Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Judith V. Grabiner

Závisí matematická pravda od času?

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 25 (1980), No. 2, 80--90

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139130

Závisí matematická pravda od času?

Judith V. Grabinerová, California, USA *)

1. Úvod

Závisí matematická pravda od času? Naša bezprostredná odpoveď by asi znela, že nezávisí. Isteže pripúšťame, že miery pravdivosti v prírodných vedách sa menili; bola koperníkovská revolúcia v astronómii, darwinovská v biológii, einsteinovská vo fyzike. Ale vyskytujú sa podobné vedecké revolúcie aj v matematike? Matematici na túto otázku často odpovedali tak ako HERMANN HANKEL, matematik 19. storočia, ktorý napísal: ,,Vo väčšine vied jedna generácia búra, čo iná vybudovala a nasledovník popiera to, čo tvrdil jeho predchodca. Len v matematike vytvára každá generáca ďalšiu stavbu na tých istých starých základoch.“ (Hankel [20], str. 25).

Hankelov názor však nie je celkom správny. V matematike bolo niekoľko veľkých zmien. Vezmime napríklad axiomatizáciu geometrie v starovekom Grécku, ktorá zmenila matematiku z experimentálnej vedy na vedu intelektuálnu. A ďalej uvážme, čo znamenal objav neeuklidovských geometrií a nekomutatívnych algebier v 19. storočí; tento vývoj viedol k uvedomeniu si, že matematika nie je súhrn navzájom nesúvisiacich poznatkov, ale že je to logicky súvislá veda o abstraktných systémoch. To bol podstatný obrat v myslení, ktorý zmenil názor matematikov na podstatu matematickej pravdy a na to, čo je v matematike dovolené a čo treba dokazovať.

Ďalšia veľká zmena v matematike sa odohrala na rozhraní 18. a 19. storočia a šlo v nej pôvodne o infinitezimálny počet. Spočívala v odmietnutí matematiky ako techniky počítania a honby za novými výsledkami v prospech matematiky jasných definícií a presných dôkazov. Pretože o tejto zmene, hoci mala pre samotných matematikov veľký význam, historici a filozofi často nehovoria, nie je jej revolučný charakter dosť docenený. V našom článku sa najprv pokúsime ukázať, že táto veľká zmena skutočne nastala. Potom budeme skúmať, čo so sebou priniesla. Keď to spravíme, budeme sa môcť vrátiť k otázke v nadpise tohoto článku.

2. Matematická analýza v 18. storočí: prax a teória

Aby sme získali predstavu o matematickej praxi v 18. storočí, pozrime sa najprv na brilantné odvodenie dnes veľmi dobre známeho výsledku. Uvedieme tu, ako získal

---

*) J. V. GRABINER: *Is Mathematical Truth Time-Dependent?* The American Mathematical Monthly April 1974, pp. 354—365.

Preložila KRISTÍNA SMÍTALOVÁ.

LEONARD EULER nekonečný rad pre kosínus uhlu. Začal identitou

$$(\cos z + \mathrm{i} \sin z)^n = \cos nz + \mathrm{i} \sin nz\,.$$

Potom rozvinul ľavú stranu rovnosti pomocou binomickej vety. Reálnu časť tohoto binomického rozvoja položil rovnú cos nz. Dostal tak

$$\cos nz = (\cos z)^n - \frac{n(n-1)}{2!}(\cos z)^{n-2}(\sin z)^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}(\cos z)^{n-4}(\sin z)^4 - \dots .$$

Nech z je nekonečne malý oblúk a nech n je nekonečne veľké. Potom je

$$\cos z = 1, \quad \sin z = z, \quad n(n-1) = n^2, \quad n(n-1)(n-2)(n-3) = n^4, \quad \text{atd.}$$

Rovnosť má teraz známy tvar

$$\cos nz = 1 - \frac{n^2z^2}{2!} + \frac{n^4z^4}{4!} - \dots .$$

No pretože z je nekonečne malé a n nekonečne veľké, Euler usudzuje, že nz je konečná veličina. Nech teda $nz = v$. Modernému čitateľovi sa to môže zdať neuveriteľné; jednako len máme

$$\cos v = 1 - v^2/2! + v^4/4! - \dots .$$

(Pozri EULER [16], časti 133–4 a STRUIK [32], str. 348–9.)

Teraz, keď sme situáciu znázornili na príklade, môžeme robiť všeobecné závery o metódach, ktorými pracovali matematici 18. storočia. Po prvé, primárny dôraz sa kládol na dosiahnutie výsledku. Všetci matematici poznajú mnohé z výsledkov z toho obdobia, ktoré majú mená LEIBNIZA, BERNOULLIHO, L'HOSPITALA, TAYLORA, EULERA a LAPLACEA. Ale je skoro isté, že tieto výsledky boli pôvodne získané cestami úplne odlišnými od spôsobov, akými sa dokazujú dnes. Pochybujeme o tom, že Euler a jeho súčasníci by boli schopní odvodiť svoje výsledky aj vtedy, keby boli viazaní našimi nárokmi na presnosť. V tom je jeden z veľkých rozdielov medzi tým, ako sa robila matematika v 18. storočí a tým, ako sa robí teraz.

