Luděk Zajíček

O třináctém Hilbertově problému

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 19 (1974), No. 1, 22--28

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139119`

a separabilním algebraickým rozšířením, přičemž Galoisova grupa tohoto rozšíření je abelovská. Kroneckerova věta říká, že těleso, které vznikne z Q adjungováním všech odmocnin z jedničky (všech možných stupňů), je maximálním abelovským rozšířením tělesa Q, tj. každé jiné abelovské rozšíření je jeho podtělesem. Jiná formulace Kroneckerovy věty je následující: Exponenciální funkce $e^{i\pi z}$ je pro těleso Q racionálních čísel „vytvořující funkcí" v tom smyslu, že když za proměnnou z dosadíme všechny možné hodnoty z Q a všechna takto získaná čísla adjungujeme k tělesu Q, obdržíme maximální abelovské rozšíření.

Hilbertův problém záleží v zobecnění Kroneckerovy věty na případ, kdy základní těleso Q je nahrazeno libovolným algebraickým číselným tělesem. Jde tedy o otázku existence vytvořujících funkcí, které by v případě obecných těles hrály podobnou úlohu jako exponenciální funkce v případě tělesa racionálních čísel. Hilbert poukazuje ještě na hypotézu vyslovenou Kroneckerem, že v případě komplexních kvadratických těles by vytvořujícími funkcemi měly být tzv. eliptické modulární funkce.

Ačkoliv formulace obou Hilbertových problémů je poměrně elementární, metody studia této problematiky jsou neobyčejně náročné a využívají složitých aparátů z mnoha matematických oblastí. Po konzultaci s experty došla redakce k závěru, že pro zpracování problémů nemáme u nás vhodné autory a patrně též čtenářský zájem by nebyl příliš široký. Případné singulární zájemce proto odkazujeme na sborník *Problemy Gil'berta*, kde jsou obě kapitoly zpracovány Ju. I. Maninem.

Redakce PMFA

O třináctém Hilbertově problému

Luděk Zajíček, Praha

Třináctá část Hilbertovy přednášky *Matematické problémy*, přednesené na 2. Mezinárodním kongresu matematiků r. 1900 v Paříži, má název „Nemožnost řešení obecné rovnice sedmého stupně pomocí funkcí dvou proměnných". V této části D. Hilbert klade problém inspirovaný nomografií, který se týká jedné z nejstarších úloh matematiky – řešitelnosti algebraických rovnic.

1. Spojitou reálnou funkci dvou reálných proměnných můžeme graficky přibližně zobrazit například pomocí vrstevnic, tj. tak, jak se na mapě zobrazuje nadmořská výška. Máme-li takto s velkou přesností zobrazeny funkce dvou proměnných $f(x, y)$ a $g(z, t)$, můžeme s velkou přesností zjišťovat hodnoty funkce tří proměnných $f(x, g(z, t))$.

(Nomografie – nauka, která se grafickým zobrazováním funkcí zabývá – zná metody, pomocí kterých lze hodnoty funkce $f(x, g(z, t))$ zjišťovat graficky (viz [7], str. 263).) V principu můžeme tímto způsobem zobrazit funkce n proměnných ($n \geqq 3$), které jsou superpozicemi konečného řádu spojitých funkcí dvou proměnných. Přitom superpozice k-tého řádu ($k = 0, 1, \ldots$) spojitých funkcí dvou proměnných definujeme indukcí:

(i) Superpozicemi 0-tého řádu rozumíme spojité reálné funkce dvou reálných proměnných (tedy funkce výchozího systému).*)

(ii) Jsou-li funkce $g_1(x_1, \ldots, x_n)$, $g_2(x_1, \ldots, x_n)$ superpozicemi k-tého řádu a je-li $f(x, y)$ spojitá funkce dvou proměnných (tedy funkce výchozího systému), je funkce $f(g_1(x_1, \ldots, x_n), g_2(x_1, \ldots, x_n))$ superpozicí řádu $k + 1$.

Zcela obdobné definice superpozic se používá i v případě, že vycházíme z libovolného systému funkcí konečného počtu proměnných (může to být i systém komplexních funkcí komplexních proměnných).

Uveďme pro ilustraci několik příkladů, v nichž funkcí budeme rozumět reálnou funkci reálných proměnných.

