak rychle? Pro pevné n se ukazuje, že $|f_n - \frac{1}{2}|$ je řádově rovno $n^{-1/2}$. Borelovy úvahy lze zjemnit a ukázat, že

$$n^{\alpha}(f_n - \tfrac{1}{2}) \to 0 \quad \text{pro} \quad 0 < \alpha < \tfrac{1}{2} \, , \quad \text{ale ne pro} \quad \alpha = \tfrac{1}{2} \, .$$

Opravdu přesný výsledek (tzv. *zákon iterovaného logaritmu*) patří Chinčinovi: s pravděpodobností 1

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{(f_n - \frac{1}{2}) \, n^{1/2}}{(2 \log \log n)^{1/2}} = 1 \, .$$

Je-li Φ rostoucí funkce, definitivní výsledek říká, že

$$\{x; (f_n(x) - \tfrac{1}{2}) \, n^{1/2} > \Phi(n) \quad \text{pro nekonečně mnoho } n\}$$

je jev mající pravděpodobnost 0 nebo 1 podle toho, zda

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} e^{-(1/2)\Phi^2(x)} dx$$

konverguje nebo diverguje. Tento výsledek bývá připisován KOLMOGOROVOVI, první důkaz však podal ERDÖS [3].

To všechno jsou příklady obecného poznatku, který je znám jako *nula-jedničkový zákon*. Každý jev definovaný prostřednictvím nekonečné posloupnosti náhodných veličin, který nezávisí na konečně mnoha z nich, má *nutně* pravděpodobnost 0 nebo 1. To znamená, že buď jev samotný, nebo jev k němu opačný je jistý. Náhodnost vede tedy k jistotě. Je-li např. $\{X_n\}$ libovolná posloupnost nezávislých náhodných veličin, pak buď

$$\sum X_n \text{ s pravděpodobností 1 konverguje },$$

nebo

$$\sum X_n \text{ s pravděpodobností 1 diverguje }.$$

Je to právě tento nula-jedničkový zákon, který zaručuje, že při vhodné parametrizaci náhodnost v limitě vede k pravidelnosti.

Když uvažujeme stochastický proces, tato limitní operace je již zabudována v definici, takže mnoho jednoduchých vlastností uvažovaného procesu definuje jevy, které nastávají s pravděpodobností 0 nebo 1. Historicky nejdůležitější proces je Brownův pohyb. Zhruba před 150 lety pozoroval anglický botanik BROWN pod mikroskopem tekutinu, v níž byly částečky pylu. Viděl, jak divoce a bez ustání tancovaly ve všech směrech. Brown jako správný vědec svá pozorování zaznamenal, i když neexistovala žádná teorie, která by je vysvětlovala. EINSTEIN v jedné fundamentální práci toho použil jako důkazu pro molekulární teorii kapalin a JEAN PERRIN provedl měření Brownova pohybu a využil je k výpočtu velikosti atomů. Konečně WIENER podal přesný matematický popis pohybu.

Uvažujme náhodný proces, který je popsán vektorovou funkcí $\boldsymbol{r}(t)$ v $\mathbb{R}_3$. Pro $t_1 < t_2 < t_3$, $\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1)$ a $\boldsymbol{r}(t_3) - \boldsymbol{r}(t_2)$ jsou nezávislé, každý přírůstek má normální rozdělení se střední hodnotou 0 a rozptylem rovným proběhlému času. Wiener ukázal, jak definovat pravděpodobnost v prostorech funkcí s těmito vlastnostmi. Jestliže si všimneme chování trajektorie v závislosti na t, pak každý z následujících jevů má pravděpodobnost 1:

(a) funkce $\boldsymbol{r}(t)$ je všude spojitá, ale není nikde diferencovatelná (to znamená, že v žádném okamžiku neexistuje vektor rychlosti pohybu);
(b) trajektorie $\boldsymbol{r}(t)$ má pro $0 \leqq t \leqq 1$ nekonečnou délku;
(c) v případě $\mathbb{R}_3$ je $|\boldsymbol{r}(t)| \to \infty$ pro $t \to \infty$ (trajektorie je transientní), v $\mathbb{R}_1$ (nebo $\mathbb{R}_2$) se $\boldsymbol{r}(t)$ vrací nekonečněkrát do libovolného intervalu (nebo kruhu);
(d) pevně zvolený bod $\boldsymbol{r}_0 \in \mathbb{R}_3$ trajektorie mine; některé body prochází dvakrát, ale žádným bodem neprochází třikrát.

