Karel Drábek; Zdeněk Pírko

Základy afinní kinematiky v rovině

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 15 (1970), No. 1, [1]--4,5--16

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139165

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK XV — ČÍSLO 1

ZÁKLADY AFINNÍ KINEMATIKY V ROVINĚ

KAREL DRÁBEK, ZDENĚK PÍRKO, Praha

Časopis Pokroky matematiky, fyziky a astronomie otiskl v prvních pěti ročnících několik článků, jejichž autory jsou D. KLUCKÝ, K. ŠINDELÁŘ a J. VYŠÍN. Tyto články jako celek tvoří úvod do analytické afinní geometrie dvojrozměrného a trojrozměrného prostoru. Přesná citace je uvedena v odst. 12.

Náš článek se zabývá touž tématikou. Navazuje nejtěsněji na článek Vyšínův; předpokládáme základní znalosti o nejdůležitějších pojmech, které jsou tam uvedeny. Dále využíváme v něm zavedenou a plodně využitou komplexní symboliku. Grupově-geometrické hledisko podrobně rozpracované ve Vyšínově článku jsme však použili jen jako východisko ke kinematické interpretaci afinního zobrazení v rovině. Proto již se zavedením zobrazení $\mathscr{A}$ hovoříme o jeho pólu a poláře (odst. 2) a zdůrazňujeme zvláštní případy, zejména zobrazení $\mathscr{E}$, příp. $\mathscr{K}$ (odst. 5); dále zavádíme pojem duálního zobrazení $\mathscr{A}^*$ a jeho zvláštních případů (odst. 6 a násl.).

Ke kinematické interpretaci přecházíme pojmem přemístění $\mathscr{A}$; v souvislosti s přemístěním je využito zvláště pojmu pólu jsou a uvedeny některé vlastnosti (odst. 8). Prostřednictvím časové parametrizace je konečně zaveden pohyb $\mathscr{A}$ (odst. 11); podrobnější vlastnosti pohybu $\mathscr{A}$ vyžadují už však méně elementárních prostředků a nejsou proto předmětem tohoto článku.

Článek je doplněn několika literárními odkazy (odst. 12), které jsou míněny především jako první orientace pro toho čtenáře, který by se o afinní kinematiku podrobněji zajímal.

1. Zobrazení $\mathscr{A}$. *Reálnou afinní rovinu* (S) zobrazme bodově na sebe rovnicemi

$$\zeta = a_0 + a_1 z + a_2 \bar{z} \Leftrightarrow z = b_0 + b_1 \zeta + b_2 \bar{\zeta}\,. \tag{1}$$

Přitom

$$z = x_1 + \mathrm{j} x_2\,, \quad \zeta = \xi_1 + \mathrm{j}\xi_2\,,$$

kde x_1, x_2, příp. ξ_1, ξ_2 jsou souřadnice bodu (z), příp. (ζ) v afinní soustavě souřadnic S, k níž je rovina (S) vztažena; a_0, a_1, a_2, příp. b_0, b_1, b_2 jsou parametry zobrazení převádějícího bod (z) do bodu (ζ), příp. bod (ζ) do bodu (z), což v dalším zapíšeme $(z) \to (\zeta)$, příp. $(\zeta) \to (z)$.

Vzájemný vztah mezi a-parametry a b-parametry je dán rovnicemi

(2) $$a_0 = b^{-1}(\bar{b}_0 b_2 - b_0 \bar{b}_1)\,, \quad a_1 = b^{-1}\bar{b}_1\,, \quad a_2 = -b^{-1}b_2\,,$$
$$b_0 = a^{-1}(\bar{a}_0 a_2 - a_0 \bar{a}_1)\,, \quad b_1 = a^{-1}\bar{a}_1\,, \quad b_2 = -a^{-1}a_2\,,$$

v nichž

$$a = a_1\bar{a}_1 - a_2\bar{a}_2 = \bar{a}\,, \quad b = b_1\bar{b}_1 - b_2\bar{b}_2 = \bar{b}\,, \quad ab = 1\,.$$

Pokud nebude řečeno jinak, budeme dále předpokládat, že zobrazení (1) je *regulární* ($a \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0$), *úplné* a jeho parametry jsou *podstatné*, tj.

$$a_0 a_1 a_2 \neq 0 \Leftrightarrow b_0 b_1 b_2 \neq 0\,,$$

přičemž a-parametry, příp. b-parametry jsou vskutku komplexní a žádný z nich se nevyjadřuje pomocí ostatních.

Za těchto předpokladů budeme o zobrazení $(z) \to (\zeta)$, příp. $(\zeta) \to (z)$ mluvit jako o *zobrazení* $\mathscr{A}$, příp. *zobrazení* $\mathscr{B}$ a rovnice (1) budeme zapisovat symbolicky ve tvaru

(1*) $$\zeta = \mathscr{A}z \Leftrightarrow z = \mathscr{B}\zeta\,.$$

Obě vyjádření (1) jsou rovnocenná a přechod od jednoho k druhému se děje pomocí rovnic (2). Proto se můžeme omezovat na jedno z nich, např. na vyjádření pro zobrazení $\mathscr{A}$.

2. Pól a polára zobrazení $\mathscr{A}$. Řekneme, že geometrický útvar (U) (bod, přímka, ...) je invariantní v zobrazení $\mathscr{A}$, jestliže se zobrazí na sebe, tj. platí-li

$$(U) = \mathscr{A}(U)\,.$$

Zobrazení $\mathscr{A}$ přiřazuje bodu (z) bod (ζ) podle první rovnice (1). *Invariantní bod* $({}^0z)$ tohoto zobrazení je dán rovnicí ${}^0\zeta = {}^0z$. Existuje jeden invariantní bod, tzv. *pól* zobrazení $\mathscr{A}$, pro který dostáváme

(3) $${}^0z = \frac{a_0(1 - \bar{a}_1) + \bar{a}_0 a_2}{(1 - a_1)(1 - \bar{a}_1) - a_2\bar{a}_2} = \frac{b_0(1 - \bar{b}_1) + \bar{b}_0 b_2}{(1 - b_1)(1 - \bar{b}_1) - b_2\bar{b}_2} = {}^0\zeta\,.$$

Nenulovost jmenovatelů v (3) je zaručena předpoklady odst. 1 o úplnosti a podstatnosti parametrů zobrazení $\mathscr{A}$, příp. $\mathscr{B}$.

Zobrazení $\mathscr{A}$ přiřazuje směru $s = s_1 + \mathrm{j}s_2$ $(s \neq 0)$ směr $\sigma = \sigma_1 + \mathrm{j}\sigma_2$ vztahem

$$\sigma = a_1 s + a_2 \bar{s}\,.$$

Invariantní směr ${}^0s$ tohoto zobrazení je dán rovnicí ${}^0\sigma = \varrho\,{}^0s$ (kde $\varrho = \bar{\varrho} \neq 0$). Existují dva invariantní směry zobrazení $\mathscr{A}$ určené charakteristickou rovnicí (tzv.

rovnicí pro ϱ)

$$\varrho^2 - (a_1 + \bar{a}_1)\varrho + a = 0\,. \tag{4}$$

Vzhledem k požadavku reálnosti je diskriminant rovnice pro ϱ kladný, tj. $(a_1 + \bar{a}_1)^2 - 4a > 0$, takže invariantní směry existují (reálně) jen v těch zobrazeních $\mathscr{A}$, pro která $a < \mathrm{Re}^2 a_1 \Leftrightarrow b < \mathrm{Re}^2\, b_1$.

Pro čtverec exponenciální části invariantního směru je

$$\frac{{}^0 s}{{}^0 \bar{s}} = \frac{a_2}{\varrho - a_1}\,. \tag{5}$$

Různost kořenů v (4) a nenulovost jmenovatele na pravé straně (5) je zaručena předpoklady odst. 1.

