Štefan Szarka

Špeciálně počítacie jednotky na počítači TESLA AP-S umožňujúce realizovať jednoduché hybridné výpočty

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 15 (1970), No. 3-4, 114--133

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139138

ještě na další rovině, která je kolmá na vektor $\boldsymbol{N}_3\{a_3; b_3; c_3\}$. To je právě hledaná oskulační kulová plocha dané čáry (26) v jejím bodě $P_0(a_0; b_0; c_0)$.

Tato oskulační kulová plocha může mít s danou čarou (26) v jejím bodě P_0 styk i více než čtyřbodový a být tak její kulovou plochou hyperoskulační, což nastane, když nalezené souřadnice jejího středu $S(m; n; p)$ a její poloměr r anulují i koeficient při členu čtvrtého stupně a případně i koeficienty při dalších členech vyšších stupňů rovnice (36) pro $\boldsymbol{t}$.

Literatura

E. Kraemer a kol.: *Matematika pro III. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol,* Státní pedagogické nakladatelství Praha, 1965.

ŠPECIÁLNE POČÍTACIE JEDNOTKY NA POČÍTAČI TESLA AP-S UMOŽŇUJÚCE REALIZOVAŤ JEDNODUCHÉ HYBRIDNÉ VÝPOČTY

Štefan Szarka, Bratislava

1. HYBRIDNÉ POČÍTAČE

Počítače, v ktorých sa strojové premenné, predstavujúce matematické veličiny menia spojite, zaraďujeme do skupiny analógových počítačov. Na druhej strane, v číslicových počítačoch, sú všetky premenné reprezentované diskrétne. Skôr, ako budeme definovať hybridný počítač, resp. hybridné počítanie, uvedieme najdôležitejšie charakteristické vlastnosti elektronických analógových a číslicových počítačov.

Analógové počítače

1. Pracujú paralelne, t j. pre každú matematickú operáciu používajú oddelenú (zvláštnu) počítaciu jednotku.

2. Počítajú veľmi rýchle, bez ohľadu na zložitosť úlohy. Rozsiahlejšie úlohy vyžadujú počítač s väčším počtom počítacích jednotiek. Rýchlosť výpočtu je obmedzená predovšetkým frekvenčnými vlastnosťami počítacích jednotiek.

3. Presnosť výpočtu závisí od kvality počítacích prvkov a len zriedkavo dosahuje 0,01%.

4. Môžu jednoducho realizovať také matematické operácie ako sčítanie, integrovanie, násobenie a generovanie rôznych nelineárnych funkcií, ale majú veľmi obmedzené schopnosti pre logické rozhodovanie, pamätanie numerických hodnôt a nenumerických informácií.

5. Programovanie úloh je veľmi jednoduché a názorné. Vo väčšine prípadov je priamy vzťah medzi študovaným problémom a naprogramovaným počítačom, ktorý predstavuje elektrický model úlohy.

Číslicové počítače

1. Majú jednu aritmetickú jednotku, v ktorej výpočet prebieha za sebou (sériove), podľa algoritmu uloženého v pamäti počítača.
2. Počítací čas je závislý na zložitosti problému, t j. na počte matematických operácií v algoritme.
3. Presnosť výpočtu závisí predovšetkým od zvolenej numerickej metódy a od počtu bitov pamäťových buniek. Je pomerne nezávislá od kvality použitých prvkov.
4. Vedia realizovať len základné aritmetické operácie. Pre zložitejšie operácie, ako napr. integrovanie a derivovanie, treba použiť aproximáciu. Naproti tomu však vedia uskutočniť širokú škálu logických rozhodovacích operácií a majú veľkú kapacitu pamäti, čo umožňuje jednak zapamätať si program výpočtu, numerické i nenumerické údaje, jednak iteračné operácie.
5. Programovanie je nenázorné. Málokedy je priamy vzťah medzi študovaným technickým problémom a jeho programom.

Termín „hybridný počítač", alebo „hybridná počítacia technika" sa používa všade tam, kde dochádza v rámci jedného systému ku kombinácii niektorých špeciálnych vlastností analógového počítača s niektorými charakteristickými vlastnosťami číslicového počítača. Hybridné počítanie kombinuje veľkú výpočtovú rýchlosť a jednoduchosť programovania analógových počítačov s presnosťou operácií a schopnosťou pamätania i logického rozhodovania číslicových počítačov.

Najjednoduchšie hybridné počítače sú tzv. iteračné diferenciálne analyzátory. Sú to rýchle repetičné elektronické analógové počítače, ktoré si môžu pamätať a automaticky prenášať hodnoty funkcií v niektorom bode z jedného repetičného cyklu do ďalšieho. Toto umožní nové sekvenčné a iteračné počítacie metódy. Tieto nové iteračné spôsoby riešenia úloh v dôsledku čiastočne spojitej a čiastočne diskrétnej povahy počítania, sú trochu odlišné od iteračných metód používaných na číslicových počítačoch.

Tzv. „pravý hybrid" je úplný analógový a úplný číslicový počítač, prepojený pomocou analógovo-číslicových a číslicovo-analógových prevodníkov do jedného počítacieho systému. (Napr. v Ústave technickej kybernetiky SAV v Bratislave majú hybridný systém GIER-TESLA AP-3-M). Pri takej spolupráci analógového a číslicového počítača v závislosti od riešených problémov možno rozlíšiť niekoľko prípadov:

a) oba počítače hrajú pri riešení úlohy približne rovnakú rolu (tzv. vyvážená hybridná technika).

b) úloha sa rieši prevažne na analógovom počítači a číslicový počítač slúži len na riadenie výpočtu, generovanie zložitejších funkcií (napr. o viacerých premenných), realizáciu dopravného oneskorenia a pod.

c) úloha sa rieši na číslicovom počítači a analógová časť slúži na realizáciu špeciálnych podprogramov; napr. na rýchlu a presnú integráciu systému obyčajných diferenciálnych rovníc.

Uvedené spojenie dvoch hotových počítačov do jedného systému má okrem výhod aj nevýhody; dostaneme príliš zložitý a drahý systém pričom sú ťažkosti aj s programovaním. Preto výrobcovia klasických elektronických analógových počítačov prešli na výrobu takých hybridných počítačov, v ktorých veľmi kvalitné a rýchle analógové počítacie jednotky sú doplnené číslicovými obvodmi na realizáciu rozhodovacích a riadiacích operácií pre automatizáciu výpočtového postupu, analógovými pamäťami a pod. (tzv. hybridné analogové počítače). V hybridných systémoch veľkého rozsahu zase iteračné diferenciálne analyzátory montujú s veľmi lacnými a malými (12 až 16 bitovými) číslicovými počítačmi do kompaktného celku.

