Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Marek Radoliński

Obecné konečné geometrie

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 28 (1983), No. 4, 214--218

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139185

Obecné konečné geometrie

Marek Radoliński, Varšava

V posledních letech lze pozorovat vzrůst zájmu o konečné geometrie. V polské literatuře chybí jakákoliv publikace na toto téma. Chtěl bych tedy v tomto článku ukázat jistý způsob axiomatického popisu dosti rozsáhlé třídy konečných systémů zvaných Bolyaiovy-Lobačevského geometrie neboli hyperbolické geometrie.

Jako ve všech geometriích vezmeme pojmy bodu a přímky a výrazy „bod leží na přímce" a „přímka prochází bodem" jako nedefinované.

Představme si jistou rovinu skládající se z konečného počtu bodů. Na jejich počtu závisí druh geometrie, a jak se přesvědčíme, ne pro každý počet bodů taková geometrie existuje. Jestliže pro každou dvojici $[L, p]$ skládající se z bodu p a přímky L, která neprochází tímto bodem, je počet přímek procházejících bodem p a neprotínajících přímku L roven 0, resp. 1, pak je dána rovina projektivní, resp. afinní. Bereme-li v úvahu počet přímek protínajících nebo neprotínajících danou přímku L, můžeme provést toto zobecnění: Pro každou neincidentní*) dvojici $[L, p]$ patří přímky procházející bodem p buď do množiny μ přímek protínajících L, nebo do množiny ν přímek neprotínajících L. Označme počty prvků množin μ a ν po řadě $|\mu|$ a $|\nu|$. Jestliže pro každou dvojici $[L, p]$ je $|\nu| > 1$, pak budeme mluvit o hyperbolické rovině, Může se stát, že pro každou dvojici $[L, p]$ je $|\nu| = t$ a $|\mu| = s$ kde s a t jsou dvě přirozená čísla; v tom případě budeme mluvit o regulární hyperbolické rovině. Takovými rovinami se zabývá Bolyaiova-Lobačevského geometrie.

V poslední době se v četných publikacích objevilo mnoho výsledků na téma hledání konečných hyperbolických rovin a je již známo, že existují neregulární roviny. My se však omezíme na regulární roviny.

Před uvedením systému axiómů budeme definovat pojem rovnoběžnosti.

Definice. *Dvě přímky, které se neprotínají, nazýváme rovnoběžnými přímkami.*

Vztah mezi body a přímkami popisuje tento systém axiómů:

Axióm 1. *Libovolnými dvěma body prochází právě jedna přímka.*

Axióm 2. *Ke každé přímce existuje bod, který na ní neleží.*

Axióm 3. *Na každé přímce leží nejméně dva body.*

Axióm 4. *Existuje nejméně jedna přímka.*

Axióm 5. *Daným bodem p neležícím na přímce L prochází právě k $(k \geqq 2)$ přímek rovnoběžných s L.*

*) Říkáme, že dvojice $[L, p]$ je incidentní, jestliže bod p leží na přímce L.

Z polského originálu *Ogólne geometrie skończone*, otištěného v časopise Matematyka Vol. *32*, 1979, 295—299 přeložil Bohdan Zelinka.

Na základě těchto axiómů dokážeme základní větu.

Věta 1. *Existuje-li jedna přímka, na níž leží právě n bodů, pak*

(a) *na každé přímce leží právě n bodů;*

(b) *každým bodem prochází právě $n + k$ přímek;*

(c) *existuje právě $(n + k)(n - 1) + 1$ bodů;*

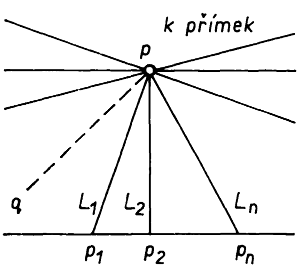
(d) *existuje právě $[(n + k)(n - 1) + 1](n + k)/n$ přímek.*

Při dokazování věty začneme částí (b) pro případ, kdy daný bod p neleží na přímce L obsahující právě n bodů. Potom dokážeme část (a) a nato dokončíme důkaz části (b) pro případ, kdy bod p leží na přímce L obsahující právě n bodů. Důkaz věty ukončíme důkazy částí (c) a (d).

