Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Ladislav Hlavatý

Solitonová řešení a metoda obráceného rozptylu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 34 (1989), No. 4, 233--243

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139150`

[15] Mestel, L., Robertson, J. A., Wang, Y.-M., Westfold, K. C.: Mon. Not. R. astr. Soc. *217* (1985), 443.
[16] Sturrock, P. A.: Ap. J. *164* (1971), 529.
[17] Sturrock, P. A., Baker, K., Turk, J. S.: Ap. J. *206* (1976), 273.
[18] Fujimura, F. S., Kennel, C. F.: Ap. J. *236* (1980), 245.
[19] Radhakrishnan, V., in: Swings, J.-P. (ed.): Highlights of Astronomy *7* (1986), 3.
[20] Radhakrishnan, V., Cooke, D. J.: Ap. J. Lett. *3* (1969), 225.
[21] Blandford, R. D.: Mon. Not. R. astr. Soc. *176* (1976), 465.
[22] Ginzburg, V. L., Zheleznyakov, V. V.: Ann. Rev. Astron. Astrophys. *13* (1975), 511.
[23] Rees, M. J., Begelman, M. C., Blandford, R. D., Phinney, E. S.: Nature *295* (1982), 17.
[24] Blandford, R. D., Znajek, R. L.: Mon. Not. R. astr. Soc. *179* (1977), 433.
[25] Downs, G. S.: Ap. J. *249* (1981), 687.
[26] Shapiro, S. L., Teukolski, S. A.: *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars.* John Wiley and Sons (1983).

Solitonová řešení a metoda obráceného rozptylu

Ladislav Hlavatý, Praha

Předkládaný text je rámcovou informací o metodě řešení nelineárních parciálních diferenciálních rovnic (NLPDR), která v posledních dvaceti letech získala značnou popularitu mezi fyziky i matematiky, zejména díky své schopnosti poskytovat tzv. solitonová řešení.

Vlivem kvantové teorie a jejího superpozičního principu se v minulých desetiletích intenzivně zkoumaly lineární systémy, tj. lineární prostory, lineární reprezentace atd., takže se zdálo, že pro popis fyzikálních systémů není jiných zapotřebí. Úspěchy poruchové teorie v kvantové elektrodynamice tento dojem jen potvrzovaly.

Pojem solitonu, jakožto lokalizovaného objektu stabilního vůči srážkám, se poprvé objevil v roce 1965 [1] (pomineme-li pro současný vývoj nedůležitá pozorování J. S. Russela v minulém století). Uplatnil se [2] ve fyzice plazmatu, hydrodynamice, nelineární optice, pevných látkách [3] i ve fyzice elementárních částic [4]. V současné době jsou známa solitonová řešení pro řadu fyzikálně důležitých rovnic a důležitost těchto řešení tkví mimo jiné v tom, že je nelze obdržet poruchovou metodou. Mohou tedy být užitečná při popisu jevů, které nelze vysvětlit linearizovanými rovnicemi.

Slovo soliton je v současné době používáno v různých kontextech a účelem tohoto článku je mimo jiné přispět k jeho objasnění. Pro definici solitonu budeme potřebovat pojmy metody obrácené úlohy rozptylu (MOUR), a proto se budeme věnovat především jí.

Vzhledem k tomu, že o této problematice existuje již celá řada monografií a přehledů (viz např. [5] – [9]) a celá metoda je poměrně složitá, nehodlám se zde věnovat všem jejím detailům a variantám, nýbrž jen upozorním na její existenci, hlavní rysy, výhody a omezení. Další informace může čtenář získat studiem uvedených monografií.

Většina výkladu bude pro názornost provedena či ilustrována na příkladě Kortewegovy de Vriesovy rovnice

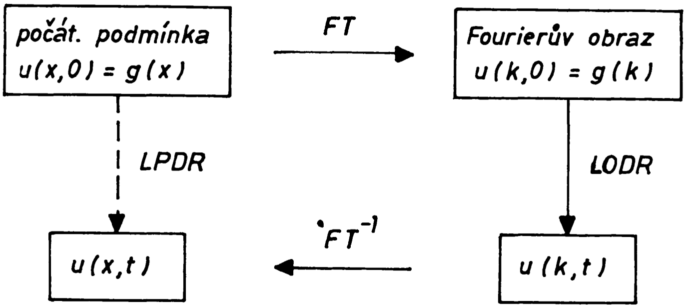
$$u_t + u_{xxx} - 6u_x u = 0 \tag{0.1}$$

(indexy představují parciální derivace podle příslušných proměnných), která byla v roce 1967 jako první touto metodou řešena [10].

1. Základní schéma a prvky MOURu

MOUR není samozřejmě jedinou metodou pro řešení NLPDR, ale, pokud vím, je to jediná metoda, která pro některé evoluční NLPDR je schopna řešit Cauchyho úlohu tj. nalézá řešení, které v daném čase je rovno předem zvoleným počátečním podmínkám.