Vycházíme-li z nějakého systému funkcí jedné proměnné, dostáváme jako superpozice pouze funkce jedné proměnné. Přidáme-li však k tomuto systému třeba jen jednu funkci dvou proměnných, dostáváme jako superpozice mnoho nových funkcí dvou proměnných. Tak například funkce $f(x, y) = xy$ je superpozicí analytických funkcí jedné proměnné a funkce $g(x, y) = x + y$, protože $xy = \frac{1}{4}((x + y)^2 - (x - y)^2)$. Superpozicemi funkcí dvou proměnných $x + y$, xy, x/y a všech konstantních funkcí jedné proměnné jsou právě všechny racionální funkce.

Jako superpozice prvního řádu všech funkcí dvou proměnných dostáváme již všechny funkce tří proměnných. Je-li totiž $f(x, y)$ vzájemně jednoznačné zobrazení roviny na reálnou osu, můžeme libovolnou funkci tří proměnných $F(x, y, z)$ psát ve tvaru $F(x, y, z) = g(f(x, y), z)$, kde funkce g je touto rovnicí jednoznačně určena.

Otázku nomografické řešitelnosti obecné algebraické rovnice n-tého stupně lze chápat jako otázku, zda lze její kořeny vyjádřit jako funkce jejích koeficientů pomocí superpozic spojitých reálných funkcí dvou reálných proměnných. Algebraické rovnice s obecnými reálnými koeficienty stupně $\leqq 4$ jsou v tomto smyslu nomograficky řešitelné. Podle Cardanových vzorců jsou totiž reálné i imaginární složky jejich kořenů jako funkce koeficientů superpozicemi spojitých reálných funkcí dvou reálných proměnných.**)

D. Hilbert uvádí známý fakt, že pro $n \geqq 5$ lze pomocí Tschirnhausenovy transformace obecnou rovnici s komplexními koeficienty

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{1}$$

převést na tvar

$$x^n + b_4 x^{n-4} + \ldots + b_{n-1} x + 1 = 0\,. \tag{2}$$

Přitom komplexní funkce $b_i(a_1, \ldots, a_n)$ lze vyjádřit pomocí základních početních operací a odmocňování.

---

*) Tyto funkce ztotožňujeme se spojitými funkcemi n proměnných, které závisí pouze na dvou proměnných.

**) Přesněji řečeno, toto vyjádření je možné v okolí téměř každého bodu prostoru koeficientů.

Rovnice (2) má tvar

$$x^5 + ax + 1 = 0 \quad \text{pro} \quad n = 5 \quad \text{a}$$
$$x^6 + ax^2 + bx + 1 = 0 \quad \text{pro} \quad n = 6\,.$$

Z toho je vidět, že kořeny obecné algebraické rovnice s komplexními koeficienty pátého i šestého stupně jsou jako funkce koeficientů superpozicemi spojitých (dokonce algebraických) komplexních funkcí dvou komplexních proměnných. (Srovnejte v dalším s problémem rezolvent.)

Poznamenejme však, že otázka nomografické řešitelnosti rovnice (1) s reálnými koeficienty se nepřevádí na otázku nomografické řešitelnosti rovnice (2) s reálnými koeficienty, protože i při reálných a_i mohou čísla b_i vyjít imaginární.*)

Ve svém 13. problému se D. Hilbert ptá, zda je možno pomocí spojitých funkcí dvou proměnných řešit rovnici

$$x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0\,,$$

a vyslovujeme domněnku, že odpověď je záporná.

Z uvedené formulace není zcela jasné, zda koeficienty a, b, c jsou reálné nebo komplexní a zda spojité funkce, o kterých je řeč, se chápou v reálném nebo komplexním oboru. Ani Hilbertův výklad před formulací 13. problému není zcela jasný — Hilbert například uvádí, že pomocí Tschirnhausenovy transformace lze obecnou rovnici šestého stupně nomograficky řešit. V dostupné literatuře o 13. Hilbertově problému nejsou tyto otázky zcela objasněny.

Aby však měla smysl nomografická motivace, je třeba problém považovat za „reálný", a tak byl také všeobecně chápán. Ze správnosti Hilbertovy domněnky by pak plynulo, že existuje spojitá reálná funkce tří reálných proměnných, která není superpozicí spojitých funkcí dvou proměnných.