Zobrazení $\mathscr{A}$ přiřazuje přímce $\mathrm{Im}\,\bar{s}(z - z_0) = 0$ přímku $\mathrm{Im}\,\bar{\sigma}(\zeta - \zeta_0) = 0$ a je

$$\zeta - \zeta_0 = a_1(z - z_0) + a_2(\bar{z} - \bar{z}_0)\,, \quad \sigma = a_1 s + a_2 \bar{s}\,.$$

Přímku jdoucí pólem a mající invariantní směr nazveme *invariantní přímkou* daného zobrazení.

Existují tedy dvě invariantní přímky, tzv. *poláry* zobrazení $\mathscr{A}$ dané rovnicí

$$\mathrm{Im}\,{}^0\bar{s}(z - {}^0 z) = 0\,;$$

přitom ${}^0 z$ je dáno první rovnicí (3), ${}^0 s$ rovnicí (5) a ϱ rovnicí (4). Tyto přímky se reprodukují jako celek s výjimkou jejich průsečíku (pólu), který je pro každou z nich samodružný.

3. Invariantní čáry zobrazení $\mathscr{A}$. Pól a polára jsou nejjednodušší geometrické útvary invariantní v zobrazení $\mathscr{A}$. Existují však invariantní útvary obecnější povahy; ukážeme, jak se určí.

Za předpokladů odst. 1 lze vždy vybrat soustavu S tak, že pól zobrazení splyne s jejím nulovým bodem a poláry s přímkami souřadnic. Rovnice zobrazení $\mathscr{A}$ se tak uvedou na *kanonický tvar*

$$\zeta = \alpha_1 z + \alpha_2 \bar{z} \Leftrightarrow z = \beta_1 \zeta + \beta_2 \bar{\zeta} \tag{6}$$

s reálnými (a podstatnými) parametry α_1, α_2, příp. β_1, β_2; pro reálný tvar rovnic (6) pak plyne

$$\xi_1 = \alpha_{11} x_1\,, \quad \xi_2 = \alpha_{22} x_2 \Leftrightarrow x_1 = \beta_{11} \xi_1\,, \quad x_2 = \beta_{22} \xi_2\,. \tag{6*}$$

Parametry v rovnicích (6), (6*) souvisejí mezi sebou a s charakteristickými hodnotami (4) rovnicemi

$$\alpha_{11} = \alpha_1 + \alpha_2\,, \quad \alpha_{22} = \alpha_1 - \alpha_2\,, \quad \beta_{11} = \beta_1 + \beta_2\,, \quad \beta_{22} = \beta_1 - \beta_2\,,$$
$$\alpha_{ii} = \varrho_i = \beta_{ii}^{-1}\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Zobrazení (6*) přiřazuje čáře $F(x_1, x_2) = 0$ jako originálu čáru $F(\alpha_{11}x_1, \alpha_{22}x_2) = 0$ jako obraz.

Předpokládejme, že rovnici originálu můžeme psát v explicitním tvaru $x_2 = f(x_1)$ (nebo $x_1 = g(x_2)$). Pak nalezneme čáry s touto rovnicí, které mají vlastnost, že se v zobrazení (6*) reprodukují jako celek (tzv. *invariantní čáry* zobrazení) jako řešení funkcionální rovnice

$$\alpha_{22}f(x_1) - f(\alpha_{11}x_1) = 0 \tag{7}$$

(pokud ovšem netriviální řešení existuje).

V případě, že $\alpha_{11} > 0, \alpha_{22} > 0$ uvedeme rovnici (7) substitucí

$$f(x_1) = |x_1|^\alpha h(\log |x_1|), \quad \alpha = \frac{\log \alpha_{22}}{\log \alpha_{11}}$$

na tvar

$$h(\log |x_1| + \log \alpha_{11}) - h(\log |x_1|) = 0,$$

který ukazuje, že řešení rovnice (7) lze psát ve tvaru

$$f = |x_1|^\alpha \varphi(\log |x_1|),$$

kde φ je libovolná spojitá a periodická funkce s periodou $\log \alpha_{11}$.

Výběr $\varphi = 0$ vede na jednu poláru zobrazení (a obdobný výběr pro řešení, které by vycházelo z tvaru $x_1 - g(x_2) = 0$, vede na druhou poláru).

V případě, že $\alpha_{11} > 0, \alpha_{22} < 0$ má řešení rovnice (7) tvar

$$f = |x_1|^\alpha \psi(\log |x_1|), \quad \alpha = \frac{\log |\alpha_{22}|}{\log \alpha_{11}},$$

kde ψ je libovolná spojitá $2 \log \alpha_{11}$-antiperiodická funkce; v případě, že $\alpha_{11} < 0$, $\alpha_{22} \gtrless 0$ má řešení rovnice (7) tvar

$$f = \begin{Bmatrix} \chi(x_1) \\ \alpha_{22}^{-1}\chi(\alpha_{11}x_1) \end{Bmatrix}, \quad \text{jestliže} \begin{matrix} \diagup \; x_1 \geqq 0, \\ \diagdown \; x_1 < 0, \end{matrix}$$

kde χ je libovolná spojitá funkce na intervalu $0 \leqq x_1 < \infty$ (a $\chi(0) = 0$).

4. Grupa $\mathscr{A}_6^2$. Zobrazení zavedená v odst. 1 tvoří *úplnou grupu* $\mathscr{A}_6^2$ (se šesti podstatnými reálnými parametry $\operatorname{Re} a_0, \operatorname{Im} a_0, \ldots, \operatorname{Im} a_2$ a s dvěma reálnými proměnnými $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$) bodových zobrazení reálné afinní roviny na sebe. *Invariantní konfiguraci* jednotlivé transformace této grupy tvoří pól a jím procházející dvojice polár. Upustíme-li od předpokladů, za nichž bylo zobrazení $\mathscr{A}$ zavedeno, vede úplná analytická klasifikace rovinných afinit provedená vzhledem k invariantní konfiguraci k 29 subgrupám grupy $\mathscr{A}_6^2$.

Zdaleka ne všechny geometrie, které je možno na těchto subgrupách v Kleinově smyslu sestrojit, však nás zajímají. V dalším se kromě úplného případu vyjádřeného rovnicemi (1) (tj. případu zobrazení $\mathscr{A}$ s geometrií sestrojenou na grupě $\mathscr{A}_6^2$) budeme zpravidla zajímat jen o tyto dva speciální případy:

a) O zobrazení dané rovnicemi

$$\zeta = a_0 + a_1 z \Leftrightarrow z = b_0 + b_1 \zeta \tag{8}$$

s dvěma podstatnými komplexními parametry a_0, a_1, příp. b_0, b_1.

b) O zobrazení dané rovnicemi

$$\zeta = a_0 + a_1 z\,, \quad a_1 = \exp(-\mathrm{j}\vartheta) \Leftrightarrow z = b_0 + b_1 \zeta\,, \quad b_1 = \exp \mathrm{j}\vartheta \tag{9}$$

s třemi podstatnými reálnými parametry $\operatorname{Re} a_0$, $\operatorname{Im} a_0$, $\arg a_1 = -\vartheta$, příp. $\operatorname{Re} b_0$, $\operatorname{Im} b_0$, $\arg b_1 = \vartheta$.

Vzájemné vztahy mezi a-parametry a b-parametry těchto dvou speciálních afinních zobrazení plynou z rovnic (2) příslušnou specializací.

5. Zobrazení $\mathscr{E}$ a zobrazení $\mathscr{K}$. Zobrazení dané rovnicemi (8) tvoří grupu $\mathscr{A}_4^2$ (s čtyřmi podstatnými reálnými parametry a s dvěma reálnými proměnnými). Geometrii sestrojenou na této grupě lze interpretovat jako reálnou ekviformní rovinnou geometrii. Rovinu, ve které tuto geometrii realizujeme, lze vždy vztáhnout ke kladně orientované soustavě pravoúhlých souřadnic.