Je užitečné si připomenout, že pro LPDR s konstantními koeficienty se tato úloha řeší pomocí Fourierovy transformace (FT) podle schématu na obr. 1.



Obr. 1.
Schéma Fourierovy metody.

Tento postup je založen především na tom, že (na čase nezávislá) FT převádí LPDR na nekonečný systém vzájemně nesvázaných lineárních obyčejných diferenciálních rovnic (LODR) určujících časový vývoj Fourierových obrazů, které lze snadno řešit. Inverzní Fourierovou transformací pak dostaneme řešení Cauchyho problému.

Příklad: řešení Cauchyho problému pro linearizovanou KdV rovnici

$$u_t + u_{xxx} = 0 \tag{1.1}$$

a počáteční podmínku danou funkcí $g(x)$ je

$$u(x, t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' \exp\left[-\mathrm{i}k(x - x') + \mathrm{i}k^3(t - t_0)\right] g(x') . \tag{1.2}$$

Je zřejmé, že podmínkou použitelnosti této metody je existence Fourierových integrálů, což omezuje možné třídy řešení a počátečních podmínek.

Tato dobře známá fakta zde uvádím proto, že MOUR má mnoho společných rysů s metodou FT. Základní rozdíl tkví v tom, že pro NLPDR není a priori jasné, jakou transformaci použít a zda pro zvolenou rovnici vůbec nějaká existuje. Hlavní nevýhodou

MOURu tedy je, že není zřejmé, které rovnice jí lze řešit a které nikoli. Odpověď na tuto otázku se pokouší dát tzv. Painlevého analýza [11], [12]; bohužel zatím její výsledky není možno považovat za spolehlivý test řešitelnosti.

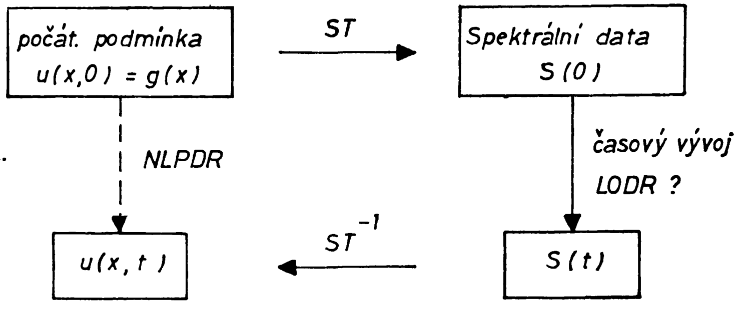
Základní kroky MOURu je možno sestavit do podobného diagramu jako pro LPDR (viz obr. 2), kde, jak je zřejmé, úlohu FT přebírá (zatím nedefinovaná) spektrální transformace (ST), kterou je nutno nalézt tak, aby

1. časový vývoj určený transformovanou rovnicí byl tak jednoduchý, abychom jej uměli řešit (nejlépe opět nesvázané obyčejné diferenciální rovnice).

2. tato transformace byla invertibilní, což je (jako u FT) problém vhodného výběru třídy funkcí, ve které chceme rovnici řešit.

Je historickou zásluhou autorů [10], že ukázali, že pro KdV rovnici takováto transformace existuje. V dalších letech se ukázalo, že podobně lze řešit i další NLPDR ([13], [14]), což dalo impuls k rozvoji solitonové fyziky a matematiky. V současné době jsou známy desítky takto řešitelných (systémů) rovnic, a to většinou v jednom časovém a v jednom prostorovém rozměru.

Důvod, proč se tato transformace nazývá „spektrální" a transformované funkce „spektrální data" je víceméně historický a vyplyne z dalšího výkladu.



Obr. 2. Schéma MOURu.

2. Spektrální transformace

Začněme výsledkem. Pro KdV rovnici je spektrální transformace určena přechodem od reálné funkce $u(x, t)$ ke komplexním funkcím $a(k, t)$, $b(k, t)$, $k \in R$. (Protože při této transformaci podobně jako při FT vystupuje proměnná t pouze jako parametr, nebudeme ji až do kap. 5 explicitně vypisovat.)