To je jen několik příkladů vlastností Brownova pohybu, které jsou „jisté". Čtenáře, který se chce plně seznámit s tímto náhodným procesem, odkazuji na [4]. To znamená, že trajektorie Brownova pohybu se chovají velice pravidelným způsobem, i když jsou velmi náhodné. Připustíme-li místo normálního rozdělení širší třídu rozdělení pro přírůstky, dostaneme zobecnění Brownova pohybu. Jestliže je např. Fourierova transformace přírůstku $\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$ rovna

$$e^{-(t_2 - t_1)|u|^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqq 2,$$

odpovídající proces se nazývá symetrický stabilní proces s indexem α. Hodnota $\alpha = 2$ odpovídá Brownovu pohybu, ale pro $0 < \alpha < 2$ mají trajektorie hustou množinu nespojitostí. V $\mathbb{R}_2$ budou pro $\alpha = 1,99$ mít trajektorie body násobnosti 99, ale žádný bod násobnosti 100. Umí snad proces počítat?! Na tomto místě bych se rád zmínil o jednom neřešeném problému:

Problém. Uvažujme v $\mathbb{R}_1$, $\mathbb{R}_2$, $\mathbb{R}_3$ obecný proces s nezávislými přírůstky. Jaké jsou nutné a postačující podmínky na rozdělení, aby trajektorie byly prosté?

Přehled známých vlastností takových procesů lze nalézt v [5].

Pro případ, že stále nejste přesvědčeni o pravidelnosti náhodnosti, vraťme se k Brownovu pohybu. Dovolte mi upozornit na některé výsledky nenáhodné povahy, které lze pomocí tohoto náhodného procesu získat.

Je-li $g(\Theta)$ lebesgueovsky integrovatelná funkce na jednotkové kružnici a

$$S(\Theta) \sim \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\Theta + b_n \sin n\Theta)$$

je její Fourierova řada, pak $S(\Theta)$ nemusí konvergovat, ale

$$g(r, \Theta) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \cos n\Theta + b_n \sin n\Theta)$$

konverguje pro $0 \leqq r < 1$ a představuje funkci harmonickou v otevřeném jednotkovém kruhu. Fatouova věta nám říká, že pro $r \to 1-$ je $g(r, \Theta) \to g(\Theta)$ pro skoro všechna Θ, takže $g(r, \Theta)$ má správné hraniční hodnoty a řeší tedy vnitřní Dirichletovu úlohu pro $g(\Theta)$. Chceme-li řešit Dirichletovu úlohu pro obecnější oblasti, metody klasické analýzy neposkytují jednoduchý způsob, jak řešení napsat ani v případě, že existenci řešení zaručují. Není dokonce nikterak jasné, čím bychom měli zaměnit „radiální limity" při zkoumání hraničního chování. Velice elegantní řešení podal Doob [6] s využitím Kakutaniho výsledku o Brownově pohybu. Předpokládejme, že D je libovolná rovinná oblast s hranicí K a f je omezená a měřitelná funkce definovaná na K. Pro každé $\mathbf{x} \in D$ vystartuje brownovská trajektorie z $\mathbf{x}$ a probíhá tak dlouho, dokud poprvé (za náhodný čas τ) nenarazí na K. Nechť

$$g(\mathbf{x}) = E^{(\mathbf{x})}\{f(\mathbf{r}(t))\}$$

je průměrná hodnota funkce f vyčíslené v takových hraničních bodech. Pak g je harmonická v D a nabývá správných hraničních hodnot na K.