K otázce řešitelnosti algebraických rovnic a problematice superpozic funkcí se D. Hilbert vrací v článku [6]. Zde navrhuje zkoumat otázky související se superpozicemi funkcí. Na ukázku uvádí tvrzení (A. Ostrowski [12]), že analytická funkce

$$\zeta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^y}$$

není superpozicí nekonečněkrát diferencovatelných funkcí jedné proměnné a algebraických funkcí dvou proměnných. V témže článku D. Hilbert předkládá algebraický problém známý jako problémem rezolvent. V termínech superpozic lze tento problém formulovat takto: Pro dané n najít nejmenší k takové, aby kořeny obecné rovnice n-tého stupně jako funkce koeficientů byly komplexními superpozicemi algebraických funkcí k proměnných. Problém rezolvent byl dosud řešen pouze částečně (v [6] D. Hilbert dokazuje, že pro $n = 9$ je $k \leqq 4$). Ani pro případ $n = 7$ (algebraickou modifikaci 13. Hilbertova problému) se dosud neví, zda $k = 2$ nebo $k = 3$. Odkazy na práce týkající se problému rezolvent je možno najít v [18] a [19].

2. Dlouho se soudilo, že řešení třináctého Hilbertova problému bude spočívat v bližším zkoumání vlastností kořenů rovnice sedmého stupně, protože existence nějaké spojité

---

*) Přesto je okamžitě vidět, že obecná rovnice pátého stupně je nomograficky řešitelná.

funkce tří proměnných, která není superpozicí spojitých funkcí dvou proměnných, se zdála být zřejmá. (Nesprávný důkaz existence takové funkce podal r. 1931 L. BIEBERBACH v [4].) Tento názor byl podporován faktem, o kterém se zmiňuje D. Hilbert vzápětí po formulaci svého třináctého problému, totiž že existuje analytická funkce tří proměnných, která není superpozicí analytických funkcí dvou proměnných.

Důkaz tohoto tvrzení lze vést zcela přímočaře. Myšlenka je ta, že máme-li nějakou analytickou funkci f tří proměnných vyjádřenu jako superpozici analytických funkcí $g_1, \ldots, g_n$ dvou proměnných, jsou parciální derivace do k-tého řádu funkce f jednoduchými analytickými funkcemi parciálních derivací do k-tého řádu funkcí $g_1, \ldots, g_n$ ve vhodných bodech. Pro velká k je však parciálních derivací do k-tého řádu funkce f více než parciálních derivací do k-tého řádu funkcí $g_1, \ldots, g_n$. Je známý fakt, že obraz analytického zobrazení z eukleidovského prostoru menší dimenze (v našem případě prostoru parciálních derivací do k-tého řádu funkcí $g_1, \ldots, g_n$) do prostoru větší dimenze (prostoru parciálních derivací do k-tého řádu funkce f) je řídká množina. Za pomoci této myšlenky není příliš obtížné provést přesný důkaz.

Dále pro tento názor svědčilo to, že byly nalezeny spojité funkce tří proměnných které nejsou superpozicemi prvního řádu spojitých funkcí dvou proměnných (viz [17] str. 201), a VITUŠKINOVY výsledky o superpozicích „hladkých" funkcí, o kterých ještě budeme referovat.

Tím překvapivější byl výsledek A. N. KOLMOGOROVA ([8]) z r. 1956, že libovolná spojitá funkce n proměnných je superpozicí spojitých funkcí tří proměnných. Zakrátko (r. 1957) následovalo řešení třináctého Hilbertova problému, když Kolmogorovův žák V. I. ARNOLD ([1]) snížil počet proměnných v Kolmogorovově větě na dvě. Dokázal, že libovolná spojitá funkce tří proměnných na uzavřené jednotkové krychli je součtem devíti superpozic prvního řádu spojitých funkcí dvou proměnných. Tím byla vyvrácena Hilbertova hypotéza.

