Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Věra Babušková

O kapilární reometrii nenewtonských kapalin

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 16 (1971), No. 3, 139--144

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139077`

O KAPILÁRNÍ REOMETRII NENEWTONSKÝCH KAPALIN

VĚRA BABUŠKOVÁ, Praha

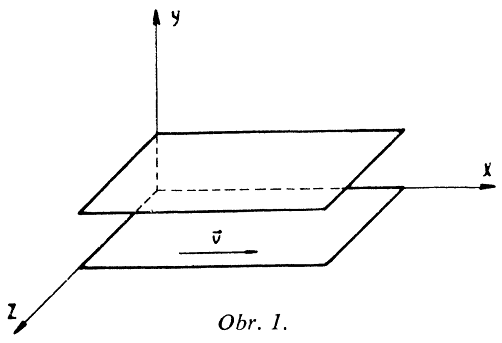
ÚVOD

Materiály, které lze zahrnout pod pojem nenewtonských kapalin, se v posledních létech dostávají do popředí technického zájmu. Jsou to např. roztoky a taveniny makromolekulárních látek, koloidní roztoky, nátěrové hmoty, odpadní a průmyslové kaly apod. Z velmi širokého oboru nenewtonských kapalin je v článku vymezen jejich speciální typ, nejčastěji se uplatňující v praxi, a je podán obecný matematický popis jeho tokových vlastností. Tomu, jak se získají konkrétní tokové charakteristiky kapalin tohoto typu, je věnována druhá část tohoto článku. Přitom se tento článek omezuje na popis pouze jedné metody, a to kapilární.

NENEWTONSKÉ KAPALINY

Pohybová rovnice nestlačitelné vazké kapaliny – rovnice Navierova-Stokesova ([2], str. 554) – se liší od rovnice Eulerovy (pohybové rovnice dokonalé kapaliny [2], str. 401) členem obsahujícím *koeficient vazkosti – viskozitu*, což je jediný parametr charakterisující tokové chování nestlačitelné vazké kapaliny. Připomeňme si jeho fyzikální význam. Ten se nejlépe objasní v případě tzv. *jednoduchého toku*, tj. toku, při němž existuje jediná nenulová složka rychlosti závislá na jediné příčné souřadnici. Příkladem jednoduchého toku je tok mezi dvěma rovnoběžnými deskami. Při volbě souřadného systému podle obr. 1 jsou složky jeho rychlosti dány vztahy (1).

(1) $$v_y = v_z = 0\,, \quad v_x \equiv v = v(y)\,.$$



Obr. 1.

Ve vazké kapalině existuje vnitřní tření, při pohybu v ní vznikají třecí plošné síly. Mírou třecích sil je *třecí napětí*, což je obecně veličina tenzorová. Konkrétně jde o symetrický tenzor druhého řádu. V případě jednoduchého toku existují však pouze dvě nenulové složky tohoto tenzoru, které se vzhledem k jeho symetričnosti sobě rovnají. Proto se v tomto případě nemusí uvažovat tenzorový charakter třecího napětí; jeho absolutní hodnota se značí τ. Newton vyslovil hypotézu, že třecí napětí je přímo úměrné rychlostnímu gradientu. Konstantou úměrnosti v tomto vztahu je právě viskozita μ:

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}.$$

V obecném případě je Newtonova hypotéza vyjádřena šesti rovnicemi ([3], str. 160), neboť symetrický tenzor třecího napětí má šest nezávislých složek:

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij}, \tag{2}$$

kde indexy i a j mohou být x, y nebo z a D_{ij} je symetrická část rychlostního gradientu $\partial v_i/\partial x_j$, tzv. *rychlost deformace*

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).$$

Rovnice (2) se nazývá *Newtonovým zákonem* a kapaliny, kterým tato rovnice vyhovuje, se nazývají *kapaliny newtonské.* K popisu tokového chování newtonských kapalin stačí tedy znát hodnotu jediné konstanty – viskozity μ. (Musíme ovšem dodat při konstantní teplotě, neboť viskozita se značně mění s teplotou.) Všechny materiály, které vykazují anomální chování vůči Newtonovu zákonu, byly zahrnuty pod pojem *nenewtonské kapaliny.*

Obecně lze říci, že toková charakteristika nenewtonských materiálů není konstanta, ale je to vztah mezi dynamickými veličinami, jako je např. třecí napětí τ_{ij} a kinematickými veličinami, jako je např. rychlost deformace D_{ij}. Tento vztah se nazývá *konstituční rovnice* a rovnice (2) je jejím speciálním případem.

V tomto článku si všimneme jediného typu nenewtonských kapalin, který se nejčastěji aplikuje v praxi. Jde o kapaliny, jejichž konstituční rovnice je analogická konstituční rovnici newtonských kapalin. Liší se tím, že koeficient vazkosti není konštantní při konstantní teplotě, ale závisí na rychlosti deformace. Tyto materiály jsou nazývány *zobecněné newtonské kapaliny.* Obecný tenzorový tvar jejich konstituční rovnice je tento

$$\tau_{ij} = 2\eta(D)\, D_{ij}, \tag{3}$$

kde D je dvojnásobek druhé odmocniny druhého základního invariantu tenzoru rychlosti deformace ([3], str. 36):

$$D = 2\sqrt{(\tfrac{1}{2}D_{ij}D_{ij})}^{*)} \tag{4}$$

*) Ve vztazích (4) a (6) je použito sumačního pravidla: opakuje-li se index dvakrát v jednom členu, značí to sumaci podle hodnot 1, 2 a 3 tohoto indexu.