Rovnice tohoto zobrazení píšeme obvykle ve tvaru

$$\zeta = \mu + \lambda \nu z \Leftrightarrow z = m + l n \zeta\,. \tag{10}$$

symbolicky

$$\zeta = \mathscr{E} z \Leftrightarrow z = \mathscr{F} \zeta\,.$$

O zobrazení daném první, příp. druhou rovnicí (10) mluvíme pak stručně jako o *zobrazení $\mathscr{E}$*, příp. *zobrazení $\mathscr{F}$*. Vztah parametrů μ, λ, ν, příp. m, l, n k a-parametrům, příp. b-parametrům (a k parametru ϑ) je dán rovnicemi

$$\mu = a_0 \Leftrightarrow m = b_0\,,$$

$$\lambda = \operatorname{mod} a_1 (\lambda > 0) \Leftrightarrow l = \operatorname{mod} b_1 \;(l > 0)\,,$$

$$\nu = \exp \mathrm{j} \arg a_1 = \exp(-\mathrm{j}\vartheta) \Leftrightarrow n = \exp \mathrm{j} \arg b_1 = \exp \mathrm{j}\vartheta\,.$$

Vztahy mezi parametry v (10) jsou dány rovnicemi

$$\mu + \frac{m}{ln} = m + \frac{\mu}{\lambda \nu} = 0\,, \quad \lambda l = \nu n = 1\,. \tag{11}$$

Obě vyjádření (10) jsou rovnocenná, můžeme se proto omezit např. na zobrazení $\mathscr{E}$.

V zobrazení $\mathscr{E}$ existuje pól

$$^0z = \frac{\mu}{1 - \lambda\nu} = \frac{m}{1 - ln} = {}^0\zeta\,;$$

nenulovost jmenovatelů je zaručena předpokladem o podstatnosti parametrů zobrazení.

Rovnice pro ϱ má tvar

$$\varrho^2 - 2\varrho\lambda\cos\vartheta + \lambda^2 = 0\,,\quad \varrho_{1,2} = \lambda\exp(\pm\,\mathrm{j}\vartheta)$$

s diskriminantem $-(\lambda\sin\vartheta)^2$, odkud plyne, že (reálné) poláry neexistují.

V komplexním euklidovském modelu zobrazení $\mathscr{E}$ jsou polárami obě izotropické přímky procházející příslušným pólem.

Zobrazení dané rovnicemi (9) tvoří grupu $\mathscr{A}_3^2$ (s třemi reálnými parametry a s dvěma reálnými proměnnými). Geometrii sestrojenou na této grupě lze interpretovat jako reálnou kongruenční rovinnou geometrii. Rovinu, v níž tuto geometrii realizujeme, lze vždy vztáhnout ke kladně orientované soustavě pravoúhlých souřadnic.

Rovnice tohoto zobrazení píšeme obvykle ve tvaru

$$\zeta = \mu + \nu z \Leftrightarrow z = m + n\zeta\,, \tag{12}$$

symbolicky

$$\zeta = \mathscr{K}z \Leftrightarrow z = \mathscr{L}\zeta\,.$$

O zobrazení daném první, příp. druhou rovnicí (12) mluvíme pak stručně jako o *zobrazení* $\mathscr{K}$, příp. *zobrazení* $\mathscr{L}$. Rovnice (12) plynou formálně z rovnic (10), jestliže v nich položíme $\lambda = 1 \Leftrightarrow l = 1$. Vztahy mezi parametry v (12) jsou tedy dány rovnicemi

$$\mu + \frac{m}{n} = m + \frac{\mu}{\nu} = 0\,,\quad \nu n = 1,\quad (\nu\bar{\nu} = n\bar{n} = 1)\,. \tag{13}$$

Vzhledem k rovnocennosti obou vyjádření (12) můžeme se např. omezit jen na zobrazení $\mathscr{K}$.

V zobrazení $\mathscr{K}$ existuje pól

$$^0z = \frac{\mu}{1 - \nu} = \frac{m}{1 - n} = {}^0\zeta\,;$$

nenulovost jmenovatelů je zaručena předpokladem o podstatnosti parametrů zobrazení. Diskriminant rovnice pro ϱ je $-\sin^2\vartheta$; poláry tedy neexistují. V komplexním euklidovském modelu máme touž invariantní konfiguraci jako v případě zobrazení $\mathscr{E}$.

6. Zobrazení $\mathscr{A}^*$. Základním geometrickým útvarem zobrazení $\mathscr{A}$ byl bod. Vezmeme-li za takový útvar přímku, přejde opět do přímky a docházíme tak k přím-

kovému zobrazení (reálné) roviny na sebe, které je v tomto smyslu *přidružené* (budeme též říkat *duální*) k zobrazení $\mathscr{A}$.

Přímce $2\,\mathrm{Re}\,\bar{z}^*z + \varepsilon = 0$ (tj. přímce (z^*), $z^* \neq 0$ a výběr reálné nenulové konstanty ε máme k dispozici) odpovídá v zobrazení $\mathscr{A}$ přímka $2\,\mathrm{Re}\,\bar{\xi}^*\zeta + \varepsilon = 0$, přičemž komplexy z^*, ζ^* se vyjadřují vzájemně rovnicemi

$$(14) \qquad \zeta^* = \frac{\varepsilon(\bar{b}_1 z^* + b_2 \bar{z}^*)}{\bar{b}_0 z^* + b_0 \bar{z}^* + \varepsilon} \Leftrightarrow z^* = \frac{\varepsilon(\bar{a}_1 \zeta^* + a_2 \bar{\zeta}^*)}{\bar{a}_0 \zeta^* + a_0 \bar{\zeta}^* + \varepsilon},$$

symbolicky

$$\zeta^* = \mathscr{A}^* z^* \Leftrightarrow z^* = \mathscr{B}^* \zeta^*\,.$$

Nenulovost jmenovatelů v (14) zaručíme, když ze zobrazení vyloučíme ty přímky (z^*), příp. (ζ^*), pro které (při daných ε a b_0, příp. a_0) je $2\,\mathrm{Re}\,\bar{b}_0 z^* + \varepsilon = 0$, příp. $2\,\mathrm{Re}\,\bar{a}_0 \zeta^* + \varepsilon = 0$.

O zobrazení $(z^*) \to (\zeta^*)$, příp. $(\zeta^*) \to (z^*)$ budeme stručně mluvit jako o *zobrazení* $\mathscr{A}^*$, příp. *zobrazení* $\mathscr{B}^*$. Obě vyjádření (14) jsou rovnocenná; stačí se proto omezit např. na zobrazení $\mathscr{A}^*$; toto zobrazení je regulární s duálním zobrazením $\mathscr{A}$.

Zobrazení dané rovnicemi (14) tvoří (při pevném ε) grupu $\mathscr{A}^{*2}_6$ (s týmiž podstatnými parametry jako v grupě $\mathscr{A}^2_6$ a s dvěma reálnými proměnnými $\mathrm{Re}\,z^*$, $\mathrm{Im}\,z^*$). Geometrie sestrojená na této grupě, pojaté jako grupa zobrazení bodů $(\mathrm{Re}\,z^*, \mathrm{Im}\,z^*)$ (hodnota $z^* = 0$ je tedy v této interpretaci přípustná) reálné roviny na sebe, není již afinní geometrie. Je to speciální projektivní geometrie (grupa $\mathscr{A}^{*2}_6$ je subgrupou úplné projektivní grupy $\mathscr{P}^2_8$); přitom však rovinu, v níž tuto geometrii realizujeme, vztahujeme k soustavě S afinních souřadnic.

