

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Ivan Dvořák; Jaromír Šiška

Teorie deterministického chaosu a některé její aplikace (2. část)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 36 (1991), No. 3, 155--171

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/139173>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1991

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Teorie deterministického chaosu a některé její aplikace

2. část*)

Ivan Dvořák, Jaromír Šiška, Praha

8. Odhady charakteristik atraktorů z časových řad

V minulé kapitole jsme zavedli některé kvalitativní charakteristiky atraktorů. Jejich výpočty jsou založeny na předpokladu, že známe na atraktoru pravděpodobnostní invariantní míru popisující frekvenci „návštěv“ jednotlivých stavů systémů. Pokud známe generující rovnice dynamického systému, je možno postupy uvedenými v předchozí kapitole pravděpodobnostní míru odvodit. Výpočet charakteristických invariantů potom je pouze technický (byť ne vždy jednoduchý) problém.

Situace je mnohem komplikovanější, pokud sledujeme reálně existující systém, který vykazuje chaotické chování. U takového systému máme k dispozici měření jistých signálů jím generovaných (získaných zpravidla ve formě časových řad), neznáme však ani rovnice příslušného dynamického systému ani invariantní míru na atraktoru ve stavovém prostoru. Obecně lze dynamiku studovaného systému zobrazit v M -rozměrném prostoru, zpravidla platí $M > 1$. Signály měřené na systému bývají zpravidla jednorozměrné, nedávají nám tedy žádný zjevný návod ani pro stanovení velikosti M . Metodika vyložená v této kapitole se zaměřuje na odhad charakteristických invariantů atraktorů u systémů, jejichž generující rovnice neznáme. Tento problém se vlastně rozpadá na problémy dva:

1. Rekonstrukce atraktoru v příslušném M -rozměrném stavovém prostoru z naměřené časové řady.
2. Odhad zvoleného charakteristického invariantu z této rekonstrukce.

Poznámka: Uvedenou metodiku lze samozřejmě použít i pro časové řady generované na počítačích pro dynamické systémy, jejichž generující rovnice známe. Tohoto postupu se také často používá. Umožňuje jednak testování přesnosti dané metody, jednak stanovení hodnot technických parametrů (délka zpracovávané časové řady, potřebná přesnost měření atd.).

8.1. Takensova metoda časových zpoždění

Nejjednodušší a patrně také nejlepší způsob, jak rekonstruovat mnohorozměrný signál z jednorozměrného, je metoda časových zpoždění [14], [21]. Její smysl je možno shrnout takto (viz obr. 4):

*) 1. část článku byla otištěna v minulém čísle.

Nechť původní dynamický systém má topologickou dimenzi (počet os stavového prostoru) M . Projekcí atraktoru do jedné dimenze nechť vznikne náš měřený signál $\{x_i\}$. Zkonstruujeme z tohoto signálu K -rozměrný signál x_i^K , kde

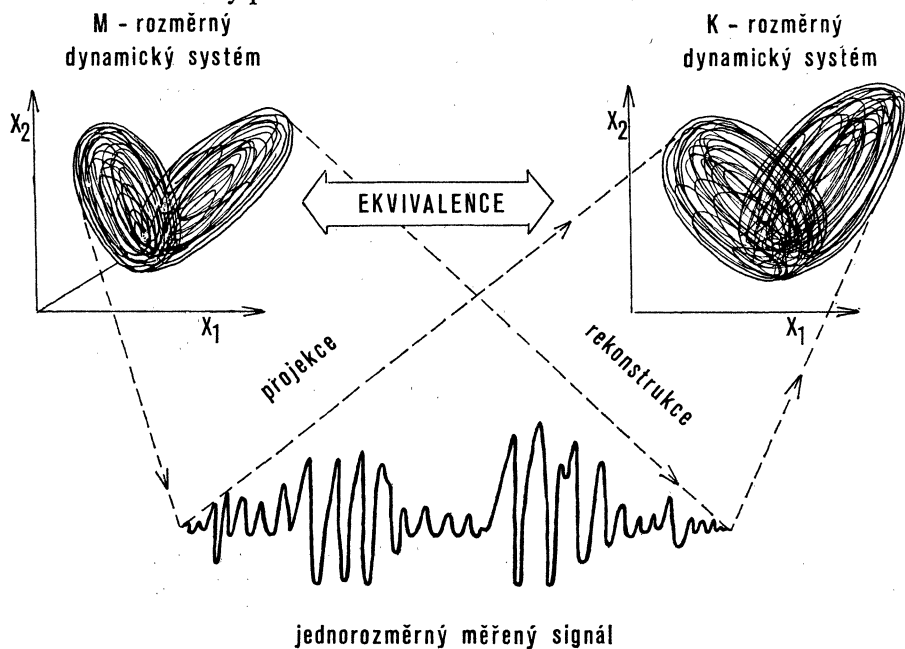
$$(38) \quad \{x_i^K\} = \{(x_i, x_{i+\tau}, x_{i+2\tau}, \dots, x_{i+(K-1)\tau})\},$$

kde τ je vhodné zpoždění (celý násobek vzorkovacího kroku); K nazýváme dimenzí vnoření. Potom, pokud je dimenze vnoření

$$(39) \quad K \geq 2M + 1,$$

reprezentuje zkonstruovaný proces v K -rozměrném stavovém prostoru pohyb po atraktoru, který má vlastnosti (a tedy i hodnoty svých charakteristik) shodné s atraktorem původního studovaného dynamického systému.

V praxi využíváme této metody následujícím způsobem: Předpokládáme nějakou (nízkou) dimenzi stanoveného prostoru a zvolíme odpovídající K , např. $K = 1$. Z jedno-rozměrného signálu rekonstruujeme K -rozměrný signál (pro $K = 1$ jsou původní a rekonstruovaný signál samozřejmě totožné) a odhadneme některým z postupů vyložených dále hodnotu příslušného charakteristického invariantu. Pokud zvolené K bude příliš nízké, bude rekonstruovaný atraktor pouze projekcí atraktoru původního a zjištěná hodnota charakteristického invariantu nebude odpovídat. Zvětšíme-li K o jedničku a zopakujeme-li celý postup, projekce se zlepší, a proto i odhad charakteristického invariantu bude bližší hodnotě skutečné. Dalším opakováním tohoto postupu se můžeme dostat až do saturační oblasti, kdy se hodnota charakteristického invariantu již dále nemění. Příslušné K potom považujeme za dostatečné a hledanou saturační hodnotu označíme za odhad hodnoty příslušného charakteristického invariantu.



Obr. 4. Rekonstrukce stavové trajektorie n -rozměrného dynamického systému z jednorozměrné časové řady.

8.2. Počítání invariantů z experimentálních dat

Budeme se zabývat dvěma odlišnými typy experimentů: počítačovými experimenty a experimenty s reálnými fyzickými systémy. Mezi těmito experimenty je podstatný kvantitativní rozdíl, poněvadž dynamické evoluční rovnice s pevnými počátečními podmínkami lze studovat na počítači mnohem přesněji než na jiném fyzickém modelu. Nicméně kvalitativním rozdílem je skutečnost, že při počítačovém experimentu jsou evoluční rovnice explicitně známy a je proto triviální spočítat např. přímo „tečné zobrazení“ Df^t . Ve fyzickém experimentu umíme naopak naměřit pouze body na trajektorii a z nich pak pomocí interpolací počítáme derivace.