Na tomto místě je třeba zdůraznit, že zobecněné newtonské kapaliny jsou pokládány za nestlačitelné, a tedy má druhý základní invariant tenzoru D_{ij} uvedený tvar.

Z rovn. (3) pro složky tenzoru třecího napětí lze odvodit vztah mezi odpovídajícími invariantními veličinami:

$$\tau = \eta(D)\,D\,, \tag{5}$$

kde význam D je známý a význam τ je analogický: je to druhá odmocnina druhého základního invariantu tenzoru třecího napětí:

$$\tau = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\tau_{ij}\tau_{ij}\right)}\,. \tag{6}$$

Někdy se rovnice (5) uvádí v inverzním tvaru:

$$D = \frac{1}{\zeta(\tau)}\,\tau\,. \tag{7}$$

Funkční závislost $\eta(D)$, resp. $\zeta(\tau)$ se v inženýrské praxi vystihuje analyticky různými empirickými modely ([1], str. 118). Každý takový model obsahuje dva, popř. i tři parametry, jejichž hodnoty musí být stanoveny experimentálně. Nejjednodušším a nejvíce užívaným modelem je dvouparametrový *model Ostwaldův-de Waeleův*, nazývaný též „mocninový zákon“:

$$\eta(D) = KD^{n-1}\,.$$

Parametr n se nazývá indexem toku a parametr K koeficientem konzistence. Pro $n = 1$ a $K = \mu$ přechází tento model v Newtonův zákon. Často se ho užívá k přibližné charakteristice odchylky od newtonského chování. Pro polymery a jejich roztoky je $n < 1$. Opačný případ ($n > 1$) je vzácný. Jiným příkladem dvouparametrového modelu je *model Binghamův*

$$\eta(D) = m + \frac{k}{D}\,, \tag{8}$$

který je nejjednodušší z modelů užívaných pro popis chování tzv. *vazkoplastických materiálů*. Pro tyto materiály je charakteristické, že tok v nich nastane teprve, když třecí napětí překročí určitou hodnotu. Parametr k v rovn. (8) se nazývá mez tekutosti. Jeho význam je tento: v oblasti, kde τ splňuje podmínku $\tau > k$, materiál teče; jestliže tato podmínka není splněna, chová se jako pevné těleso. Význam parametru m je analogický newtonské viskozitě. Z tříparametrových modelů je nejvíce užívaný *model Ellisův*:

$$\frac{1}{\zeta(\tau)} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\,\tau^{N-1}\,,$$

který je v podstatě superpozicí Newtonova zákona a „mocninového zákona“ v inverzních tvarech.

To byly tři příklady tzv. reologických modelů užívaných k popisu tokového chování nenewtonských kapalin. Podobných modelů bylo navrženo mnoho pro vhodná vystižení různých odchylek od newtonského chování.

KAPILÁRNÍ REOMETRIE

Reometrii lze interpretovat jako viskozimetrii nenewtonských kapalin. Není to však interpretace přesná, neboť cílem viskozimetrie je určení hodnoty jediné konstanty — viskozity a cílem reometrie je určení křivky — tzv. *reogramu*, což je graficky znázorněná konstituční rovnice proměřované kapaliny.

Z různých typů klasických viskozimetrů jsou pro účely reometrie použitelné ve svém principu pouze viskozimetry kapilární a rotační. V obou těchto typech přístrojů je realizován jednoduchý tok. Proto se v reometrii neuvažuje tenzorový charakter konstituční rovnice a hovoříme jednoduše o třecím napětí τ a o rychlosti deformace D. Přesné definice těchto proměnných jsou reprezentovány rovnicemi (4), resp. (6). V tomto článku se omezíme pouze na reometrii kapilární a objasníme si její princip.

Měření viskozity na kapilárním viskozimetru je založeno na Hagenově-Poiseuilleově zákoně, který je řešením Navierovy-Stokesovy rovnice pro stacionární, laminární tok newtonské kapaliny v trubici kruhového průřezu ([2], str. 578)

$$Q = \frac{\pi}{8\mu} \frac{\Delta p}{L} R^4 . \tag{9}$$

V této rovnici značí: Q objemový průtok, μ viskozitu, Δp tlakovou diferenci, L délku a R poloměr kapiláry. Známe-li tedy rozměry kapiláry a změříme-li tlakovou diferenci a objemový průtok, pak z rovnice (9) můžeme stanovit hodnotu viskozity zkoumané kapaliny.

Jestliže téhož přístroje chceme použít k účelům reometrickým, pak musíme zajistit *měnitelnost* tlakové diference, abychom mohli měření opakovat při různých podmínkách a tak získat několik dvojic sobě odpovídajících hodnot Q a Δp.

Nyní vyvstává otázka, jak z hodnot těchto přímo měřitelných veličin odvodíme příslušné hodnoty třecího napětí τ a deformační rychlosti D, které vynášíme do reogramu.

Nejprve si musíme uvědomit, že třecí napětí i rychlost deformace jsou funkcemi místa. Při toku kapilárou se jejich hodnoty — vzhledem ke kruhové symetrii — mění pouze se vzdáleností od osy trubice, přičemž ovšem mezi nimi v každém bodě existuje stejný vztah, totiž konstituční rovnice proměřované kapaliny. Jestliže reogram má být grafickým znázorněním této rovnice, pak hodnoty obou proměnných se musí vztahovat k téže vzdálenosti od osy kapiláry. Konkrétně do reogramu vynášíme hodnoty