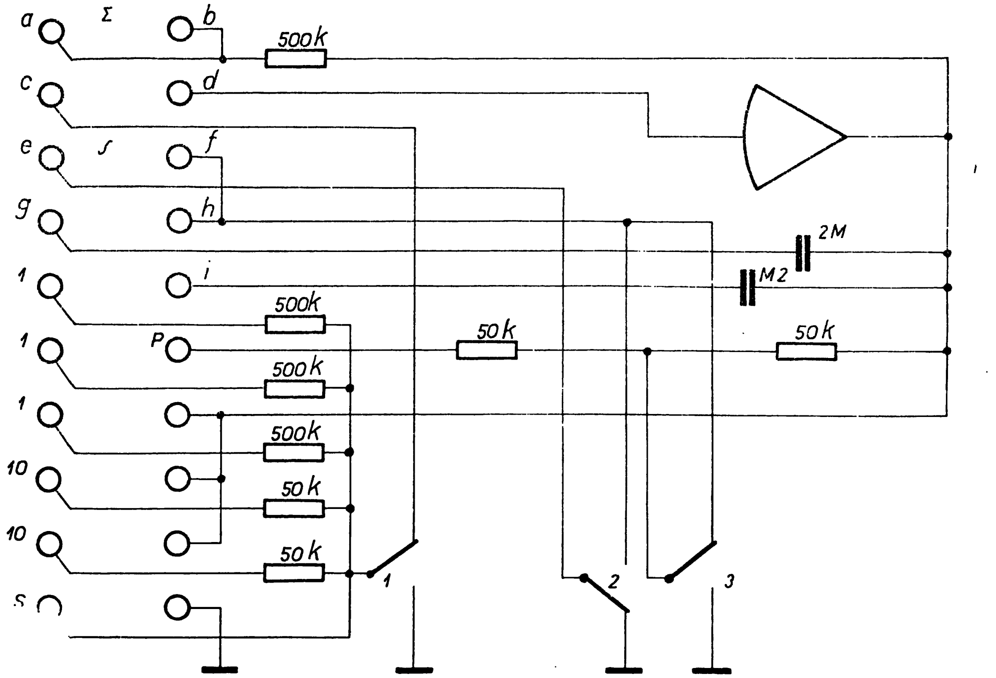
U nás na školách (stredných odborných i vysokých) najrozšírenejšie počítače sú elektronické analogové počítače TESLA AP-S. V ďalších častiach tejto práce ukážeme, že veľmi jednoduchými úpravami možno tento malý školský repetičný počítač prerobiť na iteračný a realizovať jednoduché hybridné výpočty.

2. REALIZÁCIA ANALÓGOVÝCH PAMÄTÍ NA POČÍTAČI AP-S

Vzhľadom na malý rozsah počítača AP-S (má len 8 operačných zosilňovačov), hľadali sme možnosti realizácie pamäťových a iných špeciálnych počítacích jednotiek, potrebných na uskutočnenie hybridných výpočtov, s ponechaním synchrónneho ovládania všetkých operačných zosilňovačov. Priamu (normálnu) a doplnkovú analógovú bodovú pamäť sme realizovali jednak nekonvenčným zapojením konvenčných integračných zosilňovačov, jednak využitím voľných kontaktov relé č. 20, resp. č. 24.

Na počítači AP-S na funkciu integrátora možno použiť tzv. univerzálne zosilňovače, ktorých je 6. Kvôli lepšej názornosti realizácie pamäťových a ostatných špeciálnych jednotiek uvedieme na obr. 1. prepojenie univerzálneho zosilňovača so zdierkami na prepojovacom poli a ovládacími relé. Integrátor sa realizuje prepojením zdierok $c-e$, $d-f$ a $h-g$, resp. $h-i$. V jednotlivých pracovných stavoch polohu kontaktov relé 1, 2 a 3 udáva tabuľka 1. V režime „repetičný chod“ sa automaticky striedavo opakujú stavy „počiatočné podmienky“ a „riešenie“, ako je znázornené na obr. 2. Interval T_2 je konštantný, podľa udania výrobcu počítača približne 0,6 sec. Doba riešenia T_1 je nastaviteľná podľa vzťahu $T_1 = 8/\alpha$ sec, kde α je údaj na stupnici potenciometra 01: $0 < \alpha \leqq 10$.

Na počítači AP-S, ako sme spomenuli, ponecháme synchrónne ovládanie všetkých operačných zosilňovačov. Preto pod normálnou bodovou pamäťou budeme rozumieť



Obr. 1.

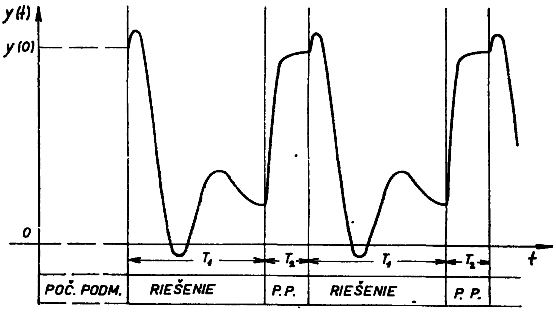
Tabuľka 1*)

Stav AP-S	1	2	3
Poč. pod. Pamäť Riešenie Pamäť	1 0 0 0	0 0 1 0	0 0 1 1
Repetícia	striedavo Poč. podm. a Riešenie		

obvod, ktorého výstupné napätie $u_0(t)$ (obr. 3) v pracovnom stave počítača „počiatočné podmienky" sleduje vstupné napätie $u_1(t)$ a v stave „riešenie" pamätá (drží) tú hodnotu, ktorá bola na výstupe v okamihu prepnutia zo stavu „počiatočné podmienky" do stavu „riešenie". Komplementárna (doplnková) bodová pamäť má opačnú funkciu: v pracovnom stave „počiatočné podmienky" pamätá tú hodnotu,

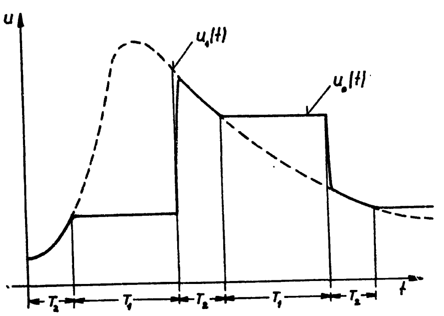
*) Znak ⊊ znamená prechod z príslušného stavu do stavu „pamäť".

ktorú mala na výstupe v okamihu prechodu do tohto stavu, (t. j. hodnotu $u_0(T_1)$) a v „riešení“ jej výstup sleduje vstupné napätie (obr. 4).

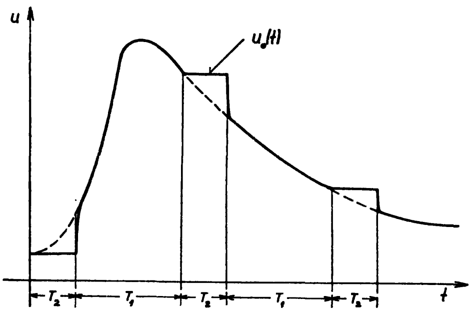


Obr. 2.

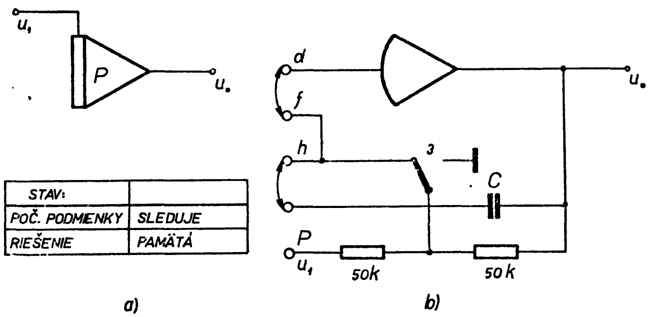
Normálnu bodovú pamäť, ktorú schématicky budeme označovať podľa obr. 5-a, na počítači AP-S možno realizovať zapojením podľa obr. 5-b, t. j. vynechaním normálnych vstupov v štandardných integrátoroch a použitím len vstupu *P* pre zavedenie



Obr. 3.



Obr. 4.