Je dobré mít na paměti skutečnost, že i když dále uvedené metody na získávání informací z experimentálních dat mají většinou zdravý základ, zaostávají ještě hodně za solidní matematickou teorií, jež byla prezentována v předchozích kapitolách.

Z důvodů jednoduchosti se omezíme jen na počítání dimenze z experimentálních dat. Metody zde popsané jsou založeny na výsledcích L. S. Youngové, P. Grassbergera a I. Procaccii.

Předpokládejme, že máme experimentální časovou řadu $u(1), u(2), \dots$, získanou pravidelným měřením za určitý časový interval. Aniž bychom omezili obecnost našich úvah, můžeme kvůli jednoduchosti předpokládat, že $u(i) \in \mathbb{R}$. Užitím zpožděných souřadnic zkonstruujeme bod $x(i) = [u(i), \dots, u(i+n-1)]$, a získáme tak posloupnost bodů $x(1), \dots, v \mathbb{R}^n$. Tato konstrukce přiřazuje bodům $X(i)$ z fázového prostoru jejich projekci $x(i) = p_n X(i)$ v \mathbb{R}^n . Jestliže m je fyzikální míra popisující náš systém (tj. m je nesena ve stavovém prostoru atraktorem), budou body $x(i)$ stejnoměrně rozděleny vzhledem k projekci míry $p_n m$ do \mathbb{R}^n . Ve skutečnosti to není úplně vždy pravda: jestliže časový interval mezi následnými měřeními je celočíselný násobek „přirozené periody“ systému, např. je-li systém periodický nebo kvaziperiodický, nejsou body $x(i)$ stejnoměrně rozděleny. Tyto výjimečné případy lze snadno rozpoznat a zvládnout. Na základě těchto faktů a s možností měnit n chceme spočítat $\dim_H m$. Jinak řečeno, vyjdeme z předpokladu, že pro n dosti velké je $\dim_H p_n m = \dim_H m$. Skutečně, je-li $\dim_H m \leq N$, pak pro většinu N -dimenzionálních projekcí je $\dim_H p_N m = \dim_H m$.

Přesněji platí:

Věta [22]. *Nechť $0 < M < n$. Jestliže E je suslinovská množina v \mathbb{R}^n a $\dim E \leq M$, existuje borelovská množina v prostoru ortogonálních projekcí $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^M$ taková, že její doplněk má míru nula vzhledem k přirozené rotačně invariantní míře na projekcích a $\dim pE = \dim E$ pro všechna p z G .*

Nyní bychom samozřejmě potřebovali umět dokázat, že naše projekce p_n patří do té dobré množiny G (což by implikovalo $\dim_H p_n m = \dim_H m$, pro n dosti velké) z právě uvedené věty. Nicméně z výše uvedeného je patrné, že to můžeme (s relativně čistým svědomím) předpokládat.

Dříve než budeme pokračovat dál, je na místě připomenout, že z libovolného experimentu získáme pouze konečnou časovou řadu, a proto informace, jež z ní může být získána, má přirozenou horní hranici; některé otázky mohou být příliš jemné (anebo statistické fluktuace příliš veliké) na to, aby existovala rozumná odpověď.

Algoritmus na počítání informační dimenze je založen na následující větě, která dává do souvislosti informační dimenzi s mírou malých koulí ve fázovém prostoru.

Věta [20]. *Nechť m je pravděpodobnostní míra na konečně dimenzionální varietě M . Předpokládejme, že*

$$(40) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log m[B_x(r)]}{\log r} = \alpha$$

pro m -skoro všechna x . Pak $\dim_H m = \alpha$.

Poznámka. Jestliže m je ergodická míra, pak stačí předpokládat, že

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log m[B_x(r)]}{\log r}$$

existuje m -skoro všude; z ergodičnosti pak plyne, že limita je skoro všude konstantní, a tedy rovná $\dim_H m$.

Užijeme nyní naši posloupnosti $x(1), x(2), \dots, x(N)$ v \mathbb{R}^n při konstrukci funkce

$$(41) \quad C^n(i, r) = 1/N \cdot \text{card} \{1 \leq j \leq N; d(x(i), x(j)) \leq r\},$$

kde $d(-, -)$ je euklidovská (nebo nějaká jiná ekvivalentní) metrika v \mathbb{R}^n . Funkci $C_n(i, r)$ získáme setříděním $x(j)$ vzhledem k jejich vzdálenostem od $x(i)$.

Uvědomme si, že platí

$$(42) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} C^n(i, r) = (p_n m)[B_{x(i)}(r)]$$

s výjimkou bodů nespojitosti pravé strany. Předpokládáme-li dále, že platí

$$(43) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log C^n(i, r)}{\log r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log (p_n m)[B_{x(i)}(r)]}{\log r} = \alpha_n,$$

pak $\dim_H p_n m = \alpha_n$, a jestliže navíc projekce p_n je z dobré množiny G , pak $\alpha_n = n$ v případě, že $\dim_H m \geq n$ anebo $\alpha_n = \dim_H m$ v případě, že $\dim_H m = n$. Experimentálně lze α_n získat vynesením $\log C^n(i, r)$ proti $\log r$ a určením sklonu získané křivky.

Uvedeným způsobem lze odhadnout z experimentálních dat informační dimenzi. Samozřejmě, že se může stát, že získaný výsledek je nesprávný: např. projekce p_n nemusí být z dobré množiny G . Aby získaný výsledek měl naději být správný, musí α_n být pro dosti velká n na n nezávislé; s větším N by se výsledek neměl podstatně změnit a též by měl být nezávislý na volbě indexu i .

Abychom odstranili náhodné fluktuace a vylepšili statistiku získaných výsledků, je možno spočítat dimenzi jako průměr z α_n pro několik různých $x(i)$. Způsob s počítáním průměru ze všech $\alpha_n(i)$ použili k počítání dimenze Grassberger i Procaccia a též Takens. Při tomto postupu se počítají průměry

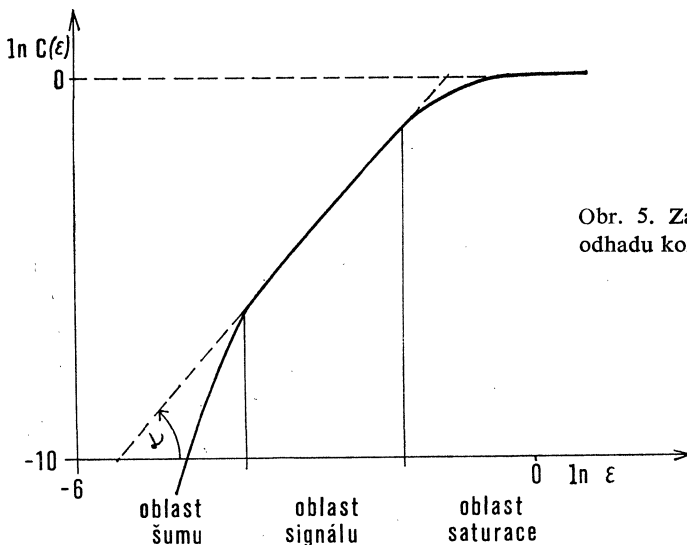
$$C^n(r) = \frac{1}{N} \sum_i C^n(i, r) = \frac{1}{N-2} \text{card} \{ \text{uspoř. dvojice } [x(i), x(j)] \text{ takové, že } d(x(i), x(j)) \leq r \}$$

a dimenze je pak definována

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log C^n(i, r)}{\log r} = \nu_n.$$

Většina čtenářů má asi v této chvíli pochybnosti, zda takto definovaná dimenze je vsutku informační dimenze. Jejich pochyby jsou plně namístě – v_n nemusí být rovné informační dimenzi. Tato nová dimenze se nazývá korelační dimenze a obecně pro ni platí, že je menší nebo rovná informační dimenzi; hypotéza je, že pro „většinu“ atraktorů platí $\alpha_n = v_n$. Korelační dimenze má při počítání z experimentálních dat lepší statistiku než informační dimenze, a proto je v současnosti nejčastěji počítanou dimenzí. Navíc je nutno si uvědomit, že problémy s případnou nerovností obou dimenzí nastávají až při limitních přechodech v jejich definicích, a tedy nikoli při výpočtu z konečně mnoha dat.