Čo priviedlo matematikov 18. storočia k názoru, že výsledky sú dôležitejšie ako presné dôkazy? Jeden z dôvodov je ten, že aj matematika zohrala svoju úlohu vo veľkej explózii vo vede, známej ako vedecký prelom (HALL [19]). Hlavným cieľom všetkých vied už od čias renesancie bolo totiž získavať nové vedomosti. Už od prvého veľkého objavu v matematike – riešenia kubickej rovnice, publikovaného v roku 1545 – rozširovať matematické poznanie znamenalo hľadať nové výsledky. Objav infinitezimálneho počtu na konci 17. storočia zintenzívnil túto snahu; bola tu nová silná metóda, ktorej možnosti využitia sa zdali nesmierne. Mohli to byť azda aj vzrušujúcejšie úlohy, ako pokus o rozriešenie pohybovej rovnice celej slnečnej sústavy. Infinitezimálny počet bol ideálnym prostriedkom na získavanie nových výsledkov, i keď veľa matematikov nevedelo presne vysvetliť, prečo tento prostriedok funguje.

Ak bolo prvoradým cieľom matematiky takmer celého 18. storočia získavať nové výsledky, je prirodzené očakávať, že matematici tohoto obdobia používali metódy, ktoré k nim viedli. Pre matematikov 18. storočia účel svätí prostriedky. A úspechov bolo veľa. V 18. storočí vznikli nové matematické odbory, každý s vlastnými metódami a s vlastným okruhom výsledkov. Napríklad variačný počet a teória parciálnych diferenciálnych rovníc na jednej strane a deskriptívna geometria na druhej strane. Aj existujúce odbory ako matematická fyzika a teória pravdepodobnosti stratili svoju jednoduchosť a prehľadnosť.

Druhý záver, ktorý môžeme vysloviť o matematike 18. storočia a jej túžbe po výsledkoch je ten, že matematici veľmi dôverovali moci symbolov. Niekedy sa zdá, akoby sa bolo predpokladalo, že ak sa niečo dá zapísať pomocou navzájom súvisiacich symbolov, pravdivosť tvrdenia je zaručená. A tento predpoklad sa neaplikoval len na konečné formuly. Konečné metódy sa mechanicky prenášali na nekonečné procesy. Veľa dôležitých faktov o nekonečných mocninných radoch sa objavilo tak, že sa rady interpretovali ako veľmi dlhé polynómy (REIFF [30]).

Táto viera v symboly v 18. storočí je istou anomáliou v histórii matematiky. Treba sa pri nej trošku pristaviť. Vychádzala z úspechov algebry a infinitezimálneho počtu. Vezmime najprv algebru. Všeobecné symbolické označenia typu, ktorý dnes pokládame za samozrejmý, zaviedol v roku 1591 francúzsky matematik FRANCOIS VIÈTE*) (Boyer [6], str. 59—65 a Struik [32], str. 77—81). Táto notácia bola najsilnejším prostriedkom k objavovaniu nového v celej histórii matematiky. Ukážme si jej možnosti na príklade. Skúmajme identitu

$$(2.1)\quad (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc\,.$$

Symbolické označenie nám dovoľuje objaviť niečo, čo by sme nezistili ani po prepočítaní tuctov numerických príkladov: Vzťah medzi koreňmi a koeficientami každej polynomickej rovnice ľubovoľného stupňa. A ešte niečo: polynóm (2.1) je tretieho stupňa a má tri korene. Po ďalšom skúmaní identít typu (2.1) vyslovil ALBERT GIRARD v roku 1629 tvrdenie, že každý polynóm n-tého stupňa má n koreňov — prvú formuláciu toho, čo GAUSS neskôr nazval základnou vetou algebry.

Ale prečo pokladali matematici 18. storočia algebraické formuly typu (2.1) za správne? Pretože, ako tvrdil NEWTON, práve algebra je „univerzálnou aritmetikou" (Newton [29]). Vzťah (2.1) platí, lebo je zovšeobecnením platných aritmetických tvrdení. Čo však s nekonečnými premennými, podobne ako v predošlom Eulerovom príklade? Odpoveď je analogická. Máme tu predsa artimetiku nekonečných desatinných zlomkov, môžeme ju zovšeobecniť a vytvoriť algebru nekonečných radov (Newton [28], str. 6). Nekonečné procesy sú podobné konečným, ibaže sú dlhšie.

Viera v symboliku, živená algebrou, ešte vzrástla po úspechoch infinitezimálneho počtu. Leibniz vynašiel označenia dy/dx a $\int y dx$ výslovne pre uľahčenie nášho myslenia. Takéto označenie je skutočne výhodné. Mali by sme si s vďačnosťou spomenúť na Leibniza vždy vtedy, keď meníme premenné za integračným znamienkom. Predpokladajme,

*) Symboly dnešného typu zaviedol až DESCARTES vo svojej *Geometrii* v roku 1639. (Pozn. red.)

že y je funkciou x a x je funkciou t; chceme nájsť $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$. Nie Leibniz, ale Leibnizovo označenie nám umožňuje objaviť pravidlo

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t).$$

Úspech Leibnizovho označovania v infinitezimálnom počte ešte zosilnil dôveru matematikov v správnosť záverov potvrdených symbolickými argumentami.