(2.1a)
$$a(k) := 1 - (2ik)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \int\int \ldots \int_{x_1 > x_2 \ldots > x_n} dx_1 \ldots dx_n$$
$$u(x_1)\, E(k, x_1 - x_2)\, u(x_2) \ldots u(x_{n-1})\, E(k, x_{n-1} - x_n)\, u(x_n) \, .$$

(2.1b)
$$b(k) := (2ik)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \int\int \ldots \int_{x_1 > x_2 \ldots > x_n} dx_1 \ldots dx_n \, e^{-2ikx_1}$$
$$u(x_1)\, E(k, x_1 - x_2)\, u(x_2) \ldots u(x_{n-1})\, E(k, x_{n-1} - x_n)\, u(x_n) \, ,$$

kde

$$E(k, x) := (2ik)^{-1} (e^{2ikx} - 1) . \tag{2.2}$$

Výrazy na pravé straně (2.1) existují, pokud

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) u(x) \, dx < \infty , \tag{2.3}$$

což je důležité omezení na třídu funkcí, pro kterou řešíme původní Cauchyho úlohu. Mimo jiné to znamená, že $u(x) \to 0$ pro $x \to \pm\infty$.

Funkce $a(k)$, $b(k)$ sice ještě nejsou hledaná spektrální data, ale mají k nim již blízko. Poznamenejme, že pro linearizovanou KdV rovnici, tj. omezíme-li se na nejnižší členy v $u(x, t)$, je $a(k) = 1$ a $b(k)$ je FT funkce $u(x)$. Na první pohled se zdá, že jsme takto podstatně zvětšili „počet stupňů volnosti problému", avšak není tomu tak, neboť $a(k)$ a $b(k)$ nejsou nezávislé. Platí totiž

$$|a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1 , \tag{2.4}$$

$\bar{a}(k) = a(-k)$, $\bar{b}(k) = b(-k)$ a navíc se v dalším ukáže, že relevantní je pouze podíl $r(k) := b(k)/a(k)$. Důležité je, že právě definované funkce $a(k)$, $b(k)$ splňují požadavek 1. z předchozí kapitoly, tzn. mají jednoduchý časový vývoj. Jak ukážeme později, vyvíjí-li se $u(x, t)$ v čase podle (0.1), pak

$$a(k, t) = a(k, 0) , \quad b(k, t) = b(k, 0) \exp (8ik^2 t) . \tag{2.5}$$

Jak už jsem poznamenal v úvodu, tvar spektrální transformace není určen předem. Její odvození vychází z možnosti zapsat zkoumanou rovnici jako podmínku integrability jiného systému lineárních rovnic určeného parametrem k a (jakoby známým) řešením zkoumané rovnice.

Příklad: Každý si snadno ověří, že splňuje-li $f(x, t)$ soustavu rovnic

$$f_{xx} = [u(x, t) - k^2] f , \tag{2.6}$$

$$-f_t = (4\partial_{xxx}^3 - 6u \, \partial_x - 3u_x) f , \tag{2.7}$$

pak z podmínky $f_{xxt} = f_{txx}$ plyne KdV rovnice (0.1).

Podmínku integrability lze charakterizovat též pomocí tzv. Laxova páru operátorů nebo jako podmínku nulové křivosti jakési variety, ale to pro účely tohoto úvodního textu není důležité.

Nalezení Laxova páru pro danou diferenciální rovnici je nejobtížnější a nejméně probádanou částí celé metody. Pokud vím, neexistuje žádný čistě algoritmický postup pro jeho odvození.

Všimněme si, že v rovnici (2.6) proměnná t (čas) vystupuje pouze jako parametr. Tato lineární rovnice je fyzikům a matematikům dobře známa jako Schrödingerova bezčasová rovnice neboli Sturmův-Liouvillův spektrální problém a množství výsledků, které byly v souvislosti s jejich řešením známy, vedly k získání ST pro KdV.

Souvislost původní Cauchyho úlohy s rovnicí (2.6) tkví v tom, že řešení KdV vystupuje v (2.6) jako „potenciál kvantově mechanického systému". Fyzikálně nanejvýš důležitá úloha je určení potenciálu $u(x)$ (t je zde pouze parametrem) z měřitelných dat kvantového systému. Tato úloha, nazývaná obrácenou úlohou rozptylu, byla řešena v padesátých letech Gelfandem, Levitanem a Marčenkem, kteří zodpověděli otázku: Které údaje o rozptylu kvantově mechanických částic potřebujeme, abychom jednoznačně mohli určit působící potenciál? Přímou úlohou rozptylu nazýváme určení těchto rozptylových (a dalších) údajů ze znalosti potenciálu.

Ukazuje se, že přechod od potenciálu ke spektrálním datům (tj. rozptylovým datům a údajům o vázaných stavech) a zpět je právě onou transformací, která je analogem FT pro KdV rovnici. Na tomto místě chci podotknout, že podle mého názoru neexistuje žádný hlubší důvod, proč se zde objeví rovnice vyskytující se též v kvantové mechanice. Pro jiné Cauchyho problémy dostaneme jiné lineární rovnice, nicméně termíny jako spektrální data, potenciál atd. se používají i tam.