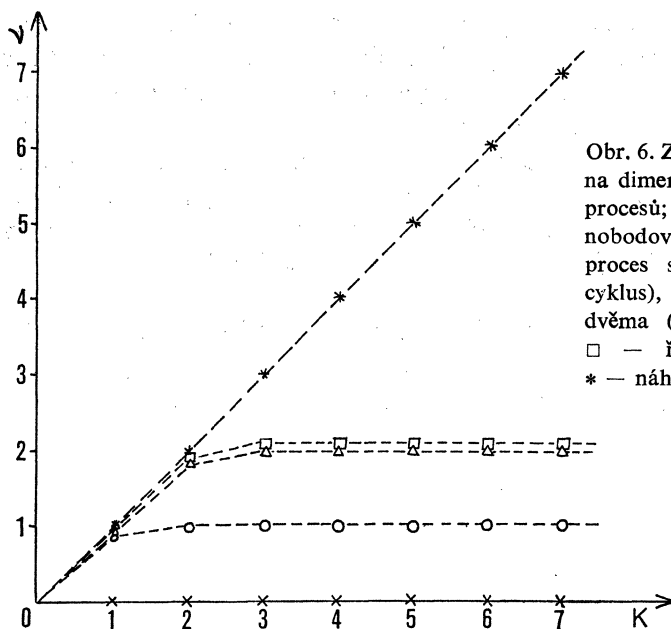
Přestože metoda Grassbergera a Procaccii není plně matematicky zdůvodněna, lze jí s trochou opatrnosti užívat k získávání reprodukovatelných výsledků. S použitím průměrné výpočetní techniky je s ní možno počítat úspěšně až do $n = 5$.



Obr. 5. Závislost $\log C(\epsilon)$ na $\ln \epsilon$ při odhadu korelační dimenze.

Poznámka. Vynesme napočítané hodnoty $\log C^n(r)$ jako funkci $\log r$. Pak pro malá r typicky dostaneme díky špatné statistice shluk bodů. Pokud v měřeném systému není příliš mnoho šumu, existuje potom interval (r_0, r_1) , ve kterém vynesená data leží prakticky na přímce. Pro $r \geq r_1$ by se křivka proložená body začala ohýbat v důsledku nelineárních efektů. Interval (r_0, r_1) je intervalem, ve kterém rozdělení vzdáleností mezi dvojicemi bodů je statisticky významné (viz obr. 5). Pro odhad korelační dimenze proto nakonec používáme pouze vzdálenosti padnoucí do uvedeného intervalu (r_0, r_1) . Odhadnuté číslo pak není ovšem limitní hodnotou podílu logaritmů $C^n(i, r)$ a r pro $r \rightarrow 0$. V novější literatuře se proto pro tuto veličinu setkáváme s označením „korelační exponent“.

Vraťme se na závěr k již uvedenému postupnému zvyšování dimenze n . Uvedenými metodami se získá vždy hodnota příslušného charakteristického invariantu v závislosti na zvoleném n . Na obr. 6 je ukázána jako příklad závislost korelační dimenze v_n na n pro různé typy procesů.



Obr. 6. Závislost korelační dimenze v_n na dimenzi vnoření n pro různé typy procesů; \times — konstantní proces (jednobodový atraktor), \circ — oscilující proces s jednou frekvencí (limitní cyklus), \triangle — oscilující proces se dvěma (nesoudělnými) frekvencemi, \square — řešení Lorenzových rovnic, $*$ — náhodný proces.

Kdybychom postupem vyloženým v této kapitole počítali korelační dimenzi pro „skutečně náhodný“ proces (např. Brownův pohyb), dostali bychom pro každé n dimenzi vnoření — číslo blízké n . Teoreticky je korelační dimenze „skutečně náhodného“ procesu vždy rovna dimenzi celého stavového prostoru. Vyplývá to ze skutečnosti, že při rekonstrukci n -rozměrného signálu z původní 1-rozměrné realizace vyplní daný signál vždy podprostor stanoveného prostoru o stejné topologické dimenzi. Jestliže tedy ani pro největší n umožněné použitým počítačem nedojde k saturaci hodnoty korelační dimenze, znamená to jednu ze dvou možností:

1. Buď je příslušná dimenze stanoveného prostoru odpovídajícího studovanému systému větší než n ,
2. nebo je studovaný proces skutečně náhodný.

Mezi těmito dvěma možnostmi nemůžeme rozhodnout pomocí počítačů, jejichž možnosti jsou konečné. Znamená to, že jsme schopni detekovat jako chaotické pouze procesy, které probíhají ve stanoveném prostoru s relativně nízkou dimenzí. Chaotické procesy probíhající ve stanoveném prostoru s dimenzí > 100 , v našich podmínkách již dokonce > 10 , nejsme prakticky schopni odlišit od procesů skutečně náhodných.

Výsledky výpočtů korelační dimenze různých signálů v závislosti na dimenzi vnoření ukazuje obr. 6.

9. Aplikace v biologicko-lékařské oblasti

V předcházejících kapitolách jsme se seznámili se základy teorie deterministického chaosu. Její vznik a rozvoj byl v různých etapách přímo stimulován problémy vznikající-

cími na poli fyzikálního, chemického a biologicko-lékařského výzkumu. Základní práce Lorenzova v oblasti meteorologie byla již uvedena. Ve fyzikální oblasti se věnovala teorii deterministického chaosu největší pozornost v souvislosti se studiem vzniku turbulence v proudících kapalinách. V chemické oblasti se tuší největší využití při popisu vzniku prostorově proměnných struktur, jejich příkladem je známá Bělousova-Zabotinského reakce. Autoři tohoto sdělení se zabývají aplikací teorie deterministického chaosu v oblasti biologicko-lékařské; následující výklad se proto soustřeďuje na tuto oblast.

Oblast biologických jevů se jeví jako velmi vhodná pro využití uvedené teorie zejména ze dvou důvodů:

1. Chování živých objektů není náhodné, je řízeno často velmi složitými, ale v zásadě deterministickými zákonitostmi.
2. Signály měřené na biologických objektech mají ve velké většině chaotický charakter.

Ze širokého spektra využití deterministického chaosu při studiu biologických jevů jsme zvolili pro ukázkou dvě oblasti, které se jeví jako nejvíce stimulující pro zpětný rozvoj matematické teorie. První oblastí jsou matematické modely ekologických společenstev. Následující ukázkou ilustruje postup, jak lze dospět k jednoduchým funkčním modelům vykazujícím chaotické chování.