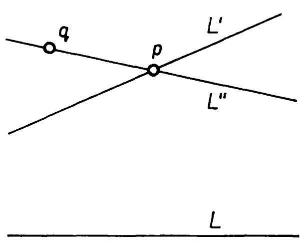
Důkaz. Nechť L je přímka, o níž se mluví v předpokladech věty, a nechť p je bod, který na ní neleží. Poněvadž bod p neleží na přímce L, podle axiómu 5 existuje právě k přímek procházejících bodem p a rovnoběžných s přímkou L. Body ležící na přímce L označme $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (obr. 1). Podle axiómu 5 bod p a libovolný z bodů p_i ležících na přímce L určují právě jednu přímku; označme tyto přímky $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Společně s přímkami neprotínajícími přímku L dostáváme tak $n + k$ přímek. Ukážeme, že jich není více než $n + k$. Budiž L' přímka procházející bodem p a různá od výše uvedených. Pak buď L' je rovnoběžná s L, nebo ji protíná. V prvním případě existuje nejméně $k + 1$ přímek procházejících bodem p a rovnoběžných s přímkou L, což je spor s axiómem 5. V druhém případě L' protíná L v bodě různém od všech bodů p_i. Z toho vyplývá, že na přímce L leží nejméně $n + 1$ bodů, což je spor s předpokladem.

Důkaz části (a). Budiž L přímka obsahující právě n bodů a nechť L' je jiná přímka. Protože L a L' jsou různé přímky, podle axiómů 1 a 3 existuje bod p ležící na L' a neležící na L. Z toho, že $k \geqq 2$, vyplývá, že existuje přímka $L'' \neq L'$ procházející bodem p a rovnoběžná s přímkou L (obr. 2.) Podle axiómu 3 na přímce L'' existuje bod q různý od p. Navíc bod q neleží na přímce L, protože L'' je rovnoběžná s L. Podle axiómu 5 bodem q prochází právě k přímek rovnoběžných s L'. Poněvadž však každým bodem prochází právě $n + k$ přímek, musí n z nich protínat L'; z toho vyplývá, že L' musí obsahovat právě n bodů.

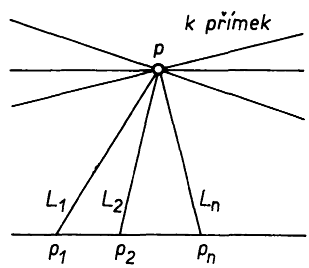
Důkaz zbytku části (b) se podává takto: Jestliže bod p leží na přímce L, pak podle



Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.

axiómu 2 existuje bod q neležící na L. Z axiómu 5 vyplývá, že pak existuje přímka L' rovnoběžná s přímkou L a procházející bodem q. Poněvadž L' obsahuje právě n bodů (část (a)) a L' je rovnoběžná s L, bod p neleží na přímce L'. Podle první části důkazu tedy bodem p prochází právě $n + k$ přímek.

Důkaz části (c). Budiž L libovolná přímka. Pak podle (a) na přímce L leží právě n bodů. Současně existuje bod p (axióm 2), který neleží na přímce L. Nechť $p_1, p_2, \ldots, p_n$ jsou body ležící na L. Tyto body určují n přímek jdoucích bodem p (axióm 1). Bodem p pak prochází ještě k přímek rovnoběžných s L (obr. 3). Každá z těchto $n + k$ přímek obsahuje (vzhledem k (a)) právě n bodů. Na každé z nich tedy leží $n - 1$ bodů různých od bodu p. Z toho plyne, že existuje nejméně $(n + k)(n - 1) + 1$ bodů. Nemůže jich být více. Předpokládejme, že q je bod různý od výše uvedených. Pak podle axiómu 1 body p a q určují přímku procházející bodem p a tímto bodem tedy prochází $n + k + 1$ přímek, což je spor s (b).