Zobrazení $\mathscr{A}^*$ přiřazuje každé přímce (z^*), která není přímkou svazku $2\,\mathrm{Re}\,\bar{b}_0 z^* + \varepsilon = 0$, přímku (ζ^*) a je

$$\zeta^* = \frac{\varepsilon(\bar{b}_1 z^* + b_2 \bar{z}^*)}{\bar{b}_0 z^* + b_0 \bar{z}^* + \varepsilon}.$$

Invariantní přímka $({}^0z^*)$ tohoto zobrazení (tzv. polára zobrazení $\mathscr{A}^*$) je dána rovnicí ${}^0\zeta^* = {}^0z^*$. Je tedy vzhledem k (14) (pro zjednodušení zápisu vynecháme při z, ζ indexy 0, *)

$$(15) \qquad (\bar{b}_0 z + b_0 \bar{z})\, z - \varepsilon((\bar{b}_1 - 1)\, z + b_2 \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\bar{a}_0 \zeta + a_0 \bar{\zeta})\, \zeta - \varepsilon((\bar{a}_1 - 1)\, \zeta + a_2 \bar{\zeta}) = 0\,.$$

Poněvadž reálnost poláry vyžaduje, aby rovnice (15) byly autokonjugované, je také

$$(15^*) \qquad \bar{b}_2 z^2 + (b_1 - \bar{b}_1)\, z\bar{z} - b_2 \bar{z}^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \bar{a}_2 \zeta^2 + (a_1 - \bar{a}_1)\, \zeta\bar{\zeta} - a_2 \bar{\zeta}^2 = 0\,.$$

Z (15*) plyne

$$\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)_{1,2} = b_2^{-1}\left(-\mathrm{j}\,\mathrm{Im}\,b_1 \pm \left(\mathrm{Re}^2\,b_1 - b\right)^{1/2}\right) = \beta_{1,2} + \mathrm{j}\beta_{1,2}^* =$$

$$= -\beta \Leftrightarrow \left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}}\right)_{1,2} = \alpha_{1,2} + \mathrm{j}\alpha_{1,2}^* = -\alpha$$

($\beta_1, \beta_2, \beta_1^*, \beta_2^*$; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1^*, \alpha_2^*$ reálná; α, β komplexní dvojznačná).

Po dosazení do (15) (indexy při z, ζ opět zavádíme) je

$${}^0z^* = \varepsilon\,\frac{\beta(\bar{b}_1 - 1) - b_2}{\beta\bar{b}_0 - b_0} = \varepsilon\,\frac{\alpha(\bar{a}_1 - 1) - a_2}{\alpha\bar{a}_0 - a_0} = {}^0\zeta^* \,.$$

Protože $b_0 \neq \beta\bar{b}_0 \Leftrightarrow a_0 \neq \alpha\bar{a}_0$ (v opačném případě by bylo $\bar{b}_0{}^0z^* + b_0{}^0\bar{z}^* = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \bar{a}_0{}^0\zeta^* + a_0{}^0\bar{\zeta}^* = 0$, a tedy $b_0 = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0$) a $\mathrm{Re}^2\,b_1 > b \Leftrightarrow \mathrm{Re}^2\,a_1 > a$ (vzhledem k požadavku reálnosti), existují dvě poláry zobrazení $\mathscr{A}^*$.

Poláry (subprojektivního) zobrazení $\mathscr{A}^*$ a poláry duálního (afinního) zobrazení $\mathscr{A}$ jsou ovšem dvě totožné dvojice různých přímek v soustavě S. To umožnuje vyjádřit poláru zobrazení $\mathscr{A}^*$ veličinami, které byly zavedeny v odst. 2. Polára $\mathrm{Im}\,{}^0\bar{s}(z - {}^0z) = 0$ má souřadnici

$${}^0z^* = \varepsilon\,\frac{{}^0s}{{}^0z{}^0\bar{s} - {}^0\bar{z}{}^0s}\,,$$

odkud podle (5) po dosazení plyne

$${}^0z^* = \varepsilon\,\frac{a_2}{{}^0z(\varrho - a_1) - a_2\,{}^0\bar{z}}\,,$$

kde ${}^0z$ je dáno první rovnicí (3) (a ϱ rovnicí (4)); obdobně pro ${}^0\zeta^*$.

7. Zobrazení ${}^c\mathscr{A}$, ${}^c\mathscr{A}^*$; zvláštní případy zobrazení $\mathscr{A}^*$. Předpoklady odst. 1 (a předpoklady odst. 6) zůstávala vyloučená zobrazení $\mathscr{A}$, charakterizovaná rovnicí $a_0 = 0 \Leftrightarrow b_0 = 0$. V tomto případě se rovnice zobrazení zjednoduší na

$$\zeta = a_1z + a_2\bar{z} \Leftrightarrow z = b_1\zeta + b_2\bar{\zeta}\,, \tag{16}$$

symbolicky vyjadřují rovnice

$$\zeta = {}^c\mathscr{A}z \Leftrightarrow z = {}^c\mathscr{B}\zeta\,,$$

tzv. středové zobrazení $\mathscr{A}$ (stručně *zobrazení* ${}^c\mathscr{A}$); střed zobrazení splývá s nulovým bodem O soustavy S. Z (3) plyne ${}^0z = {}^0\zeta = 0$; pól zobrazení splývá se středem zobrazení.

Obráceně z (1) pro $z = {}^0z$, $\zeta = {}^0\zeta$ plyne

$$\zeta - {}^0\zeta = a_1(z - {}^0z) + a_2(\bar{z} - {}^0\bar{z})$$

(a ekvivalentní rovnice v b-parametrech). Vybereme-li soustavu S tak, aby pól splynul s nulovým bodem, dostaneme rovnice tvaru (16). Splynutím pólu se středem pohybu jsou tedy zobrazení ${}^c\mathscr{A}$ charakterizována.

O polárách zobrazení ${}^c\mathscr{A}$ platí pak totéž, co již bylo řečeno o polárách obecného zobrazení $\mathscr{A}$.

Pokud jde o výběr soustavy S máme ještě k dispozici výběr os souřadnic; vezmeme-li za ně obě poláry, dostaneme rovnice zobrazení ve tvaru (6).

V souladu s předpoklady odst. 1 uvažujeme jen obecná zobrazení ${}^c\mathscr{A}$ (a vylučujeme tedy např. středová zobrazení se splývajícími polárami). Tak zobrazení dané rovnicemi (16) tvoří grupu ${}^c\mathscr{A}_4^2$, která je subgrupou úplné grupy $\mathscr{A}_6^2$; geometrii sestrojenou na této grupě lze interpretovat jako reálnou centroafinní rovinnou geometrii.

K zobrazení ${}^c\mathscr{A}$ *duální zobrazení* ${}^c\mathscr{A}^*$ je dáno rovnicemi

$$\zeta^* = \bar{b}_1 z^* + b_2 \bar{z}^* \Leftrightarrow z^* = \bar{a}_1 \zeta^* + a_2 \bar{\zeta}^*, \tag{17}$$

symbolicky

$$\zeta^* = {}^c\mathscr{A}^* z^* \Leftrightarrow z^* = {}^c\mathscr{B}\zeta^*.$$

Pro poláru zobrazení ${}^c\mathscr{A}^*$ podle (15) plyne

$$(\bar{b}_1 - 1)\,{}^0z^* + b_2\,{}^0\bar{z}^* = 0 \Leftrightarrow (\bar{a}_1 - 1)\,{}^0\zeta^* + a_2\,{}^0\bar{\zeta}^* = 0.$$

Z předpokladu obecnosti duálního zobrazení ${}^c\mathscr{A}$ plyne odtud jen ${}^0z^* = {}^0\zeta^* = 0$; podle definice souřadnic z^*, ζ^* v odst. 6 proto polára v zobrazení ${}^c\mathscr{A}^*$ neexistuje. Nic však nebrání tomu, abychom za invariantní přímky tohoto zobrazení přijali poláry přidruženého zobrazení ${}^c\mathscr{A}$.