Druhou oblastí jsou neurobiologické systémy. Zde sahá oblast uplatnění teorie deterministického chaosu od elektrických projevů membrán nervových buněk až po studium globálních signálů, jako je elektroencefalogram (EEG).

9.1. Chaos v ekologických systémech

Ekologická společenstva jsou charakterizována zpravidla velkým množstvím vzájemně interagujících organismů, jejichž detailní matematické modely vedou k velmi rozsáhlým a zcela neprůhledným soustavám rovnic. Postupujeme proto často tak, že jeden druh si v ekologické nice označíme za významný a vliv všech ostatních shrneme do několika málo parametrů modelu. Ty reprezentují „vliv“ okolí na vývoj počtu jedinců populace daného druhu. Zpětné působení daného druhu na své okolí samozřejmě také musíme vzít nějakým způsobem v úvahu.

Omezme nyní naše uvažování na populace (např. hmyzu), které mají každý rok pouze jednu generaci a prakticky přitom nedochází k překryvu generací. Vývoj počtu jedinců X dané populace v závislosti na čase t může pak vypadat jako na obr. 7.

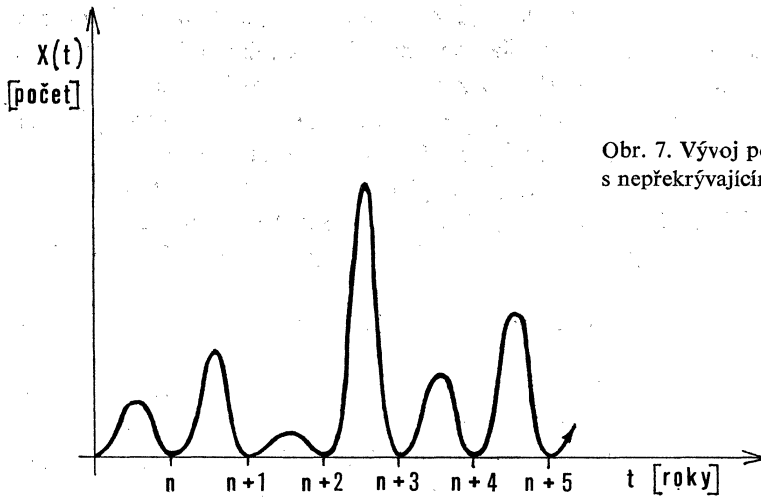
Již z tohoto obrázku je patrné, že studovat počet jedinců populace v každém časovém okamžiku je vlastně zbytečné. Na zvolené úrovni přesnosti úplně postačí, budeme-li sledovat průměrný počet příslušníků populace v každém roce.

Označíme-li T délku periody (tj. jeden rok), bude tento průměrný počet X_n definován výrazem

$$X_n = \int_n^{(n+1)T} X(t) dt ,$$

kde index n značí příslušný rok. O tomto průměrném počtu můžeme předpokládat, že platí

$$(44) \quad X_{n+1} = E(X_n) \cdot F(X_n) .$$



Obr. 7. Vývoj počtu jedinců populace s nepřekrývajícími se generacemi.

Funkce F zde představuje nárůst dané populace v roce $n + 1$. O něm můžeme předpokládat, že je přímo úměrný počtu příslušníků populace v předchozím, tj. n -tém roce

$$(45) \quad F(X_n) = fX_n,$$

f značí fertilitu populace. Funkce E zde reprezentuje vliv okolí, který určuje „pravděpodobnost přežití“ již narozených jedinců. Na přijaté úrovni aproximace můžeme předpokládat, že platí

$$(46) \quad E(X_n) = K - \varepsilon X_n,$$

tj., že „pravděpodobnost přežití“ je v $n + 1$ -ním roce tím menší, čím byla v n -tém roce populace větší. Tato volba funkce E tedy reprezentuje jakési vyčerpání potravinových zdrojů. Předpokládáme K a ε samozřejmě takové, aby hodnoty E byly pouze kladné.

Dosadíme-li vztahy (45) a (46) do rovnice (44), dostaneme diferenční rovnici

$$X_{n+1} = (K - \varepsilon X_n) \cdot fX_n,$$

kteřou zavedením nových proměnných

$$Y_n = \frac{\varepsilon X_n}{K}$$

a nového parametru $a = fK$ převedeme na tvar

$$(47) \quad Y_{n+1} = \alpha Y_n(1 - Y_n).$$

Ten představuje jednoduchý matematický model dynamiky ekologické populace s nepřekrývajícími se generacemi. Sledování ekologického problému – studium počtu příslušníků populace s nepřekrývajícími se generacemi – bylo tak převedeno na řešení problému matematického – řešení rovnice (47). Pro toto studium pak můžeme využít všech metod chaotické dynamiky, o kterých jsme se dozvěděli v minulých kapitolách.

Chování tohoto modelu nemůže být zdánlivě složité. Rovnice (47), které se někdy říká Mayova nebo Feigenbaumova, je vlastně pouze diskrétní verzi tzv. Verhulstovy rovnice používané pro popis (spojitého) vývoje počtu příslušníků různých populací již od

roku 1845. O Verhulstově rovnici je známo, že vykazuje poměrně jednoduché chování; její řešení se pro libovolnou počáteční podmínku monotónně blíží stacionárnímu stavu.

Zcela jinak je tomu u rovnice (47), jejíž řešení v závislosti na hodnotě parametru α vykazuje celou škálu různých typů chování od zcela jednoduchého s jedním stabilním pevným bodem až po chaotické.

Plná analýza závislosti řešení na hodnotě parametru a je poměrně rozsáhlá a je uvedena např. v Mayově článku v Nature [7]. Zde se omezíme pouze na nastínění jejího postupu.

Použitá normalizace byla zvolena tak, aby normalizované hodnoty Y_n ležely v intervalu $[0, 1]$. Celkem snadno se lze přesvědčit, že pro splnění této podmínky je nezbytné, aby a bylo z intervalu $[0, 4]$.

Nalezneme nejdříve stacionární řešení rovnice (47), tj. taková, pro které platí $Y_{n+1} = Y_n$. Ihned vidíme, že jsou to body

$$(48) \quad Y_n = 0 \text{ a } Y_n = \frac{\alpha a - 1}{\alpha}.$$

Pokud je $a < 1$ (uvažujeme pouze $a > 0$), nemá druhé stacionární řešení rovnice (47) smysl – průměrný počet příslušníků populace musí být kladný. V takovém případě existuje pouze jeden stacionární stav $Y_n = 0$.

Chování populace lze dobře znázornit na obrázku, kde vyneseme závislost pravé strany rovnice (47) jako funkce Y_n . Zvolíme na ose Y_n nějakou výchozí hodnotu. Hodnotu Y_{n+1} v následujícím roce dostaneme tak, že v daném bodě Y_n vztýčíme kolmici a v jejím průsečíku s parabolou $\alpha Y_n(1 - Y_n)$ vedeme rovnoběžku s osou Y_n . Průsečík této rovnoběžky s osou prvního kvadrantu udává hodnotu Y_{n+1} . Promítáme ji zpět na osu Y_n a postup opakujeme; dostáváme tím hodnoty jednotlivých iterací (v našem příkladě průměrné počty příslušníků populace v postupně následujících letech). Zajímavější je situace $a > 1$. Objevuje se druhý stacionární stav, který je průsečíkem paraboly $Y_{n+1} = a \cdot Y_n(1 - Y_n)$ s osou prvního kvadrantu. Tento stav může být stabilní, nebo nestabilní. Stabilita druhého stacionárního stavu závisí zjevně na hodnotě derivace pravé strany rovnice (47) ve stacionárním bodě. Ta je rovna $2 - a$, tedy opět závisí na parametru a . Pro $a > 2$ je tento stacionární stav nestabilní. Další analýza ukazuje, že pro hodnoty parametru a trochu větší než 2 má rovnice (47) stabilní oscilující řešení s periodou dvě.