Obr. 5.

počiatočných podmienok. Polohu kontaktu relé 3 udáva tabuľka 1, z ktorej vyplýva, že v stave „pamäť“ režim pamäti *P* nie je jednoznačný. Keď v pracovnom stave

„počiatočné podmienky" privedieme na jej vstup P konštantné napätie $u_1(t) = E$, pretože tento obvod v tomto stave sleduje, na výstupe by sme mali dostať: $u_{0i}(t) = -E$. V skutočnosti výstupné napätie túto hodnotu dosiahne exponenciálne:

(1) $$u_0(t) = -E(1 - e^{-t/\tau})$$

kde $\tau = RC$, $R = 50$ k a C je počítací kondenzátor integrátoru (2 μF, resp. 0,2 μF). Preto časová konštanta τ môže mať hodnotu 0,1 sec., resp. 0,01 sec.

Pre skokovú (konštantnú) vstupnú funkciu $u_1(t) = E$ definujeme tzv. statickú chybu sledovania; δu_0, ktorá je funkciou času a časovej konštanty:

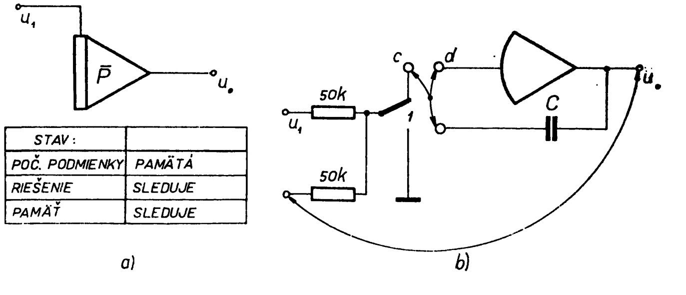
$$\delta u_0 = \frac{u_{0i}(t) - u_0(t)}{u_{0i}(t)} = \frac{E - (E(1 - e^{-t/\tau}))}{E} = e^{-t/\tau}$$

V tabuľke 2 je táto chyba vyčíslená.

Tabuľka 2

t/τ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
δu_0 [%]	36,79	13,53	4,98	1,83	0,67	0,25	0,091	0,033	0,012	0,0045

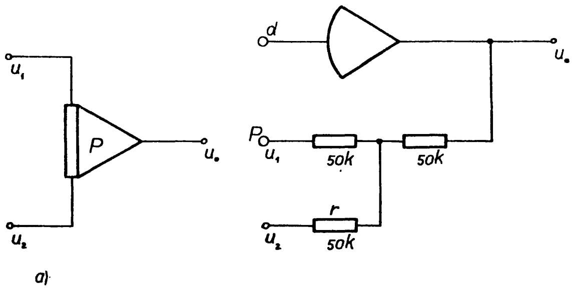
Podľa tejto tabuľky môžeme určiť chybu pri danej sledovacej dobe, resp. potrebnú dobu T_2, aby chyba neprekročila určitú hodnotu. Je to dôležité najmä pri vonkajšom ovládaní repetície, keď T_2 sa môže značne líšiť od hodnoty nastavenej v zabudovanom ovládaní repetície.



Obr. 6.

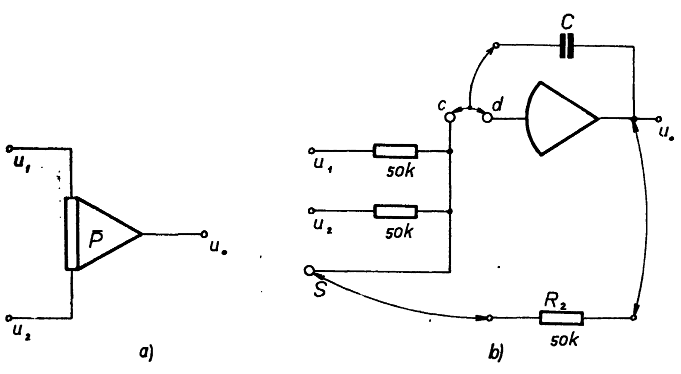
Pri sledovaní premenlivého vstupného napätia (napr. periodického $u_1(t) = E \sin \omega t$), vzniká tzv. dynamická chyba. Mierou maximálnej dynamickej chyby je hodnota $\omega\tau$.

Doplnkovú pamäť $\bar{P}$, ktorú schématicky budeme označovať podľa obr. 6-a, možno taktiež realizovať bez zásahu do ovládania operačných jednotiek AP-S, nekonvenčným zapojením univerzálnych zosilňovačov podľa obr. 6-b. Pri takomto zapojení relé 2 a 3 sa neuplatňujú. Režim obvodu určuje relé 1. Z tabuľky 1 vyplýva, že pamäť $\bar{P}$ v pracovnom stave „počiatočné podmienky" pamätá, v stave počítača „pamäť" a „riešenie" výstup obvodu sleduje vstup s takou istou presnosťou, akou pamäť P v stave počítača „počiatočné podmienky". Pamäťový obvod $\bar{P}$ možno vynulovať v stave „počiatočné podmienky" rozpojením zdierok $c-d$ a prepojením $d-f$.



Obr. 7.

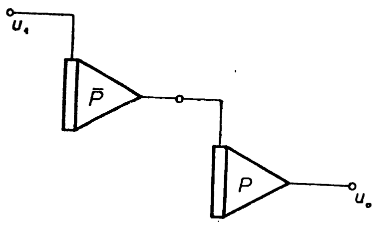
Pri hybridných výpočtoch budeme potrebovať pamäť resp. doplnkovú pamäť s dvomi vstupmi. Priamu pamäť s dvomi vstupmi (obr. 7-a) sme na AP-S realizovali pripojením odporu $r = 50$ k k odporom na zavedenie počiatočných napätí (obr. 7-b). Druhý koniec odporu r sme vyviedli na čiernu zdierku, ktorú sme odpojili od zeme. (Tento pamäťový obvod sme realizovali u zosilňovača 08, lebo jeho prepojovacie pole je z vnútra najprístupnejšie). Ostatné zdierky treba prepojiť ako na obr. 5-b.



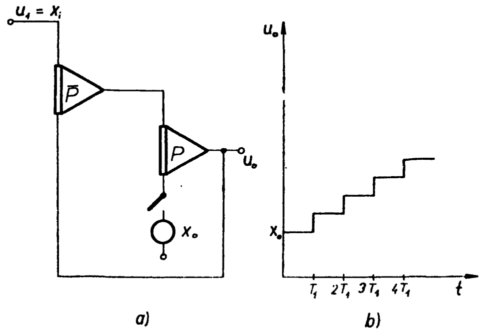
Obr. 8.

Doplnkovú pamäť s dvomi vstupmi, ktorú schématicky budeme označovať podľa obr. 8-a, možno realizovať využitím jedného voľného odporu R_2, podľa obr. 8-b. Z priamej a doplnkovej pamäti možno vytvoriť zložitejšie typy pamäťového obvodu.

Na obr. 9 je pamäťová dvojica vhodná na pamätanie konečnej hodnoty cyklu pre použitie v nasledujúcom iteračnom cykle. V pracovnom stave „riešenie“ doplnková pamäť $\bar{P}$ sleduje $u_1 = x_i(t)$ a priama pamäť P pamätá $u_0(t) = x_{i-1}(T_1)$. Na konci i-tého cyklu $\bar{P}$ bude pamätať $x_i(T_1)$ a P sledovať, preto túto hodnotu od $\bar{P}$ si „preberie“. V iteračnom cykle $i + 1$ hodnota $x_i(T_1)$ bude na výstupe P k dispozícii pre výpočet $x_{i+1}(t)$, atď.



Obr. 9.



Obr. 10.

Pamäťový obvod znázornený na obr. 10-a sa nazýva akumulačný obvod. Na výstupe tohto obvodu v i-tom cykle je hodnota:

$$u_0 = x_0 + \sum_{k=1}^{i-1} x_k(T_1)$$

Veľmi často sa používa tento obvod na vytvorenie schodovitej zmeny nejakého parametra λ v iteračnom procese. Vtedy $u_1 = \Delta\lambda$.