V 18. storočí sa viera vo všemocnosť dobrého označenia rozšírila aj za hranice matematiky. Ona viedla napríklad chemika LAVOISIERA k predvídaniu „chemickej algebry". V jej duchu potom BERZELIUS v roku 1813 navrhol chemické symboly podobné tým, ktoré používame dnes. Každý, kto niekedy zostavoval chemické rovnice, vie, akým spôsobom pritom myslíme pomocou symbolov. Skutočnosť, že myšlienka o správnosti čisto symbolických dôvodov sa rozšírila z matematiky na ďalšie obory, dokazuje, aká výrazná idea to musela byť.

To, čo sa tu povedalo, by však nemalo čitateľa priviesť k názoru, že všetci matematici 18. storočia boli celkom nevšímaví k základom analýzy. Isto, a asi aj dosť podrobne, diskutovali o jej predmete. Nebudeme tu sumarizovať rôzne pokusy vysvetliť v 18. storočí podstatu $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, limít, nekonečna a integrálov, ktoré trvali celé storočie, správne nazvané CARLOM BOYEROM „obdobím nerozhodnosti", čo sa týka podstaty pojmov ([7], kap. VI). Čo však treba pre naše účely zdôrazniť, je, že skúmanie základov nebolo pre matematikov 18. storočia tým hlavným. Dôležité je, že matematická prax nezávisela od dokonalého pochopenia hlavných použitých pojmov.

Ale situácia v matematike v 19. storočí už bola iná. Analysti 19. storočia, od CAUCHYHO a BOLZANA, zaviedli presné počítanie s limitami, konvergenciou a spojitosťou, založené na nerovnostiach, a hľadali presné dôkazy viet o týchto pojmoch. Vieme, ako tieto dôkazy vyzerali; stále ich používame. Nový smer v analýze 19. storočia sa od predchádzajúceho nelíši len v technike počítania. Dôležitejšia zmena nastala v spôsobe matematického myslenia. Teraz, keď sme už načrtli vývoj v 18. storočí, môžeme sa zaoberať – z historického hľadiska – najzaujímavejšími otázkami tohoto článku. Čo spôsobilo ten rozdiel medzi starým a novým chápaním? Ako sa stala matematika tým, čím je dnes?

K tomu, aby táto zmena mohla nastať, boli potrebné dve veci. Po prvé, bolo treba poznať technické postupy potrebné na presné dôkazy. Takéto postupy už boli známe; o histórii najdôležitejších techník budeme hovoriť vo 4. časti článku. Po druhé, bolo treba zmeniť postoj k základom matematiky; bola to, aj keď nie postačujúca, tak aspoň nutná podmienka pre zavedenie presnosti. Pozrime sa, ako sa pod novým zorným uhlom javili základy infinitezimálneho počtu medzi 18. a 19. storočím. Boli príčiny zmeny postoja k základom v samotnej matematike? Alebo boli motivované dôvodmi mimo matematiky? Preskúmajme viacero možností.

3. Prečo sa zmenili kritériá matematickej pravdivosti?

Prvé vysvetlenie, ktoré nám príde na um, je to, ktoré používame, keď chceme presvedčiť svojich študentov, že naše požiadavky na presnosť sú oprávnené: Infinitezimálny počet bolo treba vybudovať presne práve preto, aby sme sa vyhli omylom, a ak sa už chyby vyskytli, aby sme ich vedeli napraviť. To však v prvej etape rozvoja analýzy vôbec nebolo dôležité. V matematike 18. storočia je totiž prekvapujúco málo chýb. To má dve hlavné príčiny. Po prvé, niektoré výsledky sa dali overiť numericky alebo dokonca experimentálne, takže ich platnosť sa dala preveriť bez seriózneho základu. Po druhé, čo je ešte dôležitejšie, matematici v 18. storočí mali takmer neomylnú intuíciu. Hoci neboli vedení presnými definíciami, predsa len hlboko chápali vlastnosti základných pojmov analýzy. Tento záver potvrdzuje aj skutočnosť, že mnohé očividne neisté argumenty, používané v 18. storočí, možno zachrániť a urobiť ich presnými pomocou vhodných predpokladov.

Potreba vyhnúť sa chybám sa však stáva dôležitejšou koncom 18. storočia, kedy sa začal zvyšovať záujem matematikov o komplexné funkcie, o funkcie viacerých premenných a o trigonometrické rady. V týchto oblastiach nájdeme veľa prijateľných tvrdení, ktoré je pomerne ťažko overiť intuitívne. Vzrastajúci záujem o takéto výsledky mohol pomôcť sústrediť pozornosť na otázku základov.

Druhé vysvetlenie, ktoré nám môže prísť na um, je, že infinitezimálny počet sa stal presným preto, lebo sa začal zovšeobecňovať. 18. storočie vyprodukovalo veľké množstvo výsledkov. Potreba zjednotiť ich by mohla automaticky viesť k vybudovaniu presného axiomatického základu. Ale už sto rokov predtým, ako začal pracovať Cauchy, jestvovalo veľa výsledkov a žiadna snaha po ich usporiadaní sa neprejavila. Koncom 18. storočia sa však mnohým matematikom zdalo, že tempo získavania nových výsledkov sa spomaľuje. Tento dojem mal aj určité opodstatnenie, lebo väčšina výsledkov dosiahnuteľných mechanickou aplikáciou metód 18. storočia, už bola získaná. Možno, že keď bol teraz pokrok pomalší, bol aj čas na obzretie sa a na rekapituláciu toho, čo sa už urobilo (Struik [31], str. 136–7).