V určitém rozmezí hodnot a je toto řešení stabilní; při dalším zvyšování hodnoty parametru a však svou stabilitu ztrácí a místo něho vznikne stabilní řešení s periodou 4 (tzv. period doubling). Při dalším zvyšování hodnoty a zdvojení periody stabilního řešení pokračuje. Hodnoty parametrů a , pro které dochází ke zdvojení periody stabilního řešení, konvergují k číslu $a_\infty = 3,5699456$. Pro některé hodnoty parametru a větší než a_∞ , má systém (47) chaotické chování.

Pro biologické aplikace přináší tento příklad jeden poznatek, že totiž má smysl hledat jednoduché modely i pro systémy s velmi složitým chováním. V tomto případě má uvedený model navíc tu výhodu, že proměnná modelu (průměrný počet příslušníků populace v daném roce) je veličina jednoduše odvoditelná z experimentálních měření. Tak tomu ovšem vždy být nemusí – vzpomeňme na Lorenzův model, kde proměnné modelu sou-

visí s původními fyzikálními proměnnými velmi složitými vztahy. I když pro systém se složitým chováním existuje jednoduchý model, není nikde zaručeno, že tento model lze formulovat v bezprostředně měřitelných veličinách.

Vraťme se ještě k přechodu od stacionárního chování systému (47) pro $a < 1$ k složitému chování pro $a = a_\infty$.

Právě naznačený typ tohoto přechodu se nazývá Feigenbaumův scénář (výrazu scénář pro přechod od striktního uspořádání k chaosu se používá jako synonyma ke slovu průběh). Kromě něho je zatím známo a pojmenováno pouze několik dalších scénářů (Ruelleův-Takensův-Newhouseův a Pomeauův-Manevillův). Zajímavé přitom je, že typ scénáře závisí pouze na typu přítomných nelinearit v daných rovnicích dynamického systému, a vůbec ne na původním fyzikálním (nebo biologickém) charakteru systému, jehož dynamiku dané rovnice popisují. Tyto scénáře tedy naznačují možnost jakýchsi univerzálních *dynamických* zákonů. Z teoretického hlediska tedy jejich objevení lze chápat jako zatím největší přínos teorie deterministického chaosu biologickým vědám. Jako komplement ke „strukturální univerzalitě“ dané DNA a proteiny nabízí „dynamic-kou univerzalitu“ danou zákony přechodu mezi uspořádáním a chaosem.

9.2. Chaos v neurobiologických systémech

Neurobiologické systémy přirozeným způsobem přitahují pozornost hledačů chaosu, neboť generují vesměs signály velmi nedeterministického průběhu. Seznam literatury ([27]–[36]) ukazuje, jak velká pozornost byla chaosu v neurobiologických systémech dosud věnována. Publikované práce pokrývají řadu úrovní organizace nervové tkáně – od chaotických jevů na membránách nervových buněk [27] přes chaotickou dynamiku jednotlivých excitabilních buněk [28], [29], [36] až po chaotické vlastnosti globálních elektrických projevů mozku [30]–[33]. Dosavadní výsledky je možno shrnout takto:

A. Membrány nervových buněk

Membrány excitabilních buněk tvoří velmi složitý systém, jehož struktura je známa pouze částečně. Lze považovat za jisté, že dynamika jejich excitace se vyznačuje řadou nelineárních efektů – vznik chaotických režimů by byl tedy možný. Tuto možnost podrobně ilustrují některé teoretické modely [27]. Experimentální poznatky jejich závěrům neprotiřečí, konkrétní analýzu naměřených experimentálních dat pomocí metod chaotické dynamiky v této oblasti však dosud postrádáme.

B. Jednotlivé excitabilní buňky

Možnost vzniku chaotických režimů při generaci vzruchů aktivními nervovými buňkami byla studována teoreticky i experimentálně. Teoretické modely [28] ukazují, že za předpokladu dostatečných nelinearit (který neodporuje našim experimentálním poznatkům) mohou excitabilní buňky generovat série akčních potenciálů odrážejících chaotickou dynamiku. Experimentální studie prováděné Rappem a kol. [29], [30] však dávají mnohem méně jednoznačné výsledky. Aplikace metod chaotické dynamiky (konkrétně výpočty korelační dimenze) na série akčních potenciálů generovaných různými typy neuronů (registrovanou proměnnou zde byl časový interval mezi dvěma impulsy)

ukázala, že zkoumané neurony lze rozdělit do dvou skupin. Neurony první skupiny dávaly očekávané výsledky potvrzující existenci chaotické dynamiky (hodnota korelační dimenze se saturovala s rostoucí dimenzí vnoření na konečné hodnotě), zatímco neurony druhé skupiny se zdály generovat náhodný proces (nebo alespoň chaotický proces velmi vysoké dimenze — pro rostoucí hodnoty dimenze vnoření korelační dimenze neustále stoupala). Uvedené výsledky však dosud nebyly potvrzeny z většího počtu laboratoří, nelze tedy vyloučit, že nejde o artefakty.

C. Globální elektrické signály — EEG

Studiu možného chaotického charakteru globálních elektrofyziologických signálů byla věnována pozornost v řadě laboratoří, a to patrně zejména pro perspektivu možného využití získaných poznatků v klinické diagnostice. Největší pozornost byla věnována EEG, neboť jde o mozkový signál nejvíce sledovaný v klinické praxi, v důsledku toho se tento typ dat nejnadhěji získává. Této otázce se věnuje nejméně pět laboratoří: Center for Nonlinear Studies v Los Alamos (G. Mayer-Kress), Universitě Libré, Brusel (A. Babloyantz), Medical College of Pennsylvania, Philadelphia (P. E. Rapp), Medizinische Hochschule Lubeck (E. Basar) a Výzkumný ústav psychiatrický*) ve spolupráci s matematicko-fyzikální fakultou UK v Praze. V řadě dalších laboratoří se o této možnosti uvažovalo (např. Ústav aplikované fyziky AV SSSR, Gorkij), práce zde většinou skončily pro nedostatek technického zajištění. Výsledky dosažené na jednotlivých pracovištích lze zatím pouze těžko porovnávat — měření analyzovaného EEG byla většinou prováděna v různých fyziologických a patologických stavech probandů, které značně ovlivňují charakter daného signálu. Navíc u většiny publikovaných výsledků se neuvádějí ani parametry registrace ani přesné popisy numerických procedur (jejichž volba může získané výsledky výrazně ovlivnit) a ani přesnost získaných výsledků. U některých publikovaných výsledků vzniká proto pocit, že jde o numerické artefakty.

Před srovnáním výsledků analýzy EEG pomocí metod chaotické dynamiky získaných různými pracovišti uvedeme stručně několik základních faktů pro čtenáře, kteří nejsou obeznámeni s charakterem EEG signálu a způsobem jeho registrace.