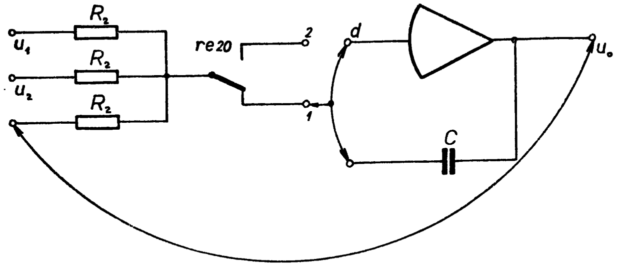
V počítači AP-S relé 20 a 24 majú nevyužité prepínacie kontakty. Tieto kontakty sme vyviedli na prepojovacie pole, a pomocou nich sme realizovali nové počítacie jednotky. Kontakty týchto relé budeme kresliť v polohe, v akom sú v pracovnom stave počítača „počiatočné podmienky“. Polohu kontaktov v ostatných stavoch

Tabuľka 3

Stav AP-S	re 20	re 24
Poč. pod.	0	0
Pamäť	1	0
Riešenie	1	1
Pamäť	1	1

počítača vyjadruje tabuľka 3. Z tejto tabuľky vidieť, že v stave počítača „pamäť“ poloha kontaktu relé 24 nie je jednoznačná. Závisí od toho, či sme uviedli počítač do tohto stavu z „počiatočných podmienok“ alebo z „riešenia“. Relé 20 sa prepína jednoznačne.

Akumulačný obvod (obr. 10-a) pri uvedení počítača zo stavu „počiatočné podmienky“ do stavu „pamäť“ sa zahltí, lebo v tom prípade tak pamäť P ako aj $\bar{P}$ sledujú. Preto je výhodnejšie realizovať priamu pamäť P využitím vyvedených kontaktov relé 20 a voľných odporov R_2 podľa obr. 11. Tento pamäťový obvod, ako to vyplýva z tabuľky 3, v stave „počiatočné podmienky“ sleduje, v stavoch „pamäť“ a „riešenie“ pamätá. Teda možno ho použiť v akumulačnom obvode vo všetkých stavoch počítača. Keď vodič miesto vývodu 1 pripojíme na 2 (obr. 11), dostaneme



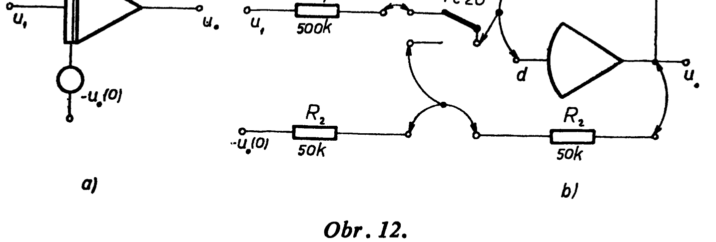
Obr. 11.

pamäť $\bar{P}$, ktorá bude mať v jednotlivých stavoch počítača taký istý režim ako obvod uvedený na obr. 6. Pomocou relé 24 taktiež možno realizovať bodové pamäti. Ich režim v jednotlivých stavoch počítača sa odvodí z tabuľky 3.

3. INÉ ŠPECIÁLNE JEDNOTKY POČÍTAČA AP-S

Pri riešení niektorých iteračných úloh budeme potrebovať ešte ďalšie nové jednotky, ktoré na počítači AP-S sme realizovali využitím spomínaných relé a nekonvenčným zapojením operačných zosilňovačov.

a) Doplnkový integrátor

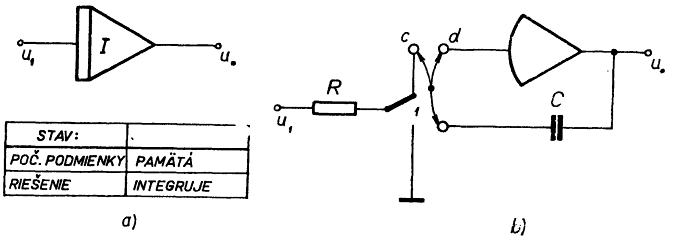


Obr. 12.

Pri iteračnom spôsobe riešenia, popri normálnom integrátore sa používa aj komplementárny (doplnkový) integrátor. Kedykoľvek je počítač (tedy i normálne integrátory) v stave „riešenie", doplnkový integrátor je v „počiatočných podmienkach" a opačne. Vyvedené kontakty relé 20 umožnili na počítači AP-S realizovať doplnkový integrátor podľa obr. 12-b. Využili sme k tomu aj voľné odpory R_1 a R_2. Doplnkový integrátor schématicky budeme označovať podľa obr. 12-a. Poznamenajme, že normálne integrátory v programových schémach nebudú mať žiadny dodatočný znak.

b) $I-$ a $\bar{I}-$integrátor

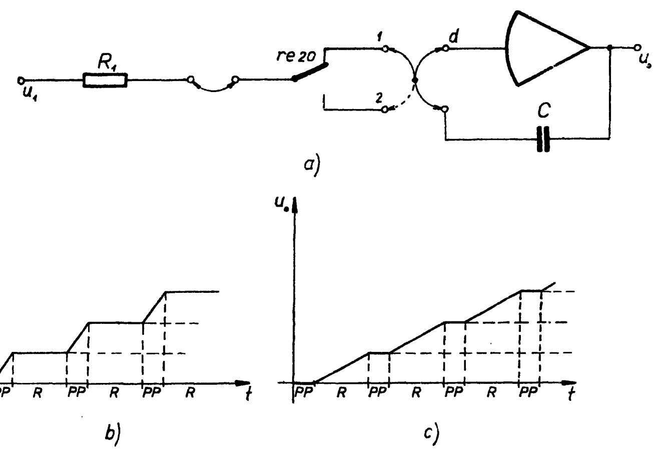
I-integrátorom nazveme počítaciu jednotku, ktorá v pracovnom stave „počiatočné podmienky" pamätá a v stave „riešenie" integruje. Realizujeme ho zapojením uni-



STAV:	
POČ. PODMIENKY	PAMÄTÁ
RIEŠENIE	INTEGRUJE

Obr. 13.

verzálneho operačného zosilňovača podľa obr. 13-b. Vstupné napätie $u_1(t)$ privádzame na niektorý normálny vstup integrátora. Preto I-integrátor môže mať zisk 1. 10

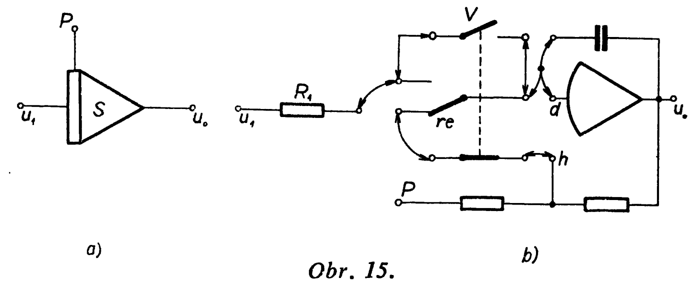


Obr. 14.

alebo 100. $\bar{I}$-integrátor je doplnkový (komplementárny) k I-integrátoru, t. j. v stave „počiatočné podmienky" integruje a v stave „riešenie" pamätá. Možno ho realizovať pomocou re 20, resp. 24 a voľných odporov R_1, resp. R_2 podľa obr. 14-a. Priebeh výstupného napätia tohoto integrátoru pri konštantnom vstupnom napätí $u_1(t) = -U$ znázorňuje obr. 14-b. Pripojením vodiča vedeného na kontakt 1 relé 20 na kontakt 2 dostaneme opäť I-integrátor, ktorého výstupné napätie pri konštantnom vstupnom napätí znázorňuje obr. 14-c. I-integrátor ($\bar{I}$-integrátor) možno vynulovať v stave „počiatočné podmienky" odpojením vodiča od zdierky c (zdierky 1 na obr. 14-a) a pripojením na zdierku h.

c) S-integrátor

Niektoré nové spôsoby riešenia vyžadujú integrátor, ktorý od okamihu spustenia repetičného chodu, integruje nezávisle na pracovných stavoch počítača. Taký integrátor budeme nazývať S-integrátor a schématicky budeme označovať podľa obr.