Zobrazení dané rovnicemi (17) tvoří opět grupu ${}^c\mathscr{A}^{*2}_4$, která je subgrupou grupy $\mathscr{A}^{*2}_6$; geometrie sestrojená na grupě ${}^c\mathscr{A}^{*2}_4$ je izomorfismus geometrie sestrojené na grupě ${}^c\mathscr{A}^2_4$.

K zobrazení $\mathscr{E}$ *duální zobrazení* $\mathscr{E}^*$ je dáno rovnicemi, které dostaneme z (14) pro $b_2 = 0 \Leftrightarrow a_2 = 0$; s označením podle odst. 5 a pro $\varepsilon = 2$ obdržíme

$$\zeta^* = \frac{2l\bar{n}z^*}{\bar{m}z^* + m\bar{z}^* + 2} \Leftrightarrow z^* = \frac{2\lambda\bar{\nu}\zeta^*}{\bar{\mu}\zeta^* + \mu\bar{\zeta}^* + 2}, \tag{18}$$

symbolicky

$$\zeta^* = \mathscr{E}^* z^* \Leftrightarrow z^* = \mathscr{F}^*\zeta^*.$$

Pro poláru zobrazení $\mathscr{E}^*$ podle (15) plyne $(z^* \neq 0)$

$$\bar{m}\,{}^0z^* + m\,{}^0\bar{z}^* - 2(l\bar{n} - 1) = 0 \Leftrightarrow \bar{\mu}\,{}^0\zeta^* + \mu\,{}^0\bar{\zeta}^* - 2(\lambda\bar{\nu} - 1) = 0$$

a z podmínek reálnosti (15*) plyne $n = \bar{n} \Leftrightarrow \nu = \bar{\nu}$. Za předpokladu, že přidružené zobrazení $\mathscr{E}$ je obecné, polára v zobrazení $\mathscr{E}^*$ neexistuje.

Obdobně pro *zobrazení* $\mathscr{K}$, které je dáno rovnicemi

$$(19) \qquad \zeta^* = \frac{2z^* \exp(-j\vartheta)}{\bar{m}z^* + m\bar{z}^* + 2} \Leftrightarrow z^* = \frac{2\zeta^* \exp j\vartheta}{\bar{\mu}\zeta^* + \mu\bar{\zeta}^* + 2},$$

symbolicky

$$\zeta^* = \mathscr{K}^* z^* \Leftrightarrow z^* = \mathscr{L}^* \zeta^* .$$

8. Přemístění $\mathscr{A}$; vzájemné póly přemístění $\mathscr{A}$. Po disjunkci roviny, v níž realizujeme zobrazení (1), na dvě soumístně ležící roviny, obě nejprve vztažené k téže soustavě S, můžeme toto zobrazení kinematicky interpretovat jako *přemístění* $\mathscr{A}$. To přiřazuje útvaru (U) (dané konfiguraci bodů, přímek, ... v (S)) útvar $\mathscr{A}(U)$ (afinně odpovídající konfiguraci bodů, přímek, ... v téže rovině (S)).

Předmětem *diskrétní* (také *finitní*) *afinní kinematiky* je studium konfiguračních vlastností dvou, tří, ... afinně přemístěných útvarů. Přemístění $\mathscr{A}$ je analyticky vyjádřeno týmiž rovnicemi jako zobrazení $\mathscr{A}$ a má všechny vlastnosti tohoto zobrazení. Za předpokladů odst. 1 tvoří tedy přemístění $\mathscr{A}$ úplnou grupu $\mathscr{A}_6^2$ a geometrie těchto přemístění je geometrií sestrojenou na této grupě.

Dvě různá přemístění $\mathscr{A}$, $`\mathscr{A}$ grupy $\mathscr{A}_6^2$ nejsou obecně komutativní. Aby složení $\mathscr{A}`\mathscr{A}$ bylo rovné složení $`\mathscr{A}\mathscr{A}$, je nutné i stačí, když

$$(20) \qquad \begin{aligned} (a_1 - \bar{a}_1)\,`a_2 &= (`a_1 - `\bar{a}_1)\, a_2 ,\\ a_2`\bar{a}_2 &= `a_2\bar{a}_2 ,\\ (a_1 - 1)\,`a_0 + a_2`\bar{a}_0 &= (`a_1 - 1)\, a_0 + `a_2\bar{a}_0 ; \end{aligned}$$

rozborem těchto rovnic se ukazuje, že existuje dvojparametrová grupa přemístění $\mathscr{A}(`a_i)$ komutativní s daným přemístěním $\mathscr{A}(a_i)$.

Pro *přemístění* ${}^c\mathscr{A}$ $(a_0 = `a_0 = 0)$, *přemístění* $\mathscr{E}$ $(a_2 = `a_2 = 0)$ a *přemístění* $\mathscr{K}$ $(a_2 = `a_2 = 0,\ a_1 = \exp(-j\vartheta),\ `a_1 = \exp(-j`\vartheta))$ se rovnice (20) ještě dále zjednoduší (a existuje jednoparametrová grupa $\mathscr{A}(`a_i)$ těchto přemístění). Pokud jde o euklidovskou interpretaci přemístění $\mathscr{E}$, příp. $\mathscr{K}$ v diskrétní ekviformní, příp. kongruenční kinematice, je bezprostřední.

Aby iterace $\mathscr{A}\mathscr{A}$ téhož přemístění $\mathscr{A}$ byla involutorní, je nutné a stačí, když

$$(21) \qquad a_1^2 + a_2\bar{a}_2 = 1 , \quad (a_1 + \bar{a}_1)\, a_2 = 0 , \quad a_0(a_1 + 1) + \bar{a}_0 a_2 = 0 ;$$

rozborem těchto rovnic se ukazuje, že existuje trojparametrová soustava involutorních přemístění $\mathscr{A}(a_i)$.

Pro přemístění ${}^c\mathscr{A}, \mathscr{E}, \mathscr{K}$ se rovnice (21) opět zjednoduší; v ekviformní, příp. kongruenční kinematice máme už jen dvojparametrovou soustavu involutorních přemístění, která jsou složením euklidovské středové souměrnosti a rovnoběžného posunutí.

Z rovnic (1) přemístění $\mathscr{A}$ a z rovnice ${}^0z = {}^0\zeta$, která definuje jeho pól, po zavedení *pólových komplexů*

$$p = z - {}^0z \,, \quad \pi = \zeta - {}^0\zeta$$

plyne

$$\pi = a_1 p + a_2 \bar{p} \Leftrightarrow p = b_1 \pi + b_2 \bar{\pi} \,. \tag{22}$$

To je formálně nejjednodušší analytické vyjádření pro přemístění $\mathscr{A}$. Geometrie přemístění, touto rovnicí vyjádřených, je izomorfismem geometrie přemístění ${}^c\mathscr{A}$. Zároveň je geometrie přemístění (22) také duální geometrií ${}^c\mathscr{A}^*$; jejími základními geometrickými útvary jsou však jen přímky, které procházejí příslušným pólem.

Dvě různá přemístění ${}^1\mathscr{A}$, ${}^2\mathscr{A}$ převádějí útvar (U) ve tři polohy (včetně výchozí polohy) (U), $({}^1U) = {}^1\mathscr{A}(U)$, $({}^2U) = {}^2\mathscr{A}(U)$; ty mají tři *vzájemné póly*. Užitím rovnic (22) plyne vztah mezi třemi vzájemnými pólovými komplexy těchto tří poloh. Pro přemístění $\mathscr{E}$, příp. $\mathscr{K}$ se tento vztah zjednoduší; euklidovská interpretace v diskrétní ekviformní, příp. kongruenční kinematice vede tu k známým vlastnostem tzv. pólového trojúhelníka.