Tretie možné vysvetlenie súvisí s prvou jestvujúcou presnosťou – v geometrii. Už od čias starých Grékov každý vedel, že matematika má byť presná. Dalo sa predpokladať, že matematikov začne preto trápiť svedomie a že analysti privedú svoje metódy na starú dobrú úroveň. Euklidovská geometria bola skutočne modelom pre novú presnosť. No staré idey presnosti predsa len nestačili k tomu, aby sa matematici usilovali spraviť presným infinitezimálny počet; dokazuje to celých stopäťdesiat rokov medzi Newtonom a Cauchym. To je pravda, i keď rozpor medzi euklidovským štandardom a súčasnou praxou nezostal bez povšimnutia. George Berkeley, cloyonský biskup, namieril v roku 1734 svoj rozhodný a fundovaný útok proti infinitezimálnemu počtu. Tvrdil, že to nie je taká presná teória, akou by matematika mala byť. Berkeley chcel brániť náboženstvo proti obvineniam z iracionálnosti, ktoré vznášali vedci a matematici 18. storočia. Tvrdil, že jeho protivníci nemajú ani matematiku rozumne zdôvodnenú. Priznáva, že výsledky infinitezimálneho počtu sú pravdivé, ale napáda jeho metódy. Berkeleyho útok *The Analyst* je majstrovskou ukážkou polemiky (Struik [32], str. 333–338 a Berkeley [3]). O „veľmi malých prírastkoch", ktoré majú rozhodujúcu úlohu v Newtonovom kalkule, hovorí: „A čo sú to tie veľmi malé prírastky? Nie sú to ani konečné veličiny, ani veličiny nekonečne malé, ani nulové veličiny. Nie sú to len tiene miznúcich veličín?" Berkeleyho útok, ktorý je vlastne systematickou matematickou kritikou niektorých základných tvrdení Newtonovho kalkulu, vyprovokoval mnohých matematikov k písaniu spisov na obranu svojej vedy. Predsa však ani Berkeleyho útok, ani odpovede naň nespôsobili tú zmenu v postoji k presnosti, ktorú sa tu pokúšame vysvetliť. Predovšetkým, obranné argumenty neboli veľmi presvedčivé (CAJORI [8]). A potom, skúmanie základov sa ešte nepokladalo za serióznu matematiku. Berkeley však priviedol ľudí k tomu, aby sa viac ako predtým zaoberali problémom základov matematiky. Diskusie o základoch, ktoré viedli MACLAURIN, D'ALEMBERT a LAGRANGE, boli všetky aspoň čiastočne vyvolané Berkeleyho prácou. No Berkeleyho útok sám o sebe nestačil k tomu, aby sa základy stali predmetom sústredenejšej pozornosti matematikov.

Keď sa hovorí o zmene v pomere k presnosti, treba spomenúť ešte jeden činiteľ. o ktorom sa síce v tejto súvislosti hovorí zriedka, ale ktorý bol dôležitý. Matematici museli vyučovať. V posledných rokoch 18. storočia sa odohrala veľká sociálna zmena, Predtým žili matematici často na kráľovských dvoroch; ich prácou bolo robiť matematiku a pridávať tak na sláve alebo vzdelaní svojmu patrónovi. No väčšina matematikov od čias Veľkej francúzskej revolúcie založila svoju existenciu na vyučovaní (Struik [31], str. 140, Ben David [2], str. 95, 108).

Zmena v ekonomických pomeroch matematikov mala aj iné príčiny ako úpadok niektorých kráľovských dvorov. Veda v 18. storočí bola rozpínavá. Bol to „Newtonov vek" a čas úspechu newtonovskej vedy. Vlády a obchodníci mali pocit, že veda je dôležitá a že môže byť užitočná; vedci ich v tejto viere podporovali. Preto vlády založili vzdelávacie inštitucie, aby podnecovali rozvoj vedy. Boli založené vojenské školy, aby vychovávali budúcich dôstojníkov so znalosťami aplikovanej vedy. Na existujúcich univerzitách sa utvorili nové vedecké miesta. Ale zďaleka najdôležitejšou novou inštitúciou pre vedecké vzdelávanie, ktorá slúžila ako vzor pre iné národy, bola v 19. storočí École polytechnique v Paríži. Túto školu založila v roku 1795 revolučná vláda vo Francúzsku.

Prečo vlastne mohlo nové sociálne postavenie matematikov, pre ktorých sa stalo vyučovanie nutnosťou, pomôcť podporovať presnosť? Vyučovanie vždy donúti učiteľa starostlivo si rozmyslieť, na čom a ako budovať svoj predmet. Matematik môže pojmu rozumieť natoľko, aby ho mohol používať a môže sa pritom spoľahnúť na svoj prehľad získaný skúsenosťou. Ale nemôže to žiadať od študenta 1. ročníka, dokonca v 18. storočí. Začiatočník neprijme, keď sa mu povie: „Keby ste s týmto pojmom pracovali tri roky, pochopili by ste ho."