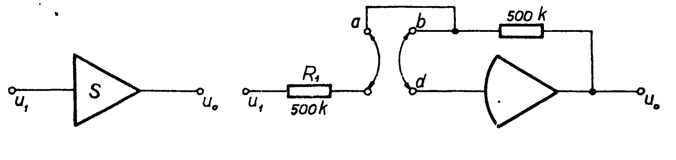


Obr. 15.

15-a. Možno ho realizovať podľa obr. 15-b. Spustením „repetičného chodu" vyznačené relé (č. 20, resp. č. 24) súčastne s normálnymi integrátormi uvedie S-integrátor zo stavu „počiatočné podmienky" do stavu „riešenie". Hneď na to prepneme dvojpólový prepínač V, čím obvod nezávisle na polohe relé (t. j. pracovného stavu počítača) bude stále integrovať.

d) S-invertor a S-sumátor

Relé 1 na obr. 1 podľa tabuľky 1 pripojí vstupný odpor invertora na vstup operačného zosilňovača len v pracovnom stave „pamäť" a „riešenie". Pri niektorých iteračných

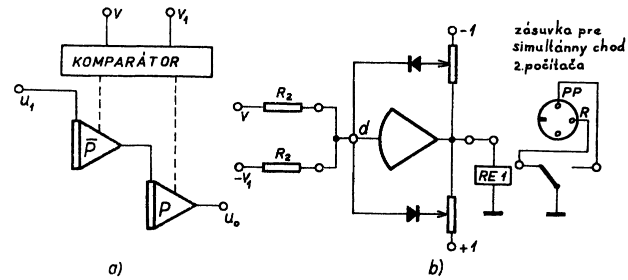


Obr. 16.

ných spôsoboch riešenia budeme potrebovať také zapojenie, ktoré aj v stave „počiatočné podmienky" bude pracovať ako invertor. Možno to realizovať, využitím voľného odporu R_1, podľa zapojenia na obr. 16-b. S-invertor schématicky budeme označovať podľa obr. 16-a. Podobne možno realizovať S-sumátor.

e) Komparátorom ovládané pamäti

Je nemálo takých problémov (napr. výpočet dvojnásobného integrálu iteračným spôsobom, transformácia funkcie času na funkciu závisle premennej), ktoré vyžadujú komparátorom ovládanú bodovú pamäť, alebo pamäťové dvojice. Na obr. 17-a pre $v(t) < v_1$ pamäť $\bar{P}$ sleduje a pamäť P pamätá a pre $v(t) > v_1$ je to naopak. V prípade počítačov AP-S také výpočty bez zásahu do ovládania počítacích jednotiek možno realizovať pomocou dvoch AP-S. Samotná úloha a komparátor sa naprogramujú na jeden počítač a potrebné pamäťové obvody na počítač druhý, ktorého pracovné stavy sú ovládané cez zásuvku pre súbežný chod komparátorom z prvého počítača.



Obr. 17.

Komparátor ovšem musí byť nezávislý na pracovných stavoch počítača. Taký komparátor možno realizovať nekonvenčným spôsobom využitím voľných odporov R_2 a jedného z dvoch voľných polarizovaných relé, podľa zapojenia na obr. 17-b. V tomto prípade pre $v(t) > -v_1$ druhý počítač bude v stave „počiatočné podmienky" a pre $v(t) < -v_1$ v stave „riešenie".

4. HYBRIDNÉ VÝPOČTY NA POČÍTAČI AP-S

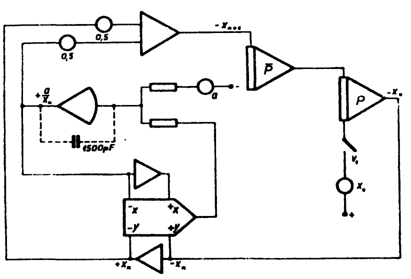
V predchádzajúcich častiach sme ukázali, akým spôsobom je možné bez zásahu do ovládania počítacích jednotiek, realizovať na školskom analógovom počítači AP-S aj také počítacie jednotky, aké výrobca tohoto počítača neudáva. Tieto nové jednotky sme vyvinuli preto, aby sme na počítači AP-S mohli realizovať hybridné výpočty. Typickými hybridnými výpočtami, ktoré majú z časti spojitý, z časti diskrétny charakter sú analógové iteračné výpočty. Sú to také opakované výpočty, ktorých parametre medzi jednotlivými riešeniami sa menia automaticky bez zásahu programátora. Zmeny môžu byť dopredu naprogramované, alebo sú dôsledkom dielčích výsledkov.

a) Výpočet druhej odmocniny čísla iteračným spôsobom

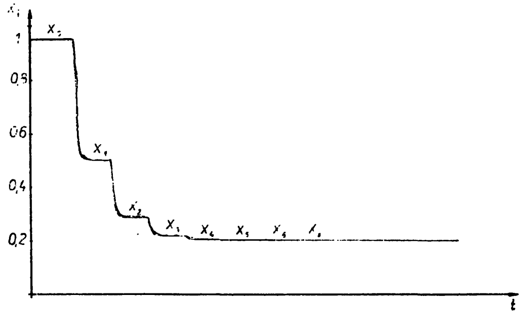
Analógové bodové pamäti umožnia realizovať na počítači AP-S iteračné výpočty numerického charakteru, keď sa konečný výsledok získa opakovaným výpočtom podľa daného vzorca, pričom ako východiskový údaj v danom výpočte sa využíva výsledok z predchádzajúceho výpočtového cyklu. Ako príklad na takéto riešenie uvedieme výpočet druhej odmocniny z čísla „a“, podľa rekurzívneho vzorca

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

pre $x_0 \neq 0$. Pri viacnásobnom použití $x_n \to \sqrt{(a)}$. Pre jednoduchosť nech a $\in (0,1)$. Programová schéma rovnice je na obr. 18. Výsledok pre $a = 0{,}04$ kreslený súradnicovým zapisovačom je na obr. 19.



Obr. 18.



Obr. 19.