Abychom vyjasnili, jak se odvozuje spektrální transformace z rovnice (2.6), zabývejme se některými jejími řešeními. Jde o rovnici druhého řádu, takže (pro každé k) se fundamentální systémy skládají ze dvou řešení. Speciálními případy jsou tzv. Jostova řešení, což jsou řešení určená podmínkami v $\pm\infty$.

$$\phi(x, k) = e^{-ikx} + O(1/x) \quad \text{pro} \quad x \to -\infty, k \in R, \tag{2.8}$$

$$\psi(x, k) = e^{ikx} + O(1/x) \quad \text{pro} \quad x \to +\infty, k \in R. \tag{2.9}$$

Dvojice $\phi(x, k)$, $\bar{\phi}(x, k)$ a $\psi(x, k)$, $\bar{\psi}(x, k)$ jsou fundamentální systémy řešení, takže mezi nimi musí existovat lineární vztah

$$\phi(x, k) = a(k)\,\bar{\psi}(x, k) + b(k)\,\psi(x, k), \tag{2.10a}$$

$$\bar{\phi}(x, k) = \bar{a}(k)\,\psi(x, k) + \bar{b}(k)\,\bar{\psi}(x, k). \tag{2.10b}$$

Z podmínek (2.8), (2.9) a rovnice (2.6) lze odvodit integrální lineární rovnice pro $\phi(x, k)$ a $\psi(x, k)$ (Volterovy rovnice druhého druhu)

$$\phi(x, k) = e^{-ikx} - k^{-1} \int_{-\infty}^{x} dy\, u(y) \sin k(y - x)\, \phi(y, k), \tag{2.11}$$

$$\psi(x, k) = e^{+ikx} + k^{-1} \int_{x}^{\infty} dy\, u(y) \sin k(y - x)\, \psi(y, k), \tag{2.12}$$

které lze řešit iterací

$$e^{ikx} \phi(x, k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{x} dx_1 \int_{-\infty}^{x_1} dx_2 \ldots \int_{-\infty}^{x_{n-1}} dx_n \times \\ \times E(k, x - x_1)\, u(x_1)\, E(k, x_1 - x_2)\, u(x_2) \ldots E(k, x_{n-1} - x_n)\, u(x_n). \tag{2.13}$$

$$e^{-ikx} \psi(x, k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x}^{\infty} dx_1 \int_{x_1}^{\infty} dx_2 \ldots \int_{x_{n-1}}^{\infty} dx_n \times \\ \times u(x_n)\, E(k, x_n - x_{n-1})\, u(x_{n-1})\, E(k, x_{n-1} - x_{n-2}) \ldots u(x_1)\, E(k, x_1 - x). \tag{2.14}$$

Z asymptotiky $\phi(x, k)$ a $\psi(x, k)$ pro $x \to \pm\infty$ a vztahu (2.10) dostaneme vyjádření koeficientů $a(k)$, $b(k)$ ve tvaru (2.1) a (2.2). V kvantově mechanické teorii rozptylu lze $t(k) := 1/a(k)$ a $r(k) := b(k)/a(k)$ interpretovat jako koeficienty odrazu a průchodu potenciálem $u(x)$. Kvantově mechanický stav popsaný funkcí $\phi(x, k)/a(k)$ má totiž asymptotické chování popsané obrázkem 3. Tento stav v $+\infty$ tedy vypadá jako superpozice dopadající vlny (s koeficientem 1) a vlny odražené (s koeficientem $r(k)$), zatímco v $-\infty$ vypadá jako vlna prošlá (s koeficientem $t(k)$). Pro řešení NLPDR nemá tato interpretace žádný význam, ale uvádím ji zde jen proto, že je to běžná hantýrka MOURu. Určení koeficientů $a(k)$, $b(k)$ pro zadaný potenciál $u(x)$ je tedy součástí řešení přímé úlohy rozptylu.

Obr. 3. Potenciál $u(x)$ a asymptotické chování $\phi(x, k)/a(k)$.

3. Spektrální data

Uveďme zde stručně důležité vlastnosti funkcí $a(k)$ a $b(k)$, které nám v dalším budou užitečné.

1. $a(k)$ a $b(k)$ jsou spojitými funkcemi $k \in R$.
2. Lze je vyjádřit pomocí wronskiánu Jostových řešení. Např.

$$2ik\, a(k) = W[\phi(x, k), \psi(x, k)] := \phi\psi_x - \psi\phi_x . \tag{3.1}$$

3. Pro $k \in R$ platí (2.4).
4. $a(k)$ lze analyticky prodloužit do horní poloroviny C (Im $k > 0$).

Je známo, že vedle rozptylových charakteristik potenciálu $u(x)$ jsou důležité i hodnoty energie vázaných stavů, tzn. bodové spektrum příslušného Sturmova-Liouvillova operátoru. Ty souvisí s nulami $a(k)$, neboť je-li $a(k_j) = 0$, pak z (3.1) plyne, že $\phi(x, k_j)$ a $\psi(x, k_j)$ jsou lineárně závislé a

$$\underset{-\infty \leftarrow x}{e^{-ik_jx} \leftarrow} \phi(x, k_j) = b_j\, \psi(x, k_j) \underset{x \to +\infty}{\to b_j\, e^{+ik_jx}} . \tag{3.2}$$

Díky (2.4) je Im $k_j > 0$, takže z (3.2) plyne, že $\phi(x, k_j)$ je kvadraticky integrovatelná funkce, a je tedy vlastní funkcí Sturmova-Liouvillova operátoru s vlastní hodnotou $(k_j)^2$.