Čo je dôkazom toho, že vyučovanie pomohlo podnietiť záujem matematikov 18. a 19. storočia o to, aby vybudovali presnú analýzu? Po prvé, až do konca 18. storočia sa väčšina prác o základoch neuverejňovala vo vedeckých časopisoch, pretože základy matematiky sa nepokladali za dosť dôležitú matematickú (ale za filozofickú) otázku. Takéto práce sa namiesto toho objavovali v skriptách, učebniciach alebo v popularizačných prácach. Ešte v 19. storočí, keď už podstata pojmov bola pre matematikov dôležitá, záujem o ňu často vznikal pri vyučovaní. Práce o základoch analýzy od LAGRANGEA [23], [26], CAUCHYHO [10], [11], WEIERSTRASSA (KLEIN [21], str. 283–4, BOYER [7], str. 284–7) a DEDEKINDA [14], str. 1, vznikli z poznámok k prednáškam.

Každý z bodov, ktoré sme doteraz spomenuli, pomôže vysvetliť, čo priviedlo matematikov k tomu, že sa od hľadiska 18. storočia, orientovaného na výsledky, priklonili k presnejšej úrovni 19. storočia. Možno určiť ešte jeden katalyzátor tejto zmeny: bol to JOSEPH-LOUIS LAGRANGE. Lagrangeov vlastný záujem o problémy základov analýzy sa prejavil vtedy, keď mal vyučovať infinitezimálny počet na vojenskej škole v Turíne [24]. V roku 1784 vypísala Berlínska akadémia vied cenu za rozriešenie problému základov infinitezimálneho počtu. To podnietilo vznik prvých väčších príspevkov – v knižnom rozsahu – k vyriešeniu tohoto problému, ktoré boli napísané na kontinente (pozri Huilier [27], Carnot [9], Boyer [7], str. 254–255, a Gillispie [18], str. 149–150). Sú to predovšetkým Lagrangeove prednášky na École polytechnique, publikované vo dvoch veľmi rozsiahlych knihách, ktoré sú pokusom zaradiť kalkul do všeobecnejšieho algebraického rámca [26], [23]. Lagrange nemohol správne rozriešiť problém základov infinitezimálneho počtu – už dlho je pre nás neprijateľná jeho *definícia* $f'(x)$ ako koeficientu pri h v Taylorovom rozvoji pre $f(x + h)$. No jeho vízia o redukovaní kalkulu na algebru mala rozhodujúci vplyv na prácu Bolzana [5] a, ako budeme ďalej vidieť, aj Cauchyho.

Predpokladajme teraz, že sme sa rozhodli urobiť svoj predmet presným. Čo k tomu treba spraviť? Treba zaviesť správne definície a ovládať techniku dokazovania, aby sme z definícií mohli odvodiť známe výsledky. Ešte musíme odpovedať na otázku: Skadiaľ tieto dôkazy a definície vziať?

Matematici 18. storočia objavili veľa techník a niektoré z vlastností, ktoré sa mohli stať základom definícií, hoci nevedeli, čo vlastne urobili. Udivuje nás, že boli tak blízko k mnohým postupom, ktoré používal Cauchy v presných dôkazoch. Táto skutočnosť dokazuje, že zmenu zorného uhla pohľadu na základy analýzy si vyžadovalo samo jej spresňovanie; nebol to len prirodzený vývoj mimo matematiky 18. storočia.

4. Počiatky presnosti 19. storočia sú v 18. storočí

Uvedieme niekoľko príkladov z prác z 18. storočia, ktoré prešli do definícií a dôkazov 19. storočia. Sústredíme sa pritom na náuku o aproximáciách. Matematici 18. storočia, či už riešili algebraické alebo diferenciálne rovnice, poznali veľa užitočných približných metód. Ak je hlavným cieľom získať výsledok, je približný výsledok lepší ako žiadny. Paradoxné je to, že matematici 18. storočia boli veľmi presní, keď aproximovali. Ich práca s nerovnosťami v odhadoch sa neskôr stala základom presnej analýzy.

Budeme sa tu zaoberať dvoma skupinami prác o aproximáciách z 18. storočia: prácami skutočne venovanými aproximáciám a tými, kde sa počítala chyba odhadov. Pozrime sa, čo z nich použili analysti 19. storočia.