Iteračné výpočty numerického charakteru, kde výsledkom je nejaké číslo, nie sú najvhodnejšie pre analógové počítače. Z uvedenej úlohy výpočtu $\sqrt{(a)}$ vidíme, že už táto jednoduchá úloha vyžaduje celú kapacitu počítača AP-S: 7 zosilňovačov pre výpočet $\sqrt{(a)}$, a 1 zosilňovač na ovládanie repetície. Výhodnejšie sú také iteračné úlohy, kde hľadanou neznámou je nejaká funkcia (napr. okrajové úlohy obyčajných diferenciálnych rovníc, integrálne rovnice, optimalizácia parametrov).

b) Riešenie okrajových úloh obyčajných diferenciálnych rovníc

Analógový počítač AP-S bol konštruovaný na riešenie Cauchyho úlohy, t. j. na nájdenie riešenia obyčajnej diferenciálnej rovnice (maximálne šiesteho rádu) splňujúceho zadané počiatočné podmienky. Avšak v mnohých fyzikálnych úlohách sa hľadajú riešenia vo vnútri intervalu $\langle a, b\rangle$, pričom podmienky kladené na riešenie nie sú dané v jednom (počiatočnom) bode, ale v oboch koncových bodoch intervalu $\langle a, b\rangle$. Takéto úlohy sa nazývajú okrajové úlohy. Tu ukážeme, že vyvinuté špeciálne jednotky počítača AP-S rozšíria možnosti tohoto počítača i na riešenie širokej triedy okrajových úloh. Metódu riešenia týchto úloh, vzhľadom na veľmi obmedzený rozsah počítača AP-S, ukážeme na riešení diferenciálnej rovnice 2. rádu

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$$

s okrajovými podmienkami

$$x(a) = A\,, \quad x(b) = B$$

Metóda riešenia bude iteračná, t. j. taká, ktorá v jednotlivých repetičných cykloch generuje postupnosť funkcií $x_n(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, konvergujúcu k žiadanému riešeniu, splňujúcemu dané okrajové podmienky. V postupnosti jednotlivé funkcie $x_n(t)$ ovplyvňuje rozdiel medzi skutočnou a žiadanou hodnotou v bode $b : x_n(b) - B$. Presnejšie: postupnosť funkcií $x_n(t)$ dostaneme riešením diferenciálnej rovnice

$$\frac{d^2x_n}{dt^2} = f\left(t, x_n, \frac{dx_n}{dt}\right)$$

s počiatočnými podmienkami

$$x_n(0) = A\,, \quad \dot{x}_n(0) = \dot{x}_{n-1}(0) + k[x_{n-1}(b) - B]$$

kde $\dot{x}_0(0)$ je ľubovolná východisková počiatočná hodnota, pričom $\dot{x} = dx/dt$.

Príklad: Máme riešiť nelineárnu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{c}{m}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + g = 0$$

s okrajovými podmienkami

$$x(0) = 30\,, \quad x(6) = 0\,.$$

Slovami tento príklad možno formulovať takto: z výšky 30 m hádžeme teleso o hmote m a o konštante úmernosti odporu vzduchu c vo vertikálnom smere. Chceme aby teleso dopadlo na zem ($B = 0$) za dobu $t = b = 6$ sec. Ktorým smerom (nahor alebo nadol) treba teleso hodiť a s akou počiatočnou rýchlosťou?

Nech $m = 3{,}5$ kg $\quad g = 9{,}81$ m/sec^2
$c = 0{,}175$

potom

$$\ddot{x} - 0{,}05(\dot{x})^2 + 9{,}81 = 0$$

Fyzikálnymi úvahami sme maximálne hodnoty závisle premenných odhadli na

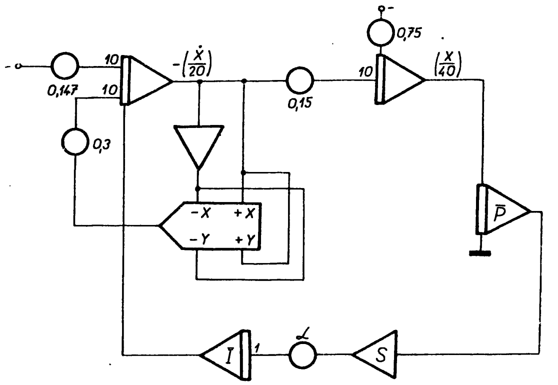
$$x_{max} = 40 \text{ m}\,, \quad \dot{x}_{max} = 20 \text{ m/sec}$$

Preto sme programovali strojové rovnice

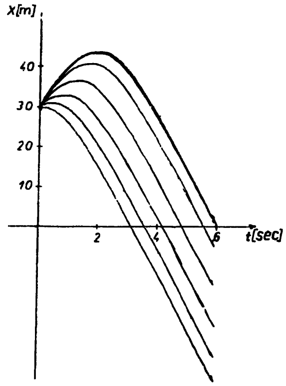
$$\left(\frac{\dot{x}}{20}\right) = \int\left[\left(\frac{\dot{x}}{20}\right)^2 - 0{,}49\right] dt$$

$$\left(\frac{x}{40}\right) = 0{,}5\int\left(\frac{\dot{x}}{20}\right) dt$$

Na obr. 20 je podrobná programová schéma pre iteračné riešenie tohto problému na počítači AP-S. Úlohu sme 3-krát zrýchlili. Použili sme vonkajšie ovládanie repetície pomocou elektromechanického časového spínača, (vyrobeného na Katedre numerickej matematiky PF UK v Bratislave), na ktorom sme nastavili $T_1 = 2$ sec



Obr. 20.



Obr. 21.

a $T_2 = 1$ sec. Obr. 21 ukazuje konvergenciu riešenia pre $\alpha = 0,2$, ktorú sme určili experimentálne. V ustálenom stave na výstupe $\bar{I}$-integrátora bolo napätie 6,1 V, t.j.

$$\left(\frac{\dot{x}}{20}(0)\right) = 0,61 \text{ SJ} .$$

Záver: teleso treba hodiť smerom hore s počiatočnou rýchlosťou $\dot{x}(0) = 12,2$ m/sec.

c) Modelovanie skákajúcej oceľovej guľky

Pri dopade oceľovej guľky na oceľovú dosku vznikne veľmi veľká nárazová sila. V dôsledku toho sa guľka odrazí prakticky okamžite. Keď guľka dopadne s rýchlosťou $-\dot{x}$, odrazí sa rýchlosťou $+a\dot{x}$, kde a je tzv. rázový koeficient, ktorý v našom prípade má hodnotu blízko jednej. Obecne: $0 \leqq a < 1$. Nárazová sila je príliš veľká a trvá veľmi krátko, preto tento prípad na analógovom počítači bežným spôsobom sa rieši veľmi ťažko. Možno ho však riešiť celkom jednoducho využitím nekonvenčných jednotiek počítača AP-S.

Pohybová rovnica padajúcej guľky o hmote m je (odpor vzduchu zanedbáme):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - mg$$

t. j.

$$\ddot{x} = -g$$

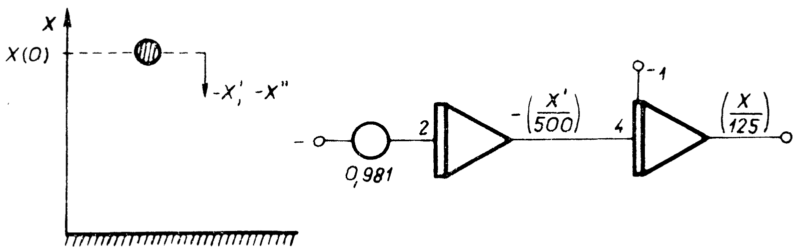
Predpokladajme, že guľka padá z výšky 125 cm. Potom pre maximálne hodnoty závisle premenných možno písať

$$x_{max} = 125 \text{ cm} \qquad \ddot{x}_{max} = 1000 \text{ cm/sec}^2$$
$$\dot{x}_{max} = 500 \text{ cm/sec} \qquad g = 981 \text{ cm/sec}^2$$

Strojové rovnice sú:

$$\left(\frac{\ddot{x}}{1000}\right) = -0{,}981\,, \quad \left(\frac{\dot{x}}{500}\right) = 2\int\left(\frac{\ddot{x}}{1000}\right)\mathrm{d}t\,, \quad \left(\frac{x}{125}\right) = 4\int\left(\frac{\dot{x}}{500}\right)\mathrm{d}t$$

Keby sme chceli riešiť pohyb len po prvý dopad, vystačili by sme s programovou schémou na obr. 22.