Existuje tedy právě $(n + k)(n - 1) + 1$ bodů.

Důkaz části (d). Nechť r je počet bodů v daném systému. Pak

$$r = (n + k)(n - 1) + 1 .$$

Poněvadž každé dva body určují právě jednu přímku (axióm 1), existuje nejvýše

$$C(r, 2) = r(r - 1)/2$$

přímek. Vzhledem k tomu, že každá přímka obsahuje n bodů a každé dva body určují přímku, každá přímka je počítána $C(n, 2)$-krát, kde

$$C(n, 2) = n(n - 1)/2 .$$

Tedy počet přímek v uvažovaném systému je roven

$$\frac{r(r-1)}{2} : \frac{n(n-1)}{2} = \frac{r(r-1)}{n(n-1)} = \frac{[(n+k)(n-1)+1](n+k)}{n} .$$

Geometrie splňující soustavu axiómů 1—5, v nichž na každé přímce leží právě n bodů, se značí $BL(n, k)$. Snadno sestrojíme nejjednodušší z těchto systémů, $BL(2, 2)$. Z věty 1 víme, že obsahuje 5 bodů; označme je p_1, p_2, p_3, p_4, p_5. Poněvadž na každé přímce leží pouze 2 body, stačí vzít všechny dvoubodové kombinace, abychom získali všechny přímky tohoto systému:

$$BL(2, 2)$$

$$L_1 : p_1p_2 \quad L_2 : p_1p_3 \quad L_3 : p_1p_4 \quad L_4 : p_1p_5 \quad L_5 : p_2p_3$$

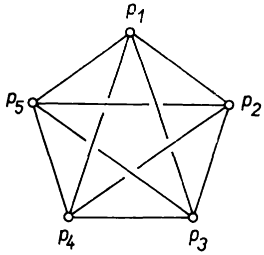
$$L_6 : p_2p_4 \quad L_7 : p_2p_5 \quad L_8 : p_3p_4 \quad L_9 : p_3p_5 \quad L_{10} : p_4p_5$$

Lze snadno ověřit, že ostatní axiómy jsou rovněž splněny. Máme tedy model splňující soustavu axiómů. Vztahy mezi body a přímkami v tomto systému lze také vyjádřit pomocí tzv. tabulky incidence (obr. 4). Modelem této geometrie $BL(2, 2)$ může být také útvar na obr. 5. Je třeba mít na paměti, že „přímky" na tomto obrázku nejsou přímkami v obvyklém slova smyslu, — skládají se, jak víme, pouze ze dvou bodů.

Lze sestrojit mnoho příkladů geometrií $BL(n, k)$. Jako úlohu pro žáky lze například

Obr. 4.
Obr. 5.

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}
p_1	●	●	●	●						
p_2	●				●	●	●			
p_3		●			●			●	●	
p_4			●			●		●		●
p_5				●			●		●	●



uložit sestrojení podobných modelů pro $BL(2, 3)$ a $BL(2, 4)$. Uvedeme zde ještě jeden příklad. Je to řešení Kirkmanova tzv. „problému žákyň“. Obvykle se uvádí v této formě:

Vychovatelka vodí denně žákyně na vycházku. Patnáct žákyň jde v trojstupu v pěti řadách. Problémem je zařídit to tak, aby v žádném ze sedmi po sobě jdoucích dní žádná žákyně nešla ve stejné společnosti. Je tedy nutno pokaždé měnit celou trojici. Řešením je geometrie $BL(3, 4)$, jejíž tabulka incidence je na obr. 6. Toto řešení bylo nalezeno roku 1850, ale až za sto let po tom se začaly Bolyaiovy-Lobačevského prostory zkoumat systematicky.