α různých přemístění ${}^1\mathscr{A}$, ${}^2\mathscr{A}, \ldots, {}^\alpha\mathscr{A}$ převádějí útvar (U) v $\alpha + 1$ poloh (včetně výchozí polohy)

$$(U), ({}^1U) = {}^1\mathscr{A}(U) \,, \quad ({}^2U) = {}^2\mathscr{A}(U), \ldots, ({}^\alpha U) = {}^\alpha\mathscr{A}(U) \,;$$

ty mají $\beta = \alpha(\alpha + 1) : 2$ vzájemných pólů.

Jestliže pro těchto α přemístění předepíšeme konfiguraci jejich β vzájemných pólů, sníží se 6α parametrů přemístění o 2β, tj. na $\mu = \alpha(5 - \alpha)$ volných parametrů. Pak však $\nu = \beta - 1$ je počet vzájemných pólů v α přemístěních zmenšený o 1 a za přijatých předpokladů o obecnosti a rozdílnosti přemístění ${}^i\mathscr{A}$ je to zároveň konfigurace ν bodů, které právě určují algebraickou čáru stupně $\alpha - 1$.

Odtud lze vyslovit řadu vlastností o afinních přemístěních; uveďme aspoň jednu:

Pro $\alpha = 5$ máme případ šesti poloh s patnácti vzájemnými póly a žádným volným parametrem. Požadavek, aby čtrnáct a priori daných bodů byly póly pěti přemístění, již také tato přemístění určuje. Na kvartice určené těmito čtrnácti body leží nutně i patnáctý pól. Pětice přemístění, jejichž patnáct vzájemných pólů by bylo a priori dáno, obecně neexistuje.

9. Disjunkce roviny přemístění. Za útvar (U) lze vždy vzít celou rovinu (S); přemístěním $\mathscr{A}(a_i)$ obdržíme jako útvar $\mathscr{A}(U)$ celou rovinu (Σ). Je pak přirozené vztáhnout přemístěný útvar (Σ) k vlastní soustavě souřadnic Σ s nulovým bodem Ω, který v zobrazení $\mathscr{A}$ odpovídá nulovému bodu O (a má tedy v S souřadnici a_0) a s přímkami souřadnic, které v tomto zobrazení odpovídají přímkám souřadnic soustavy S (a mají tedy v S rovnice $(\bar{a}_1 \pm \bar{a}_2)(z - a_0) \mp (a_1 \pm a_2)(\bar{z} - \bar{a}_0) = 0$). Tím disjunkce

roviny, v níž se přemístění realizuje, ve dvě soumístně ležící roviny, je provedena důsledně.

I takto interpretované přemístění $\mathscr{A}$ má ovšem totéž analytické vyjádření jako zobrazení $\mathscr{A}$. Místo obou ekvivalentních zápisů (1) můžeme se nyní omezit na jedinou rovnici, např.

$$z = b_0 + b_1\zeta + b_2\bar{\zeta}\,; \tag{23}$$

tato rovnice vyjadřuje koincidenci (z) jistého bodu (ζ), fixovaného svými souřadnicemi v přemístěné rovině (Σ) (píšeme: $(\zeta) \in_f (\Sigma)$), v původní rovině (S). Má tedy rovnice (23) i ten názorný význam, že vyjadřuje parametry b_i deformovaný útvar (Σ), jak jej vidí pozorovatel, který je pevný v původním útvaru (S). V tomto smyslu mluvíme také o rovnici (23) jako o rovnici *přemístění* Σ/S (určeného parametry b_i).

Z rovnice (23) a rovnice ${}^0z = b_0 + b_1\,{}^0\zeta + b_2\,{}^0\bar{\zeta}$, která z ní plyne pro $\zeta = {}^0\zeta$, obdržíme

$$p = b_1\pi + b_2\bar{\pi}\,; \tag{24}$$

tato rovnice vyjadřuje koincidenci p jistého pólového komplexu π, fixovaného v přemístěné rovině (Σ) $(\pi \in_f (\Sigma))$ výběrem bodu $(\zeta) \in_f (\Sigma)$. V tomto smyslu mluvíme i o této rovnici jako o rovnici přemístění Σ/S (určeného parametry b_i); přemístění jsou tu ovšem podrobeny jen přímky procházející příslušným pólem.

10. Vzájemné póly přemístění Σ/S. Uvažujme dvě obecná a různá přemístění ${}^i\Sigma/S$, ${}^k\Sigma/S$ s rovnicemi

$$ {}^iz = {}^ib_0 + {}^ib_1\zeta + {}^ib_2\bar{\zeta}\,, \quad {}^kz = {}^kb_0 + {}^kb_1\zeta + {}^kb_2\bar{\zeta}\,, \tag{25}$$

obě pro týž bod $(\zeta) \in_f ({}^i\Sigma), ({}^k\Sigma)$.

Položme pro stručnost ${}^iu = {}^iz - {}^ib_0$, ${}^ku = {}^kz - {}^kb_0$ a zaveďme smíšený parametr ${}^{ik}b_2$ dvojice přemístění (25) rovnicí

$${}^{ik}b_2 = -({}^ib_1\,{}^kb_2 - {}^kb_1\,{}^ib_2)\,.$$

Z rovnic (25) plyne

$${}^{ik}\bar{b}_2({}^kb_2\,{}^iu - {}^ib_2\,{}^ku) + {}^{ik}b_2({}^k\bar{b}_1\,{}^i\bar{u} - {}^i\bar{b}_1\,{}^k\bar{u}) = 0$$

a tento vztah se nemění při vzájemné záměně i, k (a tuto invariantní vlastnost mají i všechny důsledky této rovnice).

Zavedeme-li další smíšený parametr

$${}^{ik}b_1 = {}^ib_1{}^k\bar{b}_1 - {}^ib_2{}^k\bar{b}_2\,,$$

plyne z předcházející rovnice

$${}^kb^iu = {}^{ik}b_1{}^ku + {}^{ik}b_2{}^k\bar{u} \Leftrightarrow {}^ib^ku = {}^{ki}b_1{}^iu + {}^{ki}b_2{}^i\bar{u}\,,$$

kde

$$ {}^{i}b = {}^{i}b_1{}^{i}\bar{b}_1 - {}^{i}b_2{}^{i}\bar{b}_2 \,, \quad {}^{k}b = {}^{k}b_1{}^{k}\bar{b}_1 - {}^{k}b_2{}^{k}\bar{b}_2 \,. $$

Označíme-li ještě

$$ {}^{ik}b_0 = {}^{k}b\,{}^{i}b_0 - {}^{ik}b_1{}^{k}b_0 - {}^{ik}b_2{}^{k}\bar{b}_0 \,. $$

pak z předcházející ekvivalence plyne

$$ (26) \qquad {}^{k}b\,{}^{i}z = {}^{ik}b_0 + {}^{ik}b_1{}^{k}z + {}^{ik}b_2{}^{k}\bar{z} \Leftrightarrow {}^{i}b\,{}^{k}z = {}^{ki}b_0 + {}^{ki}b_1{}^{i}z + {}^{ki}b_2{}^{i}\bar{z} \,. $$

Rovnice (26) ukazují, že $({}^{i}\Sigma)$, $({}^{k}\Sigma)$ jsou vzájemná afinní přemístění, jak bylo očekávat (a těmito rovnicemi jsou vyjádřena v soustavě S; parametry přemístění jsou ${}^{k}b^{-1}\,{}^{ik}b_0, \ldots$, příp. ${}^{i}b^{-1}\,{}^{ki}b_0, \ldots$).