Základním nástrojem důkazů těchto dvou tvrzení byl pojem jednorozměrného stromu komponent hladin funkce, zavedený A. C. KRONRODEM r. 1950. Velmi složitý důkaz Arnoldovy věty je proveden v [2]. V dodatku k [2] však V. I. Arnold poznamenává, že tam provedený důkaz není zcela korektní a vyžaduje jistou změnu.*)

Arnoldův výsledek v témže roce zlepšil A. N. Kolmogorov ([9]). Analýzou důkazů své a Arnoldovy věty objevil novou, elementární metodu, při které se nepoužívá hlubších topologických tvrzení, ale pouze důmyslných konstrukcí a jemných propočtů. Touto metodou se mu podařilo dokázat, že libovolnou spojitou funkci na uzavřené n-rozměrné krychli lze vyjádřit ve tvaru

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varphi_i\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}(x_j)\Big), \tag{3}$$

kde funkce φ_i jsou spojité, funkce $\alpha_{i,j}$ jsou spojité monotónní a dokonce na funkci f nezávisí, jsou zadány předem. Pro $n = 3$ má (3) tvar

*) Myšlenky Arnoldova důkazu jsou vyloženy v jeho článku *O predstavlenii funkcij neskolkich peremennych v vide superpozicii funkcij menšeho čisla peremennych*, Matemat. prosveščenie *3* (1958), 41—61, (český překlad: *O struktuře funkcí více proměnných*, Pokroky č. 5, (1960). str. 399—416). Článek také pojednává o 13. Hilbertově problému a je v něm vyložen princip Kolmogorovova vyjádření (3).

$$f(x, y, z) = \sum_{q=1}^{7} \varphi_q[\alpha_q(x) + \beta_q(y) + \gamma_q(z)] = \sum_{q=1}^{7} F_q[g_q(x, y), z],$$

kde jsme položili

$$F_q(u, z) = \varphi_q[u + \gamma_q(z)], \qquad g_q(x, y) = \alpha_q(x) + \beta_q(y).$$

Tím je dokázáno, že libovolná spojitá funkce tří proměnných je součtem sedmi superpozic prvního řádu spojitých funkcí dvou proměnných, což zlepšuje Arnoldovu větu.

Zajímavějším důsledkem Kolmogorovovy věty je však to, že libovolnou spojitou funkci více proměnných lze dostat pomocí skládání spojitých funkcí jedné proměnné a operace sčítání.

V r. 1930 v souvislosti s problematikou Fourierových řad N. K. Bariová ([3]) dokázala, že každou spojitou funkci $f(t)$ je možno vyjádřit ve tvaru

$$f(t) = f_1(g_1(t)) + f_2(g_2(t)) + f_3(g_3(t)).$$

kde všechny funkce f_i a g_i jsou absolutně spojité.

Z Kolmogorovovy věty a věty N. K. Bariové plyne, že libovolnou spojitou funkci více proměnných je možno vyjádřit pomocí skládání absolutně spojitých funkcí jedné proměnné a operace sčítání.

Existuje řada výsledků doplňujících Kolmogorovovu větu. Tak například B. L. Fridman ([5]) dokázal, že funkce $\alpha_{i,j}$ z Kolmogorovova vyjádření (3) mohou být zvoleny lipschitzovské. Podrobné důkazy dvou jiných zesílení Kolmogorovovy věty lze najít v [11] a [13]. Jedním z posledních výsledků v tomto směru je Sprecherovo tvrzení ([14]), že libovolnou spojitou funkci na uzavřené n-rozměrné krychli je možno vyjádřit ve tvaru

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} g_q[\sum_{p=1}^{n} \lambda^{p-1}\psi(x_p + q)],$$

kde funkce g_q jsou spojité, ψ je monotónní a lipschitzovská, λ je reálné číslo a na funkci f závisí pouze funkce g_q.

3. Přestože Hilbertova domněnka nebyla správná, byla založena na správné myšlence, že „složité" funkce nemohou být vyjádřeny pomocí skládání „jednoduchých" funkcí. Jak ukázala Arnoldova věta, není pro spojité funkce (na rozdíl od funkcí analytických) počet proměnných, na kterých funkce závisí, z tohoto hlediska vhodnou charakteristikou složitosti.

Zajímavých výsledků se dosáhlo pro některé třídy „hladkých" funkcí. Je zřejmé, že pro třídy funkcí, které mají spojité parciální derivace do řádu $p(p \geqq 1)$, je číslo p vhodnou charakteristikou složitosti. To je pouze interpretace elementárního faktu, že ne všechny funkce mající spojité parciální derivace řádu $p - 1$ jsou superpozicemi funkcí, které mají spojité parciální derivace řádu p. Vituškin ([16]) však pro některé třídy „hladkých" funkcí nalezl charakteristiky, které závisí na počtu proměnných.