Tyto vlastní hodnoty k_j mají následující vlastnosti (viz např. [5]):

1. Je jich konečně mnoho, tj. $j = 1, \ldots, N$.
2. Re $k_j = 0$.
3. Jsou prostými nulami $a(k)$, tj. $k_j \neq k_m$ pro $m \neq j$.
4. Pro normalizační koeficient funkce $\psi(x, k_j)$ platí

$$(c_j)^{-1} := \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x, k_j)|^2 = i(b_j)^{-1} \frac{d}{dk} a(k)|_{k=k_j} . \tag{3.3}$$

Spektrálními daty nazveme pak množinu

(3.4) $$S := \{r(k), k_j, c_j\}\,, \quad k \in R\,, \quad j = 1, \ldots, N\,.$$

Důvodem pro tento výběr spektrálních dat je, že existuje jednojednoznačná korespondence mezi S a potenciálem u. Přechod od u k S jsme naznačili v této a předchozí kapitole. Obrácenou transformaci popíšeme v následující kapitole.

4. Obrácená úloha rozptylu

Předpokládejme, že jsou zadána spektrální data (3.4) a naší úlohou je určit jim odpovídající potenciál.

Všimněme si, že z iteračního rozvoje (2.14) dostáváme

(4.1) $$\psi(x, k)\, e^{-ikx} = 1 - (2ik)^{-1} \int_x^\infty u(y)\, dy + O(k^{-2})\,,$$

takže

(4.2) $$u(x) = \frac{d}{dx} \lim_{k \to \pm\infty} 2ik[\psi(x, k)\, e^{-ikx} - 1]\,.$$

K určení $\psi(x, k)$ z rozptylových dat podstatně využijeme analytických vlastností $a(k)$ a $\phi(x, k)$, $\psi(x, k)$.

Definujme si funkci $k \in C$ (x je zde zatím jako parametr)

(4.3) $$G(x, k) := \begin{cases} a(k)^{-1}\, \phi(x, k)\, e^{ikx} & \text{pro} \quad \operatorname{Im} k > 0\,, \\ \bar{\psi}(x, \bar{k})\, e^{ikx} & \text{pro} \quad \operatorname{Im} k < 0 \end{cases}$$

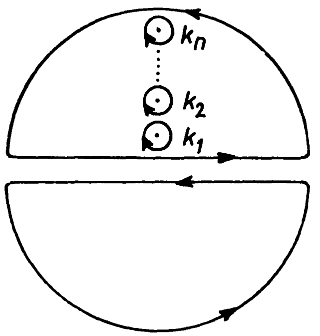
a naší úlohou je její určení z hodnot skoku na reálné ose a reziduí v pólech k_j. Tato funkce je analytická mimo R a k_j, $j = 1, \ldots, N$. Podle Cauchyho integrální formule

(4.4) $$G(x, k) = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma dk\, G(x, k')\, (k' - k)^{-1}\,.$$

Provedeme-li integraci přes „oblouky v ∞" a „kroužky okolo k_j", dostaneme

(4.5) $$G(x, k) = 1 + \sum_{j=1}^{N} G_j(x)\, (k - k_j)^{-1} + (2\pi i)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dk' [G(x, k' + i0) - G(x, k' - i0)]\, (k' - k)^{-1}\,,$$

kde hodnoty reziduí a skoku jsou díky (3.2), (3.3) a (2.10)



Obr. 4. Integrační cesta Γ integrálu (4.4).

$$(4.6) \qquad G_j(x) = \mathrm{i}c_j\,\mathrm{e}^{-2\varkappa_j x}\,G(x, -k_j)\,,$$

$$(4.7) \qquad G(x, k + \mathrm{i}0) - G(x, k - \mathrm{i}0) = a(k)^{-1}\,\phi(x, k)\,\mathrm{e}^{+ikx} - \bar{\psi}(x, k)\,\mathrm{e}^{+ikx} = = r(k)\,\psi(x, k)\,\mathrm{e}^{+ikx}\,.$$