Póly přemístění $(S) \leftrightarrow ({}^{i}\Sigma)$, $(S) \leftrightarrow ({}^{k}\Sigma)$, $({}^{i}\Sigma) \leftrightarrow ({}^{k}\Sigma)$ mají v S souřadnice ${}^{i,0}z$, ${}^{k,0}z$, ${}^{ik,0}z = {}^{ki,0}z$, které jsou určeny podle (3) rovnicemi

$$ (27) \qquad {}^{i,0}z = \frac{{}^{i}b_0(1 - {}^{i}\bar{b}_1) + {}^{i}\bar{b}_0{}^{i}b_2}{(1 - {}^{i}b_1)(1 - {}^{i}\bar{b}_1) - {}^{i}b_2{}^{i}\bar{b}_2} \,, $$

$$ {}^{k,0}z = \frac{{}^{k}b_0(1 - {}^{k}\bar{b}_1) + {}^{k}\bar{b}_0{}^{k}b_2}{(1 - {}^{k}b_1)(1 - {}^{k}\bar{b}_1) - {}^{k}b_2{}^{k}\bar{b}_2} \,, $$

$$ {}^{ki,0}z = {}^{i}b^{-1}\,\frac{{}^{ki}b_0({}^{i}b - {}^{ki}\bar{b}_1) + {}^{ki}\bar{b}_0{}^{ki}b_2}{{}^{k}b + {}^{i}b - 2\,\mathrm{Re}\,{}^{ki}b_1} \,. $$

Tyto rovnice také určují vrcholy pólového trojúhelníka v S pomocí parametrů obou přemístění (25).

Z rovnic (25), (27) plyne pak vyjádření tvarem (24):

$$ (26^*) \qquad {}^{k}b\,{}^{i}p = {}^{ik}b_1{}^{k}p + {}^{ik}b_2{}^{k}\bar{p} \Leftrightarrow {}^{i}b\,{}^{k}p = {}^{ki}b_1{}^{i}p + {}^{ki}b_2{}^{i}\bar{p} \,, $$

$$ \left({}^{i}p = {}^{i}z - {}^{ik,0}z \,, \quad {}^{k}p = {}^{k}z - {}^{ik,0}z\right), $$

formálně poněkud jednodušším, než byl tvar (26).

Uvažujeme-li α obecných a různých přemístění ${}^{1}\Sigma/S$, ${}^{2}\Sigma/S, \ldots, {}^{\alpha}\Sigma/S$, dostaneme pro β jejich vzájemných pólů právě β vztahů tvaru (27).

Konfigurační vlastnost

$$ (28) \qquad f({}^{1,0}z, \ldots, {}^{\alpha,0}z \,, \; {}^{12,0}z, \ldots, {}^{1\alpha,0}z, \ldots, {}^{\alpha-1,\alpha,0}z) = 0 \,, \quad f = \bar{f} \,, $$

uložená na tyto póly, je zároveň podmínkou na parametry těchto přemístění.

Např. pro dvě přemístění $\mathscr{K}$ je

$$ {}^{1,0}z = \frac{{}^{1}m}{1 - {}^{1}n} \,, \quad {}^{2,0}z = \frac{{}^{2}m}{1 - {}^{2}n} \,, \quad {}^{12,0}z = \frac{{}^{1}m\,{}^{2}n - {}^{2}m\,{}^{1}n}{{}^{2}n - {}^{1}n} = {}^{21,0}z $$

a požadavek $f = 0$, aby tři vzájemné póly byly kolineární, má tvar

$$\begin{vmatrix} {}^{1,0}z & {}^{1,0}\bar{z} & 1 \\ {}^{2,0}z & {}^{2,0}\bar{z} & 1 \\ {}^{12,0}z & {}^{12,0}\bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Vybereme-li ještě soustavu S tak, aby ${}^{12,0}z = 0$, pak

$$2\left(\arg {}^{1}m - \arg {}^{2}m\right) - \left({}^{1}\vartheta - {}^{2}\vartheta\right) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

je podmínkou na parametry.

Obdobně lze uvažovat o konfigurační vlastnosti $g(p) = 0$, $(g = \bar{g})$ uložené na pólové komplexy.

Předpokládejme, že ve výše uvedených α přemístěních ${}^{i}\Sigma/S$ existuje konfigurační vlastnost

$$h({}^{12}v, {}^{13}v, \ldots, {}^{1\alpha}v, {}^{23}v, \ldots, {}^{\alpha-1,\alpha}v) = 0\,, \quad h = \bar{h}\,, \tag{29}$$

uložená na rozdíly komplexů ${}^{ik}v = {}^{i}z - {}^{k}z$ (kde ${}^{ik}v + {}^{ki}v = 0$); pak také

$$h({}^{1}b_0 - {}^{2}b_0 + ({}^{1}b_1 - {}^{2}b_1)\,\zeta + ({}^{1}b_2 - {}^{2}b_2)\,\bar{\zeta}, \ldots) = 0\,. \tag{29*}$$

Přitom $({}^{1}z), \ldots, ({}^{\alpha}z)$ jsou koincidence v (S) téhož bodu $(\zeta) \in_f ({}^{1}\Sigma), ({}^{2}\Sigma), \ldots, ({}^{\alpha}\Sigma)$. Existuje-li tedy takový bod (ζ) v rovinách $({}^{1}\Sigma), \ldots, ({}^{\alpha}\Sigma)$, že jeho koincidence $({}^{1}z), \ldots, ({}^{\alpha}z)$ v (S) mají vlastnost (29), pak touž vlastnost v každé $({}^{1}\Sigma), \ldots, ({}^{\alpha}\Sigma)$ mají i body čáry s rovnicí (29*).

Např. pro čtyři přemístění $\mathscr{K}$ a požadavek $h = 0$, aby (v euklidovském modelu) čtyři koincidence $({}^{1}z), ({}^{2}z), ({}^{3}z), ({}^{4}z)$ byly koncyklické, plyne z rovnosti komplexního dvojpoměru $w({}^{1}z, {}^{2}z, {}^{3}z, {}^{4}z)$ se sdruženým dvojpoměrem $\bar{w}({}^{1}z, {}^{2}z, {}^{3}z, {}^{4}z)$ této bodové čtveřice vztah

$$\operatorname{Im} \frac{{}^{13}v\,{}^{24}v}{{}^{23}v\,{}^{14}v} = 0\,.$$

Rozepsáním této rovnice obdržíme kubiku jako geometrické místo bodů (ζ) v každé z rovin $({}^{1}\Sigma), ({}^{2}\Sigma), ({}^{3}\Sigma), ({}^{4}\Sigma)$.

11. Pohyb $\mathscr{A}$. Učiňme trojici parametrů b_i přemístění (23) funkcemi $b_i(t)$, $i = 0, 1, 2$ reálného argumentu t, *času*, nejprve jen spojitých na společném definičním intervalu $J(t)$. Každá hodnota $t \in J$ určuje pak jednu trojici funkčních hodnot $b_i(t)$, tj. jedno přemístění Σ/S (jednu *fázi* t) z možných přemístění. Všemi hodnotami $t \in J$ (tj. na J) je tak určeno nekonečně mnoho spojitě na sebe navazujících fází t, čili je určen *jednoparametrový* (také *nucený*; s parametrem t) *afinní pohyb* Σ/S (pohyb $\mathscr{A}$; s *kinematickými parametry* $b_i(t)$).

V reálném euklidovském modelu pohybu $\mathscr{A}$ jde tedy o rovinnou konfiguraci bodů, přímek, ..., která se deformuje ve své rovině a fyzikálním čase tak, že všechny její fáze jsou na jistém časovém intervalu navzájem afinní.