Dokázal například, že pro libovolná přirozená čísla n, q existuje funkce n proměnných mající spojité parciální derivace řádu q, která není superpozicí funkcí n' proměnných majících spojité parciální derivace řádu q', jestliže $n/q > n'/q'$.

Důkazy Vituškinových tvrzení byly založeny na pojmu vícerozměrné variace funkcí (viz [17]). Tyto důkazy zjednodušil A. N. Kolmogorov ([10]), který našel velmi přirozenou cestu k důkazům vět o nemožnosti reprezentace pomocí superpozic, zakládající se na použití pojmu ε-entropie.

Naznačíme zhruba Kolmogorovovu metodu. Jestliže P je kompaktní metrický prostor a $\varepsilon > 0$, označme symbolem N_ε nejmenší počet množin, které pokrývají P a jejichž diametr je nejvýše 2ε. Číslo $H_\varepsilon(P) = \log_2 N_\varepsilon$ se pak nazývá ε-entropií prostoru P. Funkce $H_\varepsilon(P)$ v jistém smyslu charakterizuje složitost prostoru P.

Pojem ε-entropie má přirozenou interpretaci v termínech teorie informace (viz. [15]), $H_\varepsilon(P)$ je totiž mírou informace, kterou je třeba obdržet, abychom mohli libovolný bod prostoru určit s přesností ε. Pro upřesnění tohoto tvrzení si představme dva hráče, z nichž první volí libovolně bod x z prostoru P a úkolem druhého je najít nějaký bod b tak, aby $\varrho(b, x) \leqq \varepsilon$. Přitom druhý hráč může klást prvnímu jen otázky, na které je možno odpovídat buď „ano“, nebo „ne“. Předpokládejme ještě, že každá podmnožina P o diametru 2ε je obsažena v kouli o poloměru ε. (Lze ukázat, že tento předpoklad není příliš omezující.) Za těchto předpokladů je nejmenším počtem otázek, který druhý hráč potřebuje k dosažení žádaného cíle, buď $[H_\varepsilon(P)]$, nebo $[H_\varepsilon P] + 1$.*)

Řád růstu funkce H_ε lze pro některé prostory „hladkých“ funkcí dosti přesně zjistit. Ukazuje se, že tento řád podstatně závisí na počtu proměnných.

Důkazy tvrzení, že ne všechny prvky prostoru funkcí V jsou superpozicemi prvků prostoru funkcí M, kde prostor M má řádově menší entropii než prostor V, se vedou zhruba takto: Uvažujeme množinu S těch funkcí z V, které jsou superpozicemi funkcí z M, a to jistého pevného typu. Například $f(x, y, z) = g_1(g_2(x, y), g_3(x, g_4(y, z)))$. Nyní se zjistí, že k tomu, abychom znali s přesností ε všechny hodnoty funkce f, stačí, abychom znali dostatečně přesně funkce g_1, g_2, g_3, g_4, např. s přesností ε'. Míra informace nutná k tomu, abychom poznali s přesností ε libovolnou funkci z S, není tedy větší než míra informace, která je nutná abychom poznali s přesností ε' čtyři libovolné funkce ze systému M. Takto se zjistí, že $H_\varepsilon(S)$ je příliš malá ve srovnání s $H_\varepsilon(V)$, a z toho se odvodí, že S je řídká podmnožina prostoru V v nějaké metrice, ve které je prostor V úplný. Takto se postupuje pro všechny typy superpozic (těch je nejvýše spočetně mnoho), takže dostáváme, že množina funkcí z V, které jsou superpozicemi funkcí z prostoru M, je množina první kategorie. Existence žádané funkce pak plyne z Baireovy věty.

4. Třináctý Hilbertův problém byl vyřešen, zbývá však řada problémů, které s ním úzce souvisí a které dosud řešeny nebyly.

Neví se například, zda kořen rovnice sedmého stupně jako funkce koeficientů může být vyjádřen jako superpozice algebraických funkcí dvou proměnných (problém rezolvent), nebo jako superpozice analytických funkcí dvou proměnných.