Rovnost (4.5) v bodech $k = -k_j := -\mathrm{i}\varkappa_j$ a $k - \mathrm{i}0$ pak dává soustavu lineárních integrálních rovnic pro funkce $G_j(x)$ a $\psi(x, k)$, $k \in R$

$$(4.8a) \qquad -\mathrm{i}G_j(x) = C_j\,\mathrm{e}^{-2\varkappa_j x}\left\{1 + \sum_{m=1}^{N} \frac{\mathrm{i}G_m(x)}{\varkappa_j + \varkappa_m} + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \frac{r(k)\,\psi(x, k)\,\mathrm{e}^{ikx}}{k + \mathrm{i}\varkappa_j}\right\}.$$

$$(4.8b) \qquad \bar{\psi}(x, k)\,\mathrm{e}^{+ikx} = 1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{G_j(x)}{k - \mathrm{i}\varkappa_j} - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int \mathrm{d}k'\, \frac{r(k')\,\psi(x, k')\,\mathrm{e}^{ik'x}}{k - k' - \mathrm{i}0}\,.$$

Pomocí těchto funkcí pak dostaneme vyjádření potenciálu $u(x)$ ve tvaru

$$(4.9) \qquad u(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[2\mathrm{i}\sum_{j=1}^{N} G_j(x) - \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, r(k)\,\psi(x, k)\,\mathrm{e}^{+ikx}\right].$$

5. Časový vývoj spektrálních dat

Ve formulacích pro přímou i inverzní spektrální transformaci nikde explicitně nevystupuje čas, nicméně je zřejmé, že bude-li se potenciál $u(x, t)$ (tzn. řešení příslušné NLPDR) nějak měnit v čase, budou se měnit i spektrální data. Odvodíme nyní rovnice jejich časového vývoje pro KdV.

Rovnice (2.6) a (2.7) lze též napsat ve tvaru

$$(5.1) \qquad Lf = k^2 f\,,$$

$$(5.2) \qquad -f_t = Af\,,$$

kde L, A jsou lineární operátory tvořící výše zmíněný Laxův pár

$$(5.3) \qquad L := -\partial^2_{xx} + u(x, t)\,,$$

$$(5.4) \qquad A := 4\partial^3_{xxx} - 6u\,\partial_x - 3u_x\,.$$

Rovnice KdV je tak ekvivalentní podmínce

$$(5.5) \qquad L_t = [L, A]\,,$$

odkud plyne, že je-li $f(x, t)$ řešením (5.1), pak též $Af + f_t$ je řešením. Podmínka (5.5) je též ekvivalentní požadavku nezávislosti vlastní hodnoty operátorů L na čase.

Nechť $\phi(x, t)$ je Jostovo řešení (5.1), určené asymptotikou (2.8). Potom díky tomu, že $u(x, t) \to 0$ pro $x \to \pm\infty$,

$$(5.6) \qquad A\phi + \phi_t = 4\mathrm{i}k^3\,\mathrm{e}^{-ikx} + o(1) \quad \text{pro} \quad x \to -\infty\,,$$

tedy

$$(5.7) \qquad A\phi + \phi_t = 4\mathrm{i}k^3\phi$$

a porovnáním asymptotik levé a pravé strany pro $x \to \pm\infty$ dostaneme rovnice (2.5). Vzhledem k tomu, že $a(k)$ se s časem nemění, nebude se měnit ani poloha nul jeho asymptotického prodloužení, takže $k_j(t) = k_j(0)$. Podobným postupem odvodíme i časový vývoj normalizačních koeficientů

$$c_j(t) = c_j(0)\,\mathrm{e}^{8\varkappa j^3 t}\,. \tag{5.8}$$

Je zřejmé, že přes složité funkcionální závislosti spektrálních dat na $u(x, t)$ je jejich časový vývoj velmi jednoduchý.

Tím jsme dovršili program MOUR znázorněný schématem obr. 2 a v následující kapitole jej použijeme na nalezení solitonových řešení KdV.

6. Solitonová řešení KdV

Systém lineárních rovnic (4.8) je sice v principu řešitelný, avšak nedovoluje nalezení explicitních řešení s výjimkou případu $r(k) = 0$. Tato řešení, tj. taková, jejichž odpovídající „koeficient odrazu" je roven nule, nazýváme (multi)*solitony*. Uvedeme obecnou multisolitonovou formuli pro KdV a příklad nejjednodušších solitonů.