Obr. 22.

Problém skákajúcej guľky na počítači AP-S možno riešiť podľa programovej schémy na obr. 23, ktorá pracuje nasledovne:

1. Spočiatku sú všetky integrátory v stave „počiatočné podmienky“.
2. Normálny a S-integrátor sa uvedie do stavu „riešenie“. Doplnkový integrátor zostane v stave „počiatočné podmienky“, teda bude sledovať napätie privedené na vstup pre nastavenie počiatočných hodnôt. Až po dopad guľky, t. j. do okamihu kedy $z_3(t) = 0$ na výstupoch jednotlivých integrátorov je:

$$z_1 = -\left(\frac{\dot{x}}{500}\right)$$

$$z_2 = -az_1 = +a\left(\frac{\dot{x}}{500}\right)$$

$$z_3 = -4\int\left\{\frac{1}{a+1}\left[-\left(\frac{\dot{x}}{500}\right)\right] + \frac{1}{a+1}\left[-a\left(\frac{\dot{x}}{500}\right)\right]\right\}\mathrm{d}t =$$

$$= 4\frac{1+a}{a+1}\int\left(\frac{\dot{x}}{500}\right)\mathrm{d}t = \left(\frac{x}{125}\right)$$

3. V okamihu dopadu zmení sa polarita napätia $z_3(t)$ a v dôsledku toho ovládací obvod uvedie počítač do stavu „počiatočné podmienky“. Preto aj nor-

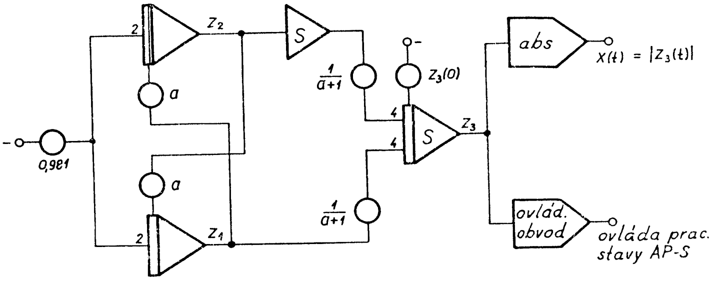
málny integrátor bude v tomto stave a teda bude sledovať napätie privedené na vstup P, doplnkový integrátor a S-integrátor budú v stave „riešenie". Po dobu pokiaľ výstup S-integrátora $z_3(t)$ je záporný, platí:

$$z_2 = -\left(\frac{\dot{x}}{500}\right)$$

$$z_1 = -az_2 = +a\left(\frac{\dot{x}}{500}\right)$$

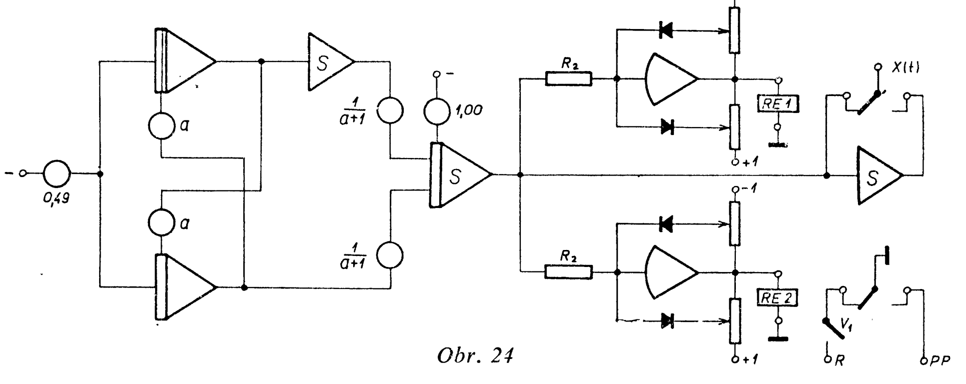
$$z_3 = -4\int\left[\frac{1}{a+1}\left(\frac{\dot{x}}{500}\right) + \frac{1}{a+1}\,a\left(\frac{\dot{x}}{500}\right)\right]\mathrm{d}t = -\left(\frac{x}{125}\right)$$

4. Od okamihu $z_3(t) = 0$ počas periody $z_3(t) > 0$ pracovné stavy integrátorov budú opäť ako v bode 2, atď.



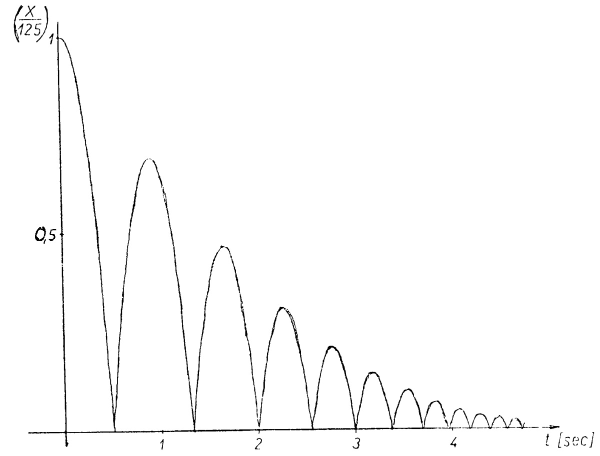
Obr. 23.

Ako vidíme počítač AP-S podľa tejto programovej schémy berie periodu po každom náraze ako nový podprogram s počiatočnou rýchlosťou $a\dot{x}(t_{di})$, kde t_{di} sú okamihy dopadu guľky.

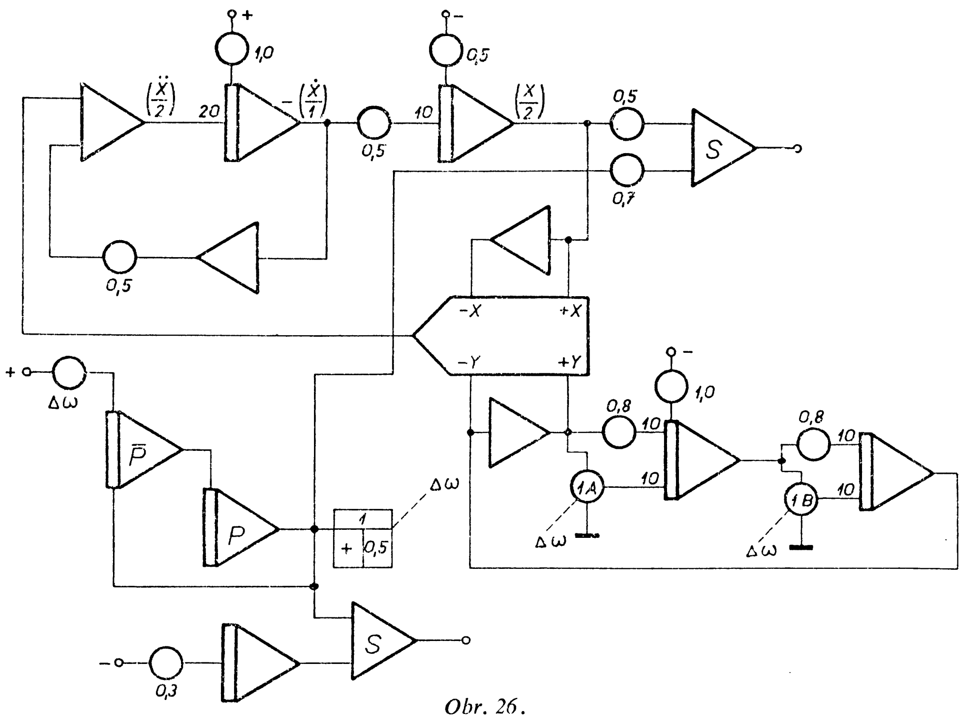


Obr. 24

Podrobná programová schéma (4-krát spomalená) s rozkresleným ovládacím obvodom a na stavoch počítača nezávislým obvodom pre absolútnu hodnotu je na obr. 24. Pracovné stavy počítača sú dané polohou kontaktu polarizovaného relé 2. Svorky označené R a PP. sú na zadnej strane počítača v zásuvke pre súbežný chod viacerých počítačov. Riešenie sa spustí zapnutím kľúča V_1. Výsledky kreslené súradnicovým zapisovačom pre $a = 0{,}8$ ukazuje obr. 25.