Matematici 19. storočia sa na približné metódy, ktoré sa používali v 18. storočí, pozerali z nového hľadiska. Približné riešenie chápali ako konštrukciu takého riešenia, a teda ako dôkaz jeho existencie. Urobil to napríklad Cauchy, keď dosiahol výsledok, ktorý sa dnes volá Cauchyho-Lipschitzova metóda dôkazu existencie riešenia diferenciálnej rovnice; tento dôkaz je založený na približnej metóde, ktorú objavil Euler ([15], str. 399). Podobne Cauchyho elegantný dôkaz vety o tom, že spojité funkcie nadobúdajú v intervale [a, b] každú hodnotu medzi $f(a)$ a $f(b)$, vychádzal z približnej metódy 18. storočia (Lagrange [22], str. 260–1, [25], časti 2, 6, Cauchy [10], str. 378–80). Cauchy predpokladal, že $f(a)$ a $f(b)$ majú pre spojitú funkciu $f(x)$ opačné znamienka. Rozdelil interval $[a, b]$ na n častí a usudzoval, že v $[a, b]$ sú aspoň dve hodnoty x, líšiace sa o $(b - a)/n$, v ktorých má $f(x)$ rôzne znamienka. Potom celý postup opakuje na intervale medzi týmito dvoma novými bodmi, na intervale dĺžky $(b - a)/n$, čo dáva dve ďalšie hodnoty, ktoré sa od seba líšia o $(b - a)/n^2$, a tak ďalej. Zatiaľ čo Lagrange použil tento postup k postupným aproximáciám koreňa polynómu, ktorý sa nachádza medzi bodmi $x = a$ a $x = b$, Cauchy týmto postupom dokázal existenciu spoločnej limity ξ dvoch postupností hodnôt premennej x: tých, kde má f kladné znamienko, a tých, v ktorých má f záporné znamienko. To že pôvod Cauchyho dôkazu treba hľadať v algebraických aproximáciách, vidno aj z kontextu, v ktorom ho sám uviedol: *Poznámka venovaná skúmaniu približného riešenia algebraických rovníc* ([10], str. 378).

Iným príkladom premeny aproximácií na dôkaz existencie je Cauchyho teória určitého integrálu. V 18. storočí sa integrál zvyčajne definoval ako obrátenie derivácie. No vedelo sa aj to, že hodnotu integrálu možno aproximovať súčtom. Cauchy si vzal Eulerovu prácu o aproximovaní hodnôt určitých integrálov pomocou súčtov ([15], str. 184–7) a pozrel sa na ňu celkom novým pohľadom. Cauchy *definoval* určitý integrál ako limitu súčtu, dokázal existenciu určitého integrálu spojitej (v skutočnosti rovnomerne spojitej) funkcie a potom použil svoju definíciu k tomu, aby dokázal základnú vetu integrálneho počtu ([11], str. 122–5, 151–2).

Teraz vezmime ďalší typ výsledku z 18. storočia o aproximáciách: priblíženia určené spolu s odhadom chyby. Tieto výsledky vyzerali asi takto: k danému n vedel matematik vypočítať horné ohraničenie chyby, ktorej sa dopustil, ak pokladal n-tú aproximáciu za presnú hodnotu. Koncom 18. storočia sa pri určovaní odhadov chýb používalo počítanie s nerovnosťami s veľkou zručnosťou (D'Alembert [13], str. 171–183, a Lagrange [25], str. 46–7, 163). Cauchy, Abel a ich nasledovníci vzali postup aproximovania za iný koniec. Namiesto toho, aby hľadali hornú hranicu chyby pre *dané n*, predpísali si to, čo je vlastne „chybou" – číslo epsilon – a (za predpokladu, že proces konvergoval) mohli vždy nájsť také n, že počnúc n-tou aproximáciou bola chyba menšia než ε. Zdá sa, že toto je príčina, prečo používa Cauchy písmeno ε v jeho bežnom modernom význame ([10], str. 64–5 a ďalej. Abel [1], Cauchy [10], str. 400–415). Cauchyho definícia konvergencie, ktorá je v podstate našou definíciou, je založená na tomto princípe ([10], kap. VI.)

Iný spôsob ako matematici prispôsobili 19. storočiu tie výsledky z 18. storočia, v ktorých sa používali nerovnosti, bol tento: Zhromaždili fakty, známe v 18. storočí v špeciálnych prípadoch, a zmenili ich tak, aby platili vo všeobecnosti. Napríklad D'Alembert a iní dokázali konvergenciu niektorých špeciálnych radov tak, že ukázali, že sú člen po člene menšie ako konvergentný geometrický rad (D'Alembert [13]). V roku 1813 použil Gauss toto kritérium na presné vyšetrovanie konvergencie hypergeometrického radu [17]. Cauchy použil porovnanie daného radu s geometrickým k tomu, aby odvodil a dokázal niektoré všeobecné kritéria konvergencie radov: podielové, logaritmické a odmocninové kritérium [10], str. 121–127.

Nakoniec uveďme ešte jeden veľmi dôležitý príklad, výsledok z 18. storočia, ktorý sa v 19. storočí trošku zmenil: Je to vlastnosť derivácie vyjadrená vzťahom

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + hV, \tag{4.1}$$

kde veličina V ide k nule spolu s h. Ako sme už poznamenali, Lagrange definoval $f'(x)$ ako koeficient pri h v Taylorovom rozvoji $f(x + h)$. Takže vlastne „odvodil" (4.1) z tohoto Taylorovho rozvoja, a to tak, že pokladal V za nekonečný konvergentný rad v premennej h. Lagrange použil (4.1) na vyšetrovanie mnohých vlastností derivácie. Pritom pod slovami „V ide k nule pre h idúce k nule" rozumel, že k danému číslu D možno nájsť dostatočne malé h tak, že $f(x + h) - f(x)$ „bude medzi" $h[f'(x) - D]$ a $h[f'(x) + D]$ ([23], str. 87). Najprv Cauchy a po ňom Bolzano a Weierstrass urobili zo vzťahu (4.1) a k nemu patriacich nerovností *definíciu* derivácie f'(x). (Cauchyho definícia bola v skutočnosti verbálna, no do jazyka nerovností ju preložil v dôkazoch. Viď Cauchy [11], str. 44–5, 122–3, Bolzano [4], kap. 2 a 7, str. 285–7.) Táto definícia zaručila správnosť výsledkov o $f'(x)$, ktoré Lagrange odvodil zo (4.1), napríklad vety o prírastku funkcie. (Treba však poznamenať, že nie všetky výsledky se takto stali presnými, napríklad situácia okolo konvergencie a rovnomernej konvergencie sa nevyjasnila až do r. 1840.)