Místo výběru počáteční podmínky $u(x, 0)$ zvolíme přímo počáteční spektrální data tak, že $r(k) = 0$. Rovnice (4.8a) pak přejdou na soustavu nehomogenních lineárních rovnic pro $\mathrm{i}G_n(x, t)$

$$-\sum_{m=1}^{N} B_{nm}(x, t)\,\mathrm{i}G_m(x, t) = c_n(x, t)\,, \tag{6.1}$$

kde

$$c_n(x, t) := c_n(0)\exp\left(-2\varkappa_n x + 8\varkappa_n^3 t\right), \tag{6.2}$$

$$B_{nm}(x, t) := \delta_{nm} + c_n(x, t)\,(\varkappa_n + \varkappa_m)^{-1} \tag{6.3}$$

a odtud pak ze (4.9) a Kramerova pravidla dostaneme

$$u_N(x, t) = +2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\det B(x, t)^{-1}\sum_{j=1}^{N}\det B^{(j)}(x, t)\right], \tag{6.4}$$

kde $B^{(j)}(x, t)$ je matice $B(x, t)$, ve které je j-tý sloupec nahrazen sloupcem $c(x, t)$ s prvky definovanými (6.2). Po netriviálních algebraických úpravách lze tuto formuli převést na ještě kompaktnější tvar

$$u_N(x, t) = -2\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln\det A(x, t)\,, \tag{6.5}$$

kde $A(x, t)$ je matice $N \times N$.

$$A_{nm}(x, t) := \delta_{nm} + \frac{\exp\left[8\varkappa_n^3 t - (\varkappa_n + \varkappa_m)\,x + \gamma_n\right]}{\varkappa_n + \varkappa_m}\,. \tag{6.6}$$

Nejjednodušší solitonová řešení odpovídají samozřejmě nízkým N. Pro $N = 1$ dostáváme známé jednosolitonové řešení ve tvaru osamělé vlny pohybující se rychlostí $4\varkappa_1^2$ doprava

$$(6.7) \qquad u_1(x, t) = -2\varkappa_1 \operatorname{sech}^2 (\varkappa_1 x - 4\varkappa_1^3 t + \gamma_1).$$

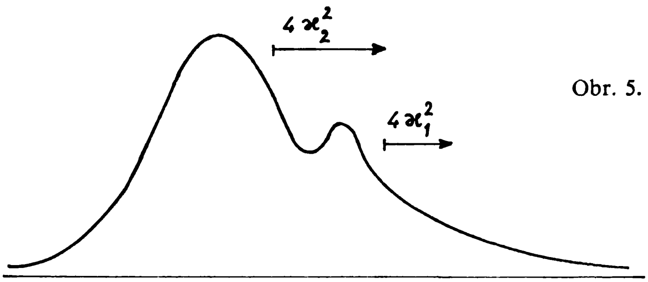
Pro $N = 2$ dostaneme již poněkud složitější řešení:

$$(6.8) \qquad u_2(x, t) = -2(\varkappa_2^2 - \varkappa_1^2)(\varkappa_1^2 \operatorname{csch}^2 \Gamma_1 + \varkappa_2^2 \operatorname{csch}^2 \Gamma_2) \times$$
$$\times (\varkappa_2 \coth \Gamma_2 - \varkappa_1 \tanh \Gamma_1)^{-2},$$

kde $\varkappa_2 > \varkappa_1$,

$$(6.9) \qquad \Gamma_i := \varkappa_i x - 4\varkappa_i^3 t + \gamma_i, \quad i = 1, 2,$$

jehož typický tvar pro pevné t je znázorněn na obrázku 5. Všimněme si, že vyšší vrchol se pohybuje rychleji než nižší, takže po jisté době si vymění pořadí.



Obr. 5. Dvousolitonové řešení KdV.

Asymptotické chování v čase je pro $t \to -\infty$

$$(6.9) \qquad u(x, t) = -2\varkappa_1^2 \operatorname{sech}^2 (\Gamma_1 - \Delta) - 2\varkappa_2^2 \operatorname{sech}^2 (\Gamma_2 + \Delta),$$

zatímco pro $t \to +\infty$

$$(6.10) \qquad u(x, t) = -2\varkappa_1^2 \operatorname{sech}^2 (\Gamma_1 + \Delta) - 2\varkappa_2^2 \operatorname{sech}^2 (\Gamma_2 - \Delta),$$

kde Δ je fázový posuv

$$(6.11) \qquad \Delta := 2 \ln \left(\frac{\varkappa_2 + \varkappa_1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \right).$$

Znamená to, že pro nekonečně velké časy vypadá dvousolitonové řešení jako lineární superpozice dvou jednosolitonových stavů a z hlediska asymptotiky se jejich vzájemná interakce projeví pouze fázovým posuvem $\pm 2\Delta$. Časový vývoj podle KdV probíhá tedy „asociálním" způsobem, neboť větší a rychlejší soliton se interakcí ještě urychlí o 2Δ, zatímco menší a pomalejší tutéž fázi ztratí. Už sám tento fakt naznačuje, že KdV je schopna popsat některé jevy naší objektivní reality.

Literatura

[1] N. Zabusky, M. Kruskal: Phys. Rev. Lett. *15* (1965) 240.