Lebesgueův hrot je rotační plocha v $\mathbb{R}_3$ vzniklá rotací křivky

$$y = e^{-k/x^2} \quad (x > 0)$$

okolo osy x; přitom k je kladná konstanta. Má velmi ostrou špičku v počátku a Le-

BESGUE pro množinu, která vznikne odstraněním takového hrotu z jednotkové koule, ukázal toto: je-li f spojitá funkce na hranici, která je rovna nule mimo malé okolí ostří a $f(\mathbf{0}) = 1$, pak pro f neexistuje řešení Dirichletovy úlohy. Výše uvedené řešení nebude mít správnou hodnotu v bodě $\mathbf{0}$, neboť trajektorie Brownova pohybu startující v počátku nenarazí ihned na hrot – ten je příliš tenký.

Existuje jedna slavná a hluboká věta o celých nekonstantních funkcích, pocházející od PICARDA. Věta říká, že taková funkce nabývá všech komplexních hodnot s výjimkou snad jediné. (Exponenciální funkce je jednoduchým příkladem funkce, která nenabývá hodnoty 0.) DAVIS [7] nedávno podal důkaz věty založený na Brownově pohybu v $\mathbb{R}_2$; jeho metoda dovoluje dokázat tuto větu pro analytické funkce na varietách. Klíčové myšlenky jsou tyto:

(i) Jestliže $Z(t)$ je Brownův pohyb v $\mathbb{R}_2$, f je libovolná celá funkce, pak $f(Z(t))$ je (až na změnu časové stupnice) Brownův pohyb.

(ii) Je-li V okolí 0, $Z(t)$ se vrací nekonečněkrát do V, takže lze volit $t_k \to \infty$, $Z(t_k) \in V$. Spojíme-li nyní bod $Z(t_k)$ s 0, dostaneme uzavřenou křivku D_k. Jsou-li a, b dva pevně zvolené různé body z $\mathbb{C} \setminus V$, nelze pro dostatečně velká k stáhnout uzavřené křivky D_k spojitou deformací v $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ do 0, protože se neustále zamotávají kolem bodů a, b.

(iii) Nechť nyní F je celá funkce, $F(0) = 0$ a $F(\mathbb{C})$ neobsahuje a, b. Protože F je spojitá funkce a a, b jsou vesměs různé od 0, lze nalézt okolí W bodu 0 tak, že $F(W) = V$ je okolím 0 v $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$. Poněvadž $F(Z(t))$ je Brownův pohyb, volme $\Theta_j \to \infty$ tak, že $Z(\Theta_j) \in W$, $F(Z(\Theta_j)) \in V = F(W)$: jak $Z(t)$, tak $F(Z(t))$ jsou uzavřené křivky. První lze v $\mathbb{C}$ stáhnout do bodu, takže druhou lze stáhnout do bodu v $F(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$. Ale $F(Z(t))$ je Brownův pohyb a máme spor s (ii) a věta je dokázána.

Doufám, že nyní jste už přesvědčeni o pravidelnosti náhodnosti.

Přeložili Ivan Netuka a Jiří Veselý

Poznámka překl.: Drobné změny proti originálu byly provedeny na základě korespondence s autorem.

Literatura

[1] S. J. TAYLOR: *Exploring mathematical thought.* Ginn, Aylesbury, 1970.

[2] W. FELLER: *An introduction to probability theory and its applications.* Vol. *1*, Wiley, New York, 1968 (existuje ruský překlad).

[3] P. ERDÖS: *On the law of iterated logarithm.* Ann. Math. *43* (1942), 419–436.

[4] K. ITÔ, H. P. MCKEAN: *Diffusion processes and their sample paths.* Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[5] S. J. TAYLOR: *Sample path properties of processes with stationary independent increments.* Ve sborníku D. G. KENDALL, E. F. HARDING: *Stochastic analysis,* Wiley, New York, 1973.

[6] J. L. DOOB: *Interrelations between Brownian motion and potential theory.* Proc. Int. Congr. Math., Vol. *3* (1954), 202–204.

[7] B. DAVIS: *Picard's theorem and Brownian motion.* Trans. Amer. Math. Soc. *213* (1975), 353–362.