Na tomto mieste sme zámerne nehovorili o tom, čo všetko nové a originálne vytvorili v základoch analýzy veľkí matematici 19. storočia. Najmä Cauchy vymyslel krásne dôkazy o konvergentných potenčných radoch v reálnej a komplexnej premennej, o reálnych a komplexných integráloch a prispel aj k rôznym predmetom mimo analýzy. Ale pre naše účely potrebujeme také výsledky, aké sme vybrali. Buď veci, dokazujúce to, že sa znalosti známe z 18. storočia zovšeobecňovali, alebo to, že im 19. storočie dalo hlbší zmysel.

Bolo treba vynaložiť veľa úsilia, aby sa postupy 18. storočia zmenili tak, ako sme o tom hovorili. Ale nebola to len záležitosť pracovného vypätia. *Po prvý raz* sa správne formulovali problémy, na ktoré bolo treba odpovedať využitím a rozšírením už existujúcich techník. Práve to sa pokladá za veľkú zmenu v prístupe k veci. A skutočne to bola veľká zmena. Pre vznik hľadiska Bolzana a Cauchyho, ktoré sa od ich čias nezmenilo, bolo znovuzrodenie záujmu o presnosť práve také nevyhnuté ako možnosť použitia známych postupov. Matematika nepotrebuje len výsledky, ale aj jasné definície a presné dôkazy. Matematici sa — ako jednotlivci — môžu sústreďovať len na to, aby vytvorili účinné metódy a idey, ktoré možno využiť, ale matematická obec ako celok nemôže byť k presnosti ľahostajná.

5. Záver

Začali sme otázkou, či matematická pravda závisí od času. Matematická pravda je možno večná, ale naše vedomosti o nej sa menia. Na príklade sme sa presvedčili, že pomer k matematickej pravde sa menil v čase. V priebehu takejto zmeny v myslení sa staršie práce prehodnocujú. Niečomu sa na hodnote pridá, niečomu uberie.

Čo má robiť matematik, ak vie, že zmena hodnôt môže nastať?

Má na výber z troch možností. Po prvé, môže prijať istý relativizmus, ktorý bol vyjadrený vetou „čo dnes stačí, je správne". Matematická pravda je práve to, čo za ňu pokladajú redaktori časopisu Transactions. Je to užitočný názor, ale ak by sa všeobecne prijal, znamenalo by to, že Cauchy a Weierstrass by nikdy neboli prišli. Kritériá pravdivosti by sa nikdy nezmenili v žiadnom dôležitom smere, až kým by sa nevyskytli veľké omyly. Preto relativizmus, ktorý priviedol Cauchyho k tomu, aby zanechal vtedajšie základy matematiky, nebude stačiť nám.

Po druhé, môžeme sa pokúšať dosiahnuť najvyššiu úroveň, ktorú si môžeme predstaviť: nikdy nepoužiť argument, ktorý sme do všetkých dôsledkov nepochopili, len taký, o ktorom vieme všetko, až do bodky nad i a čiarky cez t. Ale to je dokonca ešte horšie. Euler prvý vedel, že pri práci s nekonečne veľkými a nekonečne malými veličinami sú ťažkosti. Keby bol chcel Euler písať na takej vysokej úrovni presnosti, ku ktorej učebnice niekedy vedú študentov, nebol by nikdy napísal ani čiarku. Žiadna matematická konštrukcia sa pred Cauchym a Weierstrassom nedala spraviť presne.

Preto navrhujem tretiu možnosť: Zmieriť sa so skutočnosťou, že kritériá pravdivosti v matematike sa menia. Matematika sa vyvíja dvoma smermi. Nielen postupným narastaním množstva výsledkov, ale aj náhlymi skokmi. Len ak prijmeme možnosť terajšieho omylu, môžeme dúfať, že budúcnosť prinesie podstatné zdokonalenie našich poznatkov. Môžeme sa pritom utešovať tým, že väčšina zo starých tehličiek nájde svoje miesto niekde v novej stavbe. Matematika nie je tou jedinou vedou bez náhlych zmien. Povedzme radšej, že matematika je oblasťou ľudskej činnosti, v ktorej každá nová etapa vývoja prináša so sebou najprevratnejšie, no pritom najmenej deštruktívne zmeny.

Tento článok bol pôvodne napísaný pre Mathematical Assotiation of America, Southern California Section, v marci 1972. Autorka vyjadruje svoju vďaku Elmerovi Tolstedovi za jeho podporu a pripomienky.