Z pokusů vyřešit dosud otevřený problém, zda existuje analytická funkce dvou proměnných, kterou nelze vyjádřit pomocí superpozic spojitě diferencovatelných funkcí jedné proměnné a operace sčítání, vzniklo zkoumání tzv. lineárních superpozic. Hlavní výsledek o lineárních superpozicích tvrdí, že pro libovolné spojité funkce $p_1(x, y), \ldots$

*) Symbolem $[x]$ rozumíme celou část čísla x.

..., $p_n(x, y)$ a libovolné spojitě diferencovatelné funkce $q_1(x, y), \ldots, q_n(x, y)$ je množina funkcí tvaru

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x, y)\, \varphi_i(q_i(x, y)),$$

kde funkce φ_i jsou spojité, uzavřená a řídká v prostoru spojitých funkcí dvou proměnných.

Z analogického výsledku pro funkce více proměnných plyne, že ne všechny funkce $\alpha_{i,j}$ z Kolmogorovovy věty mohou být spojitě diferencovatelné.

Problematika lineárních superpozic je podrobně vyložena v [19], kde je také možno najít odkazy na mnoho dalších prací, které se superpozic funkcí týkají.

Literatura

[1] ARNOLD V. I., *O funkcijach trech peremennych*, DAN *114*, No 4 (1957), 679—681.

[2] ARNOLD V. I., *O predstavimosti nepreryvnych funkcij trech peremennych superpozicijami nepreryvnych funkcij dvuch peremennych*, Matem. sb. *48* (*90*): 1(1959), 3—74, *56*(*98*): 3(1962), 392.

[3] BARI N., *Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues*, Math. Ann. *103* (1930), 145—248, 598—653.

[4] BIEBERBACH L., *Bemerkung zum dreizehnten Hilbertschen Problem*, Journ. reine angev. Math. *165* (1931), 89—92.

[5] FRIDMAN B. L., *Ulučšenie gladkosti funkcij v teoreme A. N. Kolmogorova o superpozicijach*, DAN *177* (1967), No 5, 1019—1022.

[6] HILBERT D., *Über die Gleichung neunten Grades*, Math. Ann. *97* (1927), 243—250, Gesammelte Abhandlungen, Bd 2 (1933), 393—400.

[7] HRUŠKA V., *Počet grafický a graficko-mechanický*, Praha, 1952.

[8] KOLMOGOROV A. N., *O predstavlenii nepreryvnych funkcij neskolkich peremennych superpozicijami nepreryvnych funkcij menševo čisla peremennych*, DAN *108*, No 2 (1956), 179—182.

[9] KOLMOGOROV A. N., *O predstavlenii nepreryvnych funkcij neskolkich peremennych v vide superpozicii nepreryvnych funkcij odnogo peremennogo i složenija*, DAN *114*, No 5 (1957), 953—956.

[10] KOLMOGOROV A. N., *Ocenki minimalnogo čisla elementov ε-setej v različnych funkcionalnych klassach i ich primenenie k voprosu o predstavimosti funkcij neskolkich peremennych superpozicijami funkcij menšego čisla peremennych*, UMN *10*, vyp. 1 (1955), 192—193, DAN *101*, No 2 (1955), 192—194.

[11] LORENTZ G. G., *Approximation of Functions*, New York, 1966.

[12] OSTROVSKI A., *Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen*, Math. Z. *8*, No 3—4 (1920), 241—298.

[13] SPRECHER D. A., *On the structure of continuous functions of several variables*, Trans. Amer. Math. Soc. *115* (1965), 340—355.

[14] SPRECHER D. A., *An improvement in the superposition theorem of Kolmogorov*, J. Math. Anal. Appl. *38* (1972).

[15] TICHOMOROV V. M., *Raboty A. N. Kolmogorova po ε-entropii funkcionalnych klassov i superpozicijam funkcij*, UMN *18*, vyp. 5 (1963). 55—92.

[16] VITUŠKIN A. G., *K trinadcatoj probleme Gilberta*, DAN *95*, No 4 (1954), 701—704.

[17] VITUŠKIN A. G., *O mnogomernych variacijach*, Moskva, 1955.

[18] VITUŠKIN A. G., *K trinadcatoj probleme Gilberta*, Problemy Gilberta (sborník), Moskva, 1969, 163—170.

[19] VITUŠKIN A. G., CHENKIN G. M., *Linejnye superpozicii funkcij*, UMN *22*, vyp. 1 (1967), 77—124.