EEG (elektroencefalogram) je záznam časového průběhu elektrického potenciálu registrovaného plochou elektrodou na povrchu skalpu oproti vhodně zvolené referenční elektrodě. Jeho amplituda je 3–100 μV , frekvenční rozsah 0,5–50 Hz. Elektrický potenciál se zpravidla registruje na několika místech na hlavě (4, 8, 16 nebo 32) zvaných registrační kanály. Rozmístění registračních míst je přesně definováno pomocí standardně stanovených schémat; v současné době se nejčastěji používá tzv. unipolární 10–20 Jaspersovo schéma.

Jak je patrné z obr. 8, má EEG velmi nedeterministický průběh. Tradičně se pro jeho analýzu používaly metody teorie náhodných procesů, zejména frekvenční metody. I když jejich přínos pro klasifikaci typů EEG signálů nelze podceňovat, vyznačují se i obecně známými nedostatky. V uvedených laboratořích proto vznikla myšlenka analyzovat EEG jako chaotický proces.

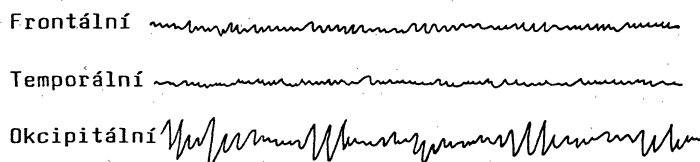
*) Od roku 1991 se tento ústav nazývá Psychiatrické centrum Praha.

Základní používaný postup je ve všech zmíněných laboratořích přibližně stejný. EEG se digitalizuje (nejčastěji frekvencí 128–250 Hz). Z jednorozměrného digitalizovaného signálu se podle Takensový věty rekonstruuje vícerozměrný signál. Jisté problémy zde působí volba vhodného časového zpoždění τ při konstrukci zpožděvaných souřadnic. Obvykle se jeho hodnota volí jedním z těchto tří způsobů:

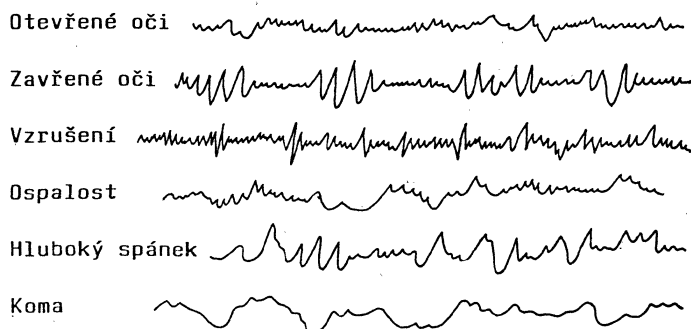
- Na základě zkušenosti jako polovina reciproké hodnoty dominantní frekvence signálu (u EEG je dominantní frekvencí frekvence α -aktivity ≈ 10 Hz, tomu odpovídá $\tau \approx 0,05$ s).
- Na základě výpočtu vzájemné informace daného signálu a signálu zpožděného o τ jako funkce τ ; optimální časové zpoždění odpovídá prvnímu minimu této funkce.
- Na základě výpočtu autokorelační funkce daného signálu; optimální časové zpoždění odpovídá hodnotě τ , pro kterou autokorelační funkce prochází poprvé nulou.

Pro EEG signál dávají všechny metody přibližně stejné výsledky v rozmezí 0,025 až 0,06 s.

Normální EEG pro různé kanály

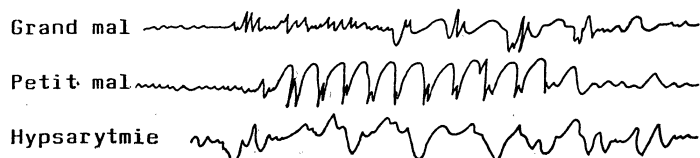


EEG při různých stavech mozku



EEG při různých formách epilepsie

Obr. 8.: Různé průběhy EEG.



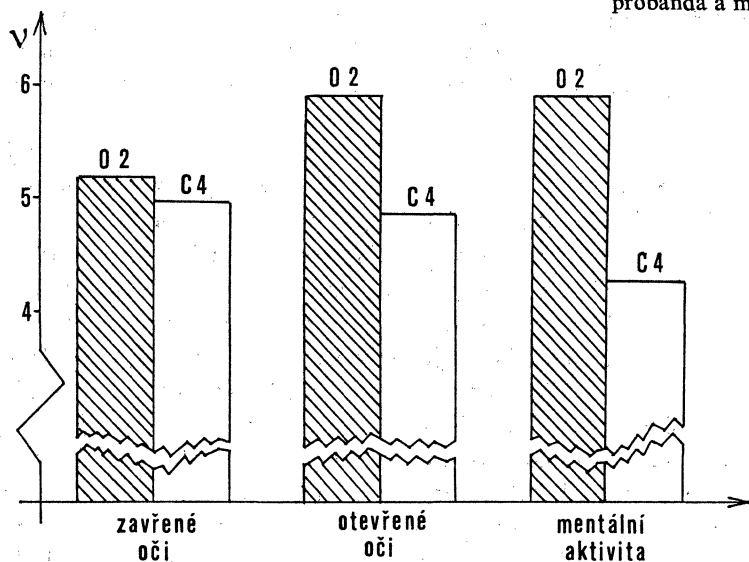
Z mnoha možných deskriptorů chaotických atraktorů se všechna uvedená pracoviště soustředila na výpočet korelační dimenze, pro který jsou známy nejpraktičtější algoritmy. A Babloyantzová v Bruselu publikovala i některé dílčí výsledky výpočtu l'apunovských exponentů; podobné pokusy prováděné na MFF UK zatím nevedly k uspokojivým výsledkům. V dalším výkladu se proto omezíme pouze na výsledky výpočtů korelační dimenze.

Podstatnou otázkou při výpočtu libovolné charakteristiky podivného atraktoru je otázka jeho dostatečné reprezentace, tj. minimální délky časové řady nezbytné pro dosažení náhodných výsledků. Obvykle se za minimální považuje 1000 vzorků; s rostoucí odhadovanou dimenzí tento počet ovšem stoupá [37]. Výpočty korelační dimenze různě dlouhých úseků EEG signálu a jejich srovnání ukázaly, že teprve od 10 000 vzorků výše jsou výsledky stabilní a nezávislé na poloze volby vzorku z delšího signálu. Při všech dále uváděných výpočtech se proto brala jako výchozí délka 12 000 vzorků, tj. při frekvenci vzorkování 200 Hz 1 minuta EEG. Vzhledem k tomu, že při výpočtu korelační dimenze se pracuje se vzdálenostmi jednotlivých bodů rekonstruované trajektorie, představuje 10^4 vzorků $\approx 5 \cdot 10^7$ vzdáleností. Vyhodnocení těchto vzdáleností je velmi náročné na strojní čas. Ve většině laboratoří (prakticky s jedinou výjimkou G. Mayer-Kresse, který disponuje v Los Alamos superpočítačem CRAY-1) se proto přistoupilo k různým metodám náhodných výběrů. Na našich pracovištích jsme testovali několik takových metod; ukázalo se, že použitá metoda může dosti značně ovlivnit výsledky. Ještě větší závislost výsledků se ukázala na délce analyzované časové řady. Pro kratší řady (do 1000 vzorků) byla korelační dimenze EEG zpravidla podstatně nižší ($\approx 3-4$), pro řady délky nad 10 000 vzorků vycházela korelační dimenze $\approx 5-10$. Toto rozmezí také pokrývá škálu výsledků obdržených na jednotlivých pracovištích, které však — jak již bylo řečeno — jen těžko lze mezi sebou srovnávat. V zásadě je možno říci, že měření Babloyantzové a Rappa s jejich spolupracovníky ukazují spíše na nižší hodnoty korelační dimenze EEG (2–4), zatímco výsledky Mayera-Kresse a pražských pracovišť dávají hodnoty spíše vyšší (6–10). Není vyloučeno, že nižší obdržené výsledky jsou numerickými artefakty vyplývajícími z příliš malé délky zpracovávaného úseku signálu; tomu nasvědčují i některé naše studie [31]. V této souvislosti Mayer-Kress [38] upozorňuje rovněž na velkou chybu výsledků, kterou používaný Grassbergerův-Procacciův algoritmus zpravidla dává.