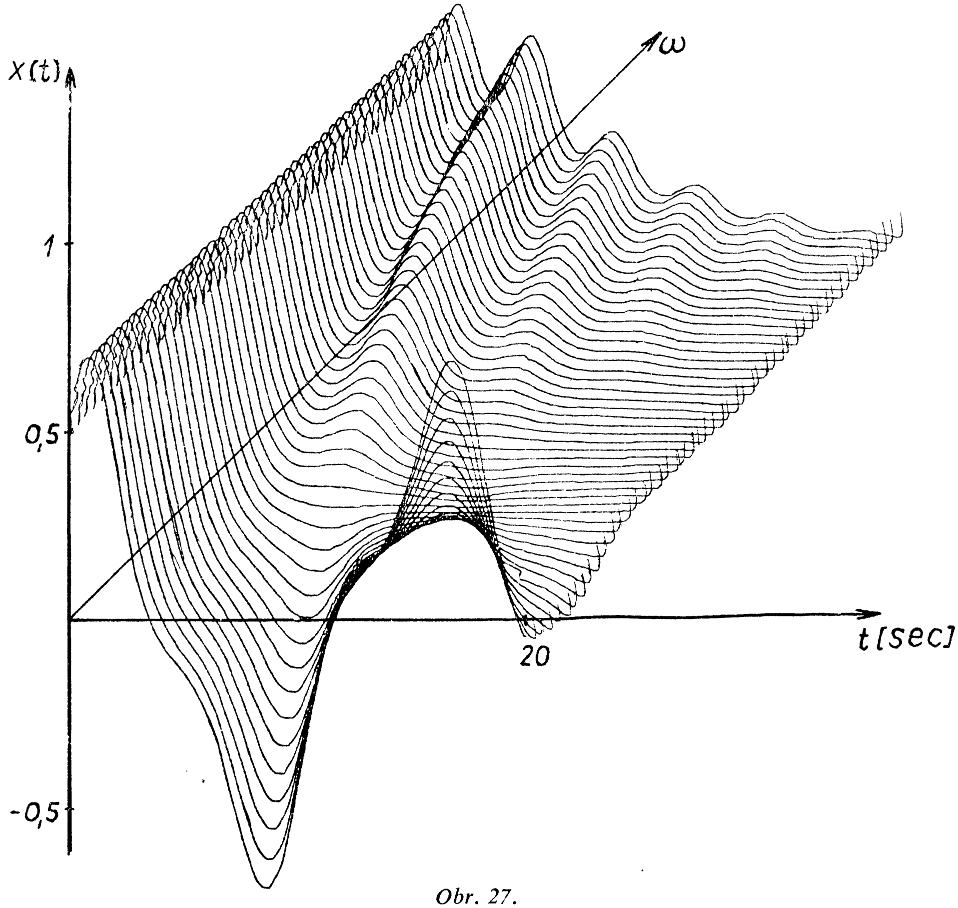
Obr. 25.



Obr. 26.

d) Trojrozmerný záznam výsledkov

Realizovaním schodovitej zmeny začiatku priebehov na zapisovači alebo osciloskope pomocou akumulačného obvodu (obr. 10), resp. $\bar{I}$-integrátora (obr. 14-a,-b), možno dosiahnúť trojrozmerný efekt záznamu výsledkov. Taký záznam má veľkú výhodu pri študovaní vplyvu zmien parametrov, počiatočných podmienok a pod. Skutočnosť, že počítač AP-S je určený predovšetkým k účelom výuky na stredných a vysokých školách, zvyšuje význam trojrozmerného záznamu výsledkov.



Obr. 27.

Príklad: Treba vyšetriť vplyv parametra ω v intervale $\langle 0{,}8; 1{,}8 \rangle$ na riešenie diferenciálnej rovnice

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x \sin \omega t = 0$$

s počiatočnými podmienkami $x(0) = 1$ a $\dot{x}(0) = 1$, pre $t \in \langle 0, 20 \rangle$.

Príklad sme riešili pomocou dvoch AP-S, prepojených pre súbežný chod a servonásobičky SENAS-2. Podrobná programová schéma úlohy, 10-krát zrýchlená, je na obr. 26. Ako vidieť, ten istý akumulačný obvod sa používa na posuv začiatku riešení, aj na generovanie zmien parametra ω. Po každom repetičnom cykle hodnota ω sa zväčší o $\Delta\omega = 0{,}02$. Výsledky kreslené súradnicovým zapisovačom BAK-II sú na obr. 27.

Literatúra

B. Vystavěl a kol.: Analogový počítač TESLA AP-S ve školní praxi. Pardubice, 1969.

I. Plander: Elektronické analógové počítače. Bratislava, 1968.

I. Plander: Matematické metódy a programovanie analógových počítačov. Bratislava, 1969.

B. Mirtes: Hybridní počítače. Praha, 1969.

ČETL CAUCHY BOLZANA PŘED NAPSÁNÍM COURS D'ANALYSE?*

Ivor Grattan-Guinness, Barnet

Je dobře známo, že když Cauchy v roce 1821 publikoval svůj *Cours d'Analyse*[1]), předešel ho v některých revolučně nových myšlenkách už v roce 1817 Bolzanův článek o „ryze analytickém" důkazu věty, že pro spojitou funkci $f(x)$ nabývající v bodech $x = a$ a $x = b$ hodnot s opačnými znaménky leží v intervalu (a, b) alespoň jeden kořen rovnice $f(x)$[2]). Záměr této poznámky tkví ve stručném upozornění na to, že Cauchy byl dobře obeznámen s Bolzanovou prací, a aniž by se o tom zmínil, z ní čerpal.

Historický problém je ovšem komplikován okolností, že pro tuto skutečnost nemáme žádný doklad a autoru této poznámky není znám žádný tištěný či rukopisný materiál, který by Cauchyho znalost Bolzanovy práce prokazoval. Nicméně se zdá, že vedlejší nepřímé indicie ukazující na příbuznost úvah jsou velmi závažné a lze je sledovat v několika oblastech.

---

*) Tuto poznámku (opírající se o obsáhlou práci — viz pozn. 5) do češtiny přeložil J. Folta, kterému autor děkuje za upozornění na české práce věnované vývoji analýzy v 19. století (I. G.-G.).

K metodice této poznámky i k vedení jejích argumentů je možno mít výhrady; lze ji však chápat jako podnět pro další a hlubší prozkoumání vztahů Bolzano—Cauchy (pozn. překl.).

[1]) *A. L. Cauchy*, Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique 1re Partie: Analyse Algébrique (více nebylo publikováno), Paris 1821; *Cauchy*, Oeuvres, (2), 3.

[2]) *B. Bolzano*, Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege, Prag 1817; Abhandlungen d. Königlichen Böhmischen Gesellschaft der Wiss. (3), 5, 1814—17, vydáno 1818; zvláštní paginace 1—60. Práce byla několikrát znovu vydána a přeložena, český překlad viz v knize: *A. Kolman*, Bernard Bolzano, Praha 1958, str. 167—200.