Literatúra

[1] N. H. Abel: *Recherches sur la série* $1 + (m/1)\,x + [m(m-1)/1.2]\,x^2 + [m(m-1)(m-2)/1.2.3]\,x^3 + \ldots$. Oeuvres complètes, Vol. I, Christiania, 1881.
[2] J. Ben David: *The Scientist's Role in Society.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1971.
[3] G. Berkeley: *The works of George Berkeley.* Vol. IV. Ed. A. A. Luce and T. E. Jessop. Edinburgh, 1948—1957.
[4] B. Bolzano: *Funktionenlehre.* Schriften, Band I, Prague, 1930.
[5] — *Rein analytisher Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine reellle Wurzel der Gleichung liege.* 1817, Engelmann, Leipzig, 1905.
[6] Carl Boyer: *History of Analytic Geometry.* Scripta Mathematica. New York, 1956.
[7] —*History of the Calculus and its Conceptual Development,* Dover, New York, 1959.
[8] F. Cajori: *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse.* Open Court, Chicago, 1931.
[9] L. N. M. Carnot: *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal,* Duprat, Paris, 1797.
[10] A.-L. Cauchy: *Cours d'analyse de l'école royale polytechnique.* Imprimerie royale, Paris, 1821 in Oeuvres Complètes, Series 2, Vol. III, Gauthier-Villars, Paris, 1897.
[11] — *Résumé des leçons données a l'école royale polytechnique sur le calcul infinitésimal.*Imprimerie royale, Paris, 1823, v Oeuvres Complètes, Series 2, Vol. IV, Gauthier-Villars, Paris, 1899.
[12] — *Exercices d'analyse.* 1840, in Oeuvres, Series 2, Vol. XI.
[13] Jean D'Alembert: *Réflexions sur les suites et sur les racines imaginaires.* Opuscules mathématiques, vol. V, Paris 1768, str. 171—215.
[14] Richard Dedekind: *Essays on the theory of numbers.* Dover, New York, 1963.
[15] Leonhard Euler: *Institutiones calculi integralis.* 1768, Opera Omnia, Series I, vol. XI, Teubner, Leipzig and Berlin, 1911.
[16] — *Introductio in analysis infinitorum.* 1748, Opera Omnia, Series I, vol. 8—9.

[17] K. F. Gauss: *Disquisitio generales circa seriem infinitam*

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha + 1)\, \beta(\beta + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma + 1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\, \beta(\beta + 1)(\beta + 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma + 1)(\gamma + 2)} x^3 + \dots .$$

1813, Werke, Vol. 3, str. 123—162; nemecký preklad, Berlin, 1888.

[18] C. C. Gillispie: *Lazare Carnot Savant.* Princeton, 1971.

[19] A. R. Hall: *The Scientific Revolution, 1500—1800.* Beacon, Boston, 1966.

[20] H. Hankel: *Die Entwicklung der Mathematik im letzten Jahrhundert,* 1884, citované podľa M. Moritz: *On Mathematics and Mathematicians,* Dover, New York, 1942, str. 14.

[21] F. Klein: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert.* 1926, nové vydanie Chelsea, New York, 1967.

[22] J.-L. Lagrange: *Leçons élémentaires sur les mathématiques, données a l'école normale en 1795.* Oeuvres, VIII, Gauthier-Villars, Paris, 1867—1892, str. 181—288.

[23] — *Leçons sur le calcul des fonctions.* 2. vydanie, 1806, Oeuvres, X.

[24] — *List Eulerovi, 24. novembra 1759.* Oeuvres, XIV, str. 170—174.

[25] — *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés.* 1808, Oeuvres, VIII.

[26] — *Théorie des fonctions analytiques.* 2. vydanie, 1813, Oeuvres, IX.

[27] S. L'Huilier: *Exposition élémentaire des principes des calculs supérierus.* Decker, Berlin, 1787.

[28] Isaac Newton: *On the analysis by equations of an infinite number of terms.* 1669, v D. T. Whiteside: *The Mathematical Works of Isac Newton,* Johnson Reprint, London and New York, 1964, vol. I.

[29] — *Universal Arithmetic.* 1707, v D. T. Whiteside: *The Mathematical Works of Isaac Newton,* vol. II, Johnson, London and New York, 1970.

[30] R. Reiff: *Geschichte der unendlichen Reihen.* Tübingen, 1889.

[31] D. J. Striuk: *Concise History of Mathematics.* Dover, New York, 1967.

[32] — *A Source Book in Mathematics, 1200—1800.* Harvard, Cambridge, 1967.

O tajích matematikovy práce*)

J. E. Littlewood

Co znamená být matematikem

O tomto tématu se dá říci mnoho. Za prvé matematik musí být naprosto čestný ve své práci, nikoliv na základě nějaké vyšší morálky, ale prostě proto, že s padělky by nemohl mít úspěch. Univerzitní profesoři humanitního zaměření, zejména v Oxfordu, prý věří, že na všechno lze dát polemickou odpověď; nic neuznávají za skutečně *pravdivé* a v diskusi je jejich hlavním cílem dokázat, že oponent je směšný ubožák. My jsme toho všeho

*) J. E. Littlewood: *The Mathematician's Art of Work.* The Rockefeller University Review, September—October 1967. Uvádíme překlad druhé části článku.