Na přesné stanovení hodnoty korelační dimenze EEG bude nutno ještě počkat, až bude k dispozici více nezávislých měření. V každém případě však uvedené výsledky poskytují doklady pro oprávněnost přístupu k EEG jako chaotickému signálu. Saturace korelační dimenze na konečné hodnotě i při neustálém zvyšování hodnoty dimenze vnoření potvrzuje předpoklad, že EEG má (kromě nezbytného náhodného šumu) též velmi výraznou deterministickou komponentu.

Dalším krokem, o který se většina uvedených pracovišť pokusila, bylo studium závislosti hodnoty vypočtené korelační dimenze EEG na mentálním stavu probanda. Zde nejsou jednotlivé výsledky vůbec srovnatelné. Proč tomu je tak, ilustruje názorně obr. 9, shrnující výsledky našich experimentů. Hodnota vypočtené korelační dimenze pro signály registrované ve dvou různých kanálech, centrálním (C4) a okcipitálním (O2), je zde vynesena pro různé mentální stavy probanda — relaxované bdění (zavřené oči),

Obr. 9. Závislost hodnoty korelační dimenze EEG na mentálním stavu probanda a místě registrace.



bdění (otevřené oči) a mentální aktivitu (opakované postupné odečítání 13 od 1000). Z obrázku je patrné, že při přechodu mezi jednotlivými mentálními stavy se EEG v různých kanálech chová různě. Zatímco v centrální oblasti vypočtená korelační dimenze klesá, v okcipitální oblasti stoupá. Tento výsledek není v rozporu s běžnými představami o intenzitě procesů probíhajících v uvedených částech mozku, při daných mentálních stavech; je však připomenutím faktu, že EEG je velmi komplikovaný signál. Nadále patrně nemá vůbec smyslu hovořit o korelační dimenzi EEG; má smysl pouze hovořit o korelační dimenzi EEG registrovaného v daném kanálu a při daném mentálním stavu probanda.

Podrobná analýza charakteru EEG pomocí metod chaotické dynamiky na uvedených pracovištích dále pokračuje. Nakolik je možno soudit z náznaků v literatuře ubírá se hlavně dvěma směry:

- a) analýza dalších typů EEG signálů (patologické signály – epilepsie, spánkové EEG atd.),
- b) výpočty jiných typů deskriptorů podivných atraktorů z EEG signálů (K – entropie, l'japunovské exponenty).

9.3. Několik spekulací závěrem

Na základě poznatků vyložených v předešlých odstavcích se domníváme, že složité, nepredikovatelné chování biologických systémů můžeme někdy interpretovat jako chování chaotické. Má tedy smysl i pro systémy vykazující chování zjevně velmi komplikované hledat jednoduché matematické modely. Víme však již také, že tyto modely nemusí být možné formulovat v bezprostředně měřitelných veličinách.

Nyní již známe řadu různých biologických systémů, o kterých se domníváme (ať již pomocí analýzy jejich matematického modelu nebo na základě analýz experimentálních dat), že mají chaotické chování. Musíme se ptát: má tento jev nějaký význam? Jsou systémy generující chaotické procesy v nějakém smyslu lepší než systémy se stacionárním nebo oscilujícím chováním? Nebo je výskyt chaotických procesů pouze náhoda?

Odpovědně řešit tyto otázky dosud neumíme, neboť pro fundovanou odpověď máme zatím příliš málo praktických zkušeností s reálnými systémy, které mají chaotické chování. Úvahám o roli chaotických procesů v přírodě se věnuje řada publikací [39]–[41]. V současné době se již sformovalo několik názorů, které však zatím lze označit jen za pouhé spekulace.

Prvním je názor, že chaotické chování je patologie. Jeho autorem je patrně M. C. Mackey [42]; který zavedl pojem „dynamická nemoc“. V Mackeyově pojetí tento termín označuje patologické fungování fyziologického systému, který se ve své anatomii a morfologii nijak neliší od systému zdravého; čím se však odlišuje, je jeho dynamické chování. Jeho projevem může být právě chování chaotické. Mackey dokumentoval svůj názor výsledky studií chaotického chování při krevních onemocněních.

Uvedený názor nelze zcela vyvrátit, tím spíše, že alespoň v systémech studovaných Mackeyem (ale i některých dalších) se chaos skutečně zdá být příznakem patologie. Na druhé straně to nebude patrně platné pro všechny systémy – stačí vzpomenout předchozího odstavce, kde jsme studovali EEG. Chaotickým charakterem se EEG signál vyznačuje i u zcela zdravého jedince.

Dalším možným vysvětlením, jehož patrně nejznámějším zastáncem je W. Ebeling z Humboldtovy univerzity v Berlíně je, že chaotické chování je významné pro optimalizaci chování biologických systémů. Tento názor předpokládá existenci určitého (složitějšího) kritéria definující optimální stav biologického systému. Nalezení tohoto stavu ovšem není jednoduché, neboť funkce definující kritérium může být velmi složitá s mnoha lokálními extrémy. Při teoretickém studiu takových složitých optimalizací se nejlépe osvědčily metody kombinující cílené hledání s náhodnou procházkou. Může být, že chaotické chování některých systémů slouží jako generátor náhodného procesu v procesu optimalizace chování biologických systémů vyšších úrovní. Obdobně zdůrazňuje význam chaotického chování pro adaptaci i Conrad [41]. Tato hypotéza by ovšem zasluhovala podrobnější studium.

Autoři tohoto článku se nejvíce přiklánějí k názoru, že chaotické chování některých dynamických biologických systémů je nevyhnutelným důsledkem jejich vnitřní struktury. Víme, že v průběhu evoluce si jak jednotlivé živé systémy, tak i celá jejich společenstva vyvinuly řadu adaptačních mechanismů umožňujících přežití v krajně proměnlivých vnějších podmínkách. Není nerozumné předpokládat, že tyto mechanismy zahrnují dva typy regulací: na jedné straně lokálně orientované regulátory zaručují velikou citlivost na změny okolních podmínek (a proto umožňují rychlou adaptaci), na druhé straně globální regulátory udržují systém neustále v určitých mezích (a stabilizují tak určitou integritu). Z teorie regulačních dynamických systémů víme, že takové regulace je možno realizovat pouze systémy se silnými nelinearitami. Je možné, že systémy produkující chaotické chování jsou právě ty, které mají optimální vlastnosti z hlediska spojení lokálních a globálních regulací, neboť právě u nich pozorujeme velkou citlivost

na změny vnějších podmínek ve spojení s jistou globální stabilitou. Není samozřejmě ani vyloučeno, že na každém z uvedených vysvětlení je něco pravdy nebo také, že chaos u různých biologických systémů bude mít různé vysvětlení.