	L_1	L_2			L_5					L_{10}					L_{15}					L_{20}					L_{25}					L_{30}					L_{35}
p_1	●					●					●					●					●					●					●				
p_2	●						●					●					●					●					●					●			
	●							●					●					●					●					●					●		
		●				●								●					●				●				●							●	
p_5			●			●									●			●						●					●			●			
				●					●		●							●							●		●								●
					●					●	●									●			●							●		●			
		●					●								●	●									●					●			●		
					●				●			●				●								●				●						●	
p_{10}			●				●							●						●	●							●							●
				●						●		●							●		●								●				●		
		●								●			●				●									●									●
				●				●							●					●		●		●		●								●	
					●			●						●			●								●				●		●				
p_{15}			●						●				●						●			●								●	●				

Obr. 6.

Naskýtá se otázka, zda prostory $BL(n, k)$ existují pro libovolné dvojice přirozených čísel n a k. Ukazuje se, že tomu tak není. Platí totiž tato věta:

Věta 2. *Jestliže číslo $k(k - 1)$ není dělitelné číslem n, pak prostor $BL(n, k)$ neexistuje.*

Důkaz. Jestliže daná geometrie existuje, pak podle části (d) věty 1 počet přímek musí být přirozené číslo, tedy

$$[(n + k)(n - 1) + 1](n + k)/n$$

musí být přirozené číslo. Uvažme, že

$$[(n + k)(n - 1) + 1](n + k)/n = n^2 + (2k - 1)n + (k - 1)^2 - k(k - 1)/n \, .$$

Z tohoto vztahu je zřejmé, že je to přirozené číslo právě tehdy, jestliže $k(k - 1)$ je dělitelné číslem n. Tím je věta dokázána.

Plyne z toho, že například $BL(3, 2)$ neexistuje, protože číslo 3 nedělí číslo 2. 1. Lze dokázat, že pro $n > 2$ neexistuje $BL(n, 2)$. Na druhé straně se lze ptát, zda v případě, kdy n dělí $k(k - 1)$, vždy existuje odpovídající geometrie. Tato otázka dosud není rozřešena.

Existuje mnoho neřešených problémů týkajících se konečných Bolyaiových-Lobačevského prostorů. Dodnes nebyl nalezen příklad geometrie pro n větší než k a $k \geqq 2$. Speciálně nebyl nalezen nejmenší takovýto příklad, to jest $BL(6, 3)$.

Literatura

[1] L. M. Graves: *A finite Bolyai-Lobaczevsky plane.* American Mathematical Monthly *69* (1963), 130—132.

[2] S. H. Heath: *The existence of finite Bolyai-Lobaczevsky planes.* Mathematics Magazine 43, November 1970.

[3] F. Kárteszi: *Introduction to finite geometries.* Akadémiai Kiadó, Budapest 1976.

[4] C. R. Jr Wylie: *Foundations of geometry.* New York, Mc Graw-Hill Book Co. 1964.

diskuse

MATEMATIKA Z HLEDISKA POTŘEB INŽENÝRSKÉ PRAXE

Ladislav Votruba, Praha

Jako stavební inženýr – vodohospodář a učitel na vysoké škole, mám na matematice trojí zájem:

– aby mi pomáhala v odborné a vědecké práci v mém vlastním oboru;

– aby pomáhala vychovávat dobré mladé inženýry – vodohospodáře, aspiranty, vědecké pracovníky;

– aby pomáhala rozvíjet nové progresívní směry ve vodním hospodářství.

Přípravný výbor 17. celostátní konference o matematice na VŠTEZ vyslovil přání, abych ve své přednášce nastínil:

– kde inženýři matematiku potřebují a jak ji využívají;

– jaký je podíl matematiky na vědeckotechnickém rozvoji a na vývoji technického myšlení a inženýrské intuice;

– jakou náplň a metody dát výuce matematiky na vysokých školách inženýrského zaměření.

Požadavky jsou formulovány velmi přesně. Společenskou závažnost jimi vyjádřených problémů přesvědčivě dokumentuje počet příspěvků na příbuzná témata, které jsme mohli v poslední době číst nebo slyšet, a to ze strany matematiků i inženýrů, našich i zahraničních, souhlasných

*) Upravený příspěvek přednesený na 17. celostátní konferenci o matematice na VŠTEZ v Ostravě 23. srpna 1982.