Rovnice (23), kterou nyní zapíšeme ve tvaru

$$z = b_0(t) + b_1(t)\,\zeta + b_2(t)\,\bar{\zeta}\,, \tag{30}$$

vyjadřuje opět jen koincidenci (z) jistého bodu (ζ), fixovaného svou souřadnicí ζ ve fázi t v „pohyblivé“ rovině (Σ) $((\zeta) \in_f (\Sigma)$ na $J)$, v „pevné“ rovině (S), tj. vyjadřuje parametry $b_i(t)$, $t \in J$, afinně deformovaný útvar (Σ), vztažený k příslušné fázové soustavě Σ, jak jej vidí pozorovatel pevný v (S), vztažené k pevné soustavě S. Platnost rovnice (30) rozšíříme na celý definiční interval J a v tomto smyslu mluvíme také o této rovnici jako o *rovnici pohybu* $\mathscr{A}$ (Σ/S) určeného kinematickými parametry $b_i(t)$.

Zajímáme-li se o vlastnosti pohybu $\mathscr{A}$, které plynou bezprostředně z rovnice (30), pak předpokládáme, že tento pohyb je aspoň *slabě* 0-*regulární* na J, tj. že

$$b(t) \neq 0 \quad \text{na} \quad J \Leftrightarrow a(t) \neq 0 \quad \text{na} \quad J\,, \tag{31}$$

$$b(t) = b_1(t)\,\bar{b}_1(t) - b_2(t)\,\bar{b}_2(t)\,, \quad a(t) = a_1(t)\,\bar{a}_1(t) - a_2(t)\,\bar{a}_2(t)\,.$$

V případě obecného pohybu $\mathscr{A}$ pak mlčky ještě předpokládáme, že žádný z parametrů $b_i(t)$ (nebo $a_i(t)$) nevymizí na J a že neexistují mezi nimi vztahy, které by jejich počet snižovaly.

Pokud by zkoumané vlastnosti pohybu $\mathscr{A}$ vyžadovaly existenci prvních časových derivací $b_0^{\bullet}(t)$, $b_1^{\bullet}(t)$, $b_2^{\bullet}(t)$ na J, předpokládáme, že tento pohyb je aspoň *silně* 0-*regulární* na J (tj. platí (31) a požadované první derivace existují).

Vyšetřujeme-li vlastnosti pohybu $\mathscr{A}$, které závisejí na jednou derivované rovnici (30), pak předpokládáme, že tento pohyb je aspoň *slabě* 1-*regulární* na J, tj. že

$$b(t)\,{}^1b(t) \neq 0 \ \text{na} \ J \Leftrightarrow a(t)\,{}^1a(t) \neq 0 \ \text{na} \ J\,, \tag{31*}$$

$${}^1b(t) = b_1^{\bullet}(t)\,\bar{b}_1^{\bullet}(t) - b_2^{\bullet}(t)\,\bar{b}_2^{\bullet}(t)\,, \quad {}^1a(t) = a_1^{\bullet}(t)\,\bar{a}_1^{\bullet}(t) - a_2^{\bullet}(t)\,\bar{a}_2^{\bullet}(t)\,.$$

V obecném případě pak o $b_i(t)$ (nebo $a_i(t)$) činíme rovněž mlčky tytéž předpoklady jako př. 0-regularitě.

V případě, že by hledané vlastnosti pohybu $\mathscr{A}$ vyžadovaly existenci druhých časových derivací $b_0^{\bullet\bullet}(t)$, $b_1^{\bullet\bullet}(t)$, $b_2^{\bullet\bullet}(t)$ na J, pak předpokládáme, že tento pohyb je aspoň *silně* 1-*regulární* na J, tj. platí (31*) a požadované druhé derivace existují, atd.

Při odpovídajícím rozšíření předpokladů vyjadřuje rovnice (30) Lieovu šestiparametrovou grupu ve dvou proměnných (Re b_0, ..., Im b_2; Re z, Imz). Geometrie pohybu $\mathscr{A}$ je Lieovou geometrií s touto grupou. V afinní kinematice se o takto pojatou geometrii nezajímáme; předmětem úvah jsou obvykle fázové vlastnosti pohybu a příslušná geometrie má lokální charakter.

Podrobnější vlastnosti pohybu $\mathscr{A}$ nejsou však již předmětem tohoto článku.

12. Bibliografické poznámky. V úvodu zmíněné články jsou: Vyšín J., *Afinní zobrazení v rovině;* PMFA *1* (1956), str. 520—551 (poněkud ve zkrácené formě znovu : Vyšín J., *Vybrané stati z elementární geometrie;* učební text přírodovědecké fakulty vysoké školy pedagogické v Praze, SPN 1959, str. 5—42); Šindelář K., *Kuželosečky;* PMFA *4* (1959), str. 145—156 a od téhož autora *Kvadratické plochy,* PMFA *4* (1959), str. 289—301; Klucký D., *Afinity v třírozměrném afinním prostoru,* PMFA *5* (1960), str. 41—52, 147—157.

Pojem invariantních čar (odst. 3) zaveden podle Kuczma M., *Functional equations in a single variable;* PWN Warszawa, 1968, str. 274—287; k řešení funkcionálních rovnic, které se tu vyskytují, viz Lattès S., *Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariable par une transformation;* Ann. Mat. pura ed appl. (Milano), (3) *13* (1907), str. 1—138 (zvl. str. 27—29).

Analytickou klasifikaci afinit v rovině (odst. 4) provádí Komissaruk A. M., *Osnovy affinnoj geometrii na ploskosti;* Vysšaja škola, Minsk 1967, str. 190—218.

Ruský překlad tzv. erlangenského programu (Kleinova principu) najde se např. ve sborníku *Ob osnovanijach geometrii* (red. A. P. Norden, Moskva 1956), str. 399—434.

Komplexní zápis zobrazení, příp. přemístění, příp. pohybu $\mathscr{K}$ v rovině (odst. 5) zaveden a využit v knize Pírko Z., *Úvod do kinematické geometrie,* SNTL Praha, 1968; pro základy analytické rovinné geometrie v komplexních souřadnicích je vhodný Carver W. B., *The conjugate coordinate system for plane euclidean geometry;* Supplement to the Amer. Math. Monthly, *63* (1956), str. 1—86.

K vlastnostem přemístění $\mathscr{K}$, zejména k jejich euklidovské interpretaci (odst. 10) viz Artobolevskij J. J. a spolupr., *Sintěz ploskich mechanizmov;* Moskva 1959, str. 727—805. O komplexním dvojpoměru a jeho aplikaci v knize Jaglom J. M., *Kompleksnyje čisla i jich primeněnie v geometrii;* Moskva 1963, str. 38—83.

Pro základy algebraické a kinematické geometrie lze jako nejvhodnější doporučit Geronimus Ja. L., *Geometričeskij apparat těorii sintěza ploskich mechanizmov;* Moskva 1962. O významu kubiky uvedené v odst. 10 viz více Geise G., *Eine analytische Behandlung der Mittelpunktkurve;* Maschinenbautechnik [Getriebetechnik] *10* (1961), str. 333—336 [G 53—G 56].

DIFRAKCE POMALÝCH ELEKTRONŮ

Mojmír Láznička, Praha

ÚVOD

Metoda difrakce pomalých elektronů (dále DPE) vznikla na základě prací Davissona a Germera [1], kteří studovali rozptyl elektronů o energii řádově sto elektronvoltů (eV), tzv. pomalých elektronů, při odrazu na kovech. Vzhledem ke klasickým představám vykazovaly elektrony anomální chování, které se uvedeným autorům podařilo v r. 1927 vysvětlit jako difrakční jevy a potvrdit de Broglieho hypotézu o vlnové podstatě elektronu, podle níž lze každé pohybující se částici připsat vlnu