10. Závěr

V našem sdělení jsme se pokusili podat základní nástin teorie deterministického chaosu a jejích možných biologických aplikací. Vykládaná teorie je ve stadiu prudkého rozvoje a v důsledku toho výběr vykládaného materiálu nese jistě rysy subjektivity. Navíc stojí teorie deterministického chaosu na pomezí několika již dobře zavedených matematických disciplín (kvalitativní teorie diferenciálních rovnic, teorie náhodných procesů, teorie informace, topologie); to přináší i jisté problémy terminologické. I při relativně velkém rozsahu sdělení se nám samozřejmě nepodařilo zahrnout do textu všechny zajímavé ideje a metody, které bychom rádi čtenářům předali. Zájemce o bližší poznání teorie deterministického chaosu odkazujeme na sborníky Hao-Bai-Lina [2] a Cvitanoviče [3]. Dobrý úvod do celé teorie poskytuje knížka Schusterova [4]. Různým aspektům aplikací a výpočetních metod jsou věnovány sborníky [5] a [43]. Přehled o aplikacích v biologii podává článek Kloeden a Meese [44]. V matematicky nenáročném formě podávají základní poznatky o teorii deterministického chaosu popularizační články [6]–[8].

Literatura

- [21] R. MANE: *On the dimension of the compact invariant sets of certain nonlinear maps*. V: Dynamical Systems and Turbulence, Turbulence, Lecture Notes in Mathematics 898, p. 230, Warick, 1980.
- [22] P. MATTILA: *Hausdorff dimension, ortogonal projections and intersections with planes*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math., 1, 227.
- [23] P. GRASSBERGER, I. PROCACCIA: Estimating the Kolmogorov entropy from chaotic signal. Phys. Rev. A 28, 2591.
- [24] F. TAKENS: *Invariants related to dimension and entropy*. V: Atas do 13. Col. brasilien de Matematicas, Rio de Janeiro, 1983.
- [25] D. RUELLE, J. P. ECKMANN: *Ergodic theory of chaos and strange attractors*. Rev. Mod. Phys., 53 (1985), 617.
- [26] R. A. JOHNSON, K. J. PALNER a G. SHELL: *Ergodic properties of linear dynamical systems*. Preprint.
- [27] J. RINZEL: *Bursting oscillations in an excitable membrane model*. V: Proceedings of the 8th Dundee Conf. on the Theory of Ordinary and Partial Differential Equations (B. D. Sleeman, R. J. Jarvic, D. S. Jones eds.), Springer, N. Y., 1987.
- [28] T. R. CHAY: *Chaos in a three — variable model of an excitable cell*. Physica 16D (1985), 233.
- [29] P. E. RAPP, I. D. ZIMMERMAN, A. M. ALBANO, G. C. DEGUZMAN, N. N. GREENBAUM: *Dynamics of spontaneous neural activity in the simian motor cortex: the dimensions of chaotic neurous*. Phys. Lett 117A (1985), 335.
- [30] P. E. RAPP, I. D. ZIMMERMAN, T. R. BASHORE: *Experimental studies of chaotic neural behaviour: cellular activity and electroencephalographic signals*. V: *Nonlinear Oscillations in Chemistry and Biology*, H. R. OTHMER (ed.), Springer, N. Y., 1986.
- [31] A. BABLOYANTZ, A. DESTEXHE: *Strange Attractors in the Human Cortex*. V: *Temporal Disorder and Human Oscillatory Systems*, L. RENSING, VAN DER HEIDEN, M. C. MACKAY (eds.), Springer, Berlin, 1987.

- [32] I. DVOŘÁK, J. ŠIŠKA: *On some problems encountered in calculating the correlation dimension of EEG*. Phys. Lett. A 118 (1986), 63.
- [33] I. DVOŘÁK, J. ŠIŠKA, J. WACKERMANN, L. HRUDOVÁ, C. DOSTÁLEK: *Evidence for interpretation of EEG as a deterministic chaotic process with a low dimension*. Activ. Nerv. Sup. 28 (1986), 229.
- [34] A. V. HOLDEN, M. A. MUHAMAD: *Chaotic activity in neural systems*. Cybernetics and System Research, R. TRAPPL (ed.), Elsevier, Amsterdam, 1984.
- [35] K. KÉBRY, M. CONRAD: *The enzymatic neuron as a reaction diffusion network of cyclic nucleotides*. Bull. Math. Biol. 14 (1984) 765.
- [36] E. A. LIBERMAN, S. V. MINIMA, O. L. MJAKOTINA, N. E. SKLOVSKY-KORDY, M. Conrad: *Neuron generator potentials evoked by intracellular injection of cyclic nucleotides and mechanical dystension*. Brain Res. 338 (1985), 33.
- [37] I. PROCACCIA: *Přednáška na jarní škole: Chaos and Order in Nonlinear Physical Systems*. ICTP Terst, 1986.
- [38] G. MAYER-KRESS, F. E. YATES, L. BENTON, M. KEIDEL, W. TIRSCH, S. J. PÖPL: *Dimensional analysis of nonlinear oscillations in brain, heart, and muscle*. Math. Biosci. 90 (1988) 155.
- [39] A. SKARDA, W. J. FREEMAN: *How brains make chaos in order to make sense of the world*. Behavioral and Brain Sciences, 10 (1987) 161.
- [40] O. E. RÖSLER: *The chaotic hierarchy*. Z. Naturforschung 38A (1983) 788.
- [41] M. CONRAD: *What is the use of chaos? V: Chaos*, A. V. HOLDEN (ed.), Manchester Univ. Press, Manchester, 1986.
- [42] M. C. MACKAY, VAN DER HEIDEN: *Dynamical diseases and bifurcations: Understanding functional disorders in physiological systems*. Funkt. Biol. Med., 1 (1982), 156.
- [43] G. MAYER-KRESS (ed.): *Dimensions and Entropies of Chaotic Systems*. Springer Series in Synergetics 32, Springer, Berlin, 1986.
- [44] P. E. KLOEDEN, A. I. MEES: *Chaotic Phenomena*. Bull. Math. Biol., 47 (1985), 697.

Jsou to ty nejkrásnější?

David Wells

David Wells získal stipendium na univerzitu v Cambridge v Anglii, ale během studia propadl, což je zřídka se vyskytující výkon. Vzdal se plánů na profesionální dráhu matematika, místo toho se stal učitelem, potom autorem hlavolamů a vynálezcem stolních her (kdysi byl britským juniorským mistrem v šachu). V poslední době je spisovatelem na volné noze a příležitostným lektorem v oboru vyučování matematice.

Na podzim 1988 byli čtenáři Matematického zpravodaje vyzváni (sv. 10, č. 4), aby udělili 24 vybraným matematickým větám body za krásu v rozmezí od 0 do 10. Dostal

DAVID WELLS: *Are These the Most Beautiful?* The Mathematical Intelligencer Vol. 12, No. 3, 37–41. Přeložil OLDŘICH KOWALSKI.

© 1990 Springer-Verlag New York.