[2] A. C. Scott, F. Y. F. Chu, D. W. McLaughlin: Proc IEEE *61* (1973) 1443.

[3] *Solitons and Condensed Matter Physics*. Red. A. R. Bishop. Springer 1978.

[4] R. Rajaraman: *Solitons and instantons*. North Holland 1982,
R. Jackiw: Rev. Mod. Phys. *49* (1977) 681.

[5] G. L. LAMB: *Elements of Soliton Theory*. John Wiley, 1980. Ruský překlad Mir 1983.
[6] F. CALOGERO, A. DEGASPERIS: *Spectral Transform and Solitons*. North Holland 1982. Ruský překlad Mir 1987.
[7] R. K. DODD et al.: *Solitons and Nonlinear Waves*. Academic Press, 1982.
[8] V. E. ZACHAROV et al.: *Teorija solitonov*. Nauka 1980.
[9] *Solitons*. Topics in current physics *17*, red. R. K. BULLOUGH, P. J. CAUDREY. Springer 1980.
[10] C. S. GARDNER et al.: Phys. Rev. Lett. *19* (1967) 1095.
[11] M. J. ABLOWITZ et al.: J. Math. Phys. *21* (1980) 715.
[12] J. WEISS et al.: J. Math. Phys. *24* (1983) 522.
[13] V. E. ZACHAROV, A. B. ŠABAT: ŽETF *61* (1971) 118.
[14] M. J. ABLOWITZ et al.: Phys. Rev. Lett *31* (1973) 125.

jubilea & zprávy

Rukopisy článků k osobním výročím nebo k výročím institucí musí být redakci dodány 9 měsíců před datem výročí, mají-li být publikovány včas.

SPOMIENKA NA PÔSOBENIE AKADEMIKA O. BORŮVKU V BRATISLAVE

pri príležitosti jeho deväťdesiatych narodenín

Akademik O. Borůvka bol dobrým priateľom nestora slovenských matematikov, akademika Jura Hronca. Pozorne sledoval rozvoj matematiky na Slovensku a rozhodol sa pomôcť tomuto rozvoju vtedy, keď bola jeho pomoc najpotrebnejšia, v jeho začiatkoch. Dnešnému uchu znie až neuveriteľne, ale vyše 10 rokov dochádzal z Brna do Bratislavy každý druhý týždeň, aby bez nároku na odmenu prednášal, konzultoval a skúšal. Korene tohto počinu treba hľadať v rodičovskej výchove na moravsko-slovenskom pomedzí, ale najmä v činorodej túžbe pomôcť bratom Slovákom. V tom čase (r. 1949) Katedra matematiky na Prírodovedeckej fakulte UK v Bratislave mala 3 až 4 členov, ktorí ani pri najlepšej vôli nestačili zabezpečiť výuku matematiky. Ešte naliehavejšou sa javila potreba vychovávať mladých učiteľov na katedre, zadávať im problémy, usmerňovať ich výskum smerom k modernej problematike. Akademik O. Borůvka si položil ešte jeden cieľ, a to pestovať česko-slovenskú vzájomnosť budovaním osobných priateľstiev, nadväzovaním vedeckých stykov a vzájomnej spolupráce medzi moravskými a slovenskými matematikmi.

Pedagogickú prácu sprevádzal svojím neodolateľným osobným šarmom. S poslucháčmi nadviazal veľmi dobré osobné kontakty. Úprimne sa zaujímal o ich život a podľa možnosti im vždy poskytol dobrú radu alebo aspoň útechu. Dobre si zapamätal a podnes sa zaujíma o ich ďalšie osudy. Prednášal matematickú analýzu, Lebesgueov integrál, teóriu matíc, teóriu obyčajných diferenciálnych rovníc a integrálnych rovníc. Striedavo viedol seminár z matematickej analýzy a teórie grúp a grupoidov. Z teórie diferenciálnych rovníc vydal skriptá na UK, ktoré sa vyznačujú originálnosťou prístupov a tematiky.

Okrem pedagogickej práce sa venoval výchove mladých matematikov. Vďaka jeho širokému prehľadu a tvorivým schopnostiam zadával našim pracovníkom problémy z rôznych oblastí matematiky a pravidelne s nimi konzultoval o ich riešení. Účinne prispel k rozvoju algebry na Slovensku. Z jeho podnetu vznikol v Bratislave seminár z teórie zväzov, z ktorého vyrástlo niekoľko úspešných pracovníkov v teórii usporiadaných štruktúr. Predsa jeho hlavným vtedajším zameraním bola teória lineárnych diferenciálnych rovníc 2. rádu. Jednotlivých učiteľov orientoval na túto oblasť a priľahlé odvetvia. Tým chcel zabezpečiť postup výskumu na širokom poli, kde by si jednotliví bádatelia mohli navzájom pomáhať. O jeho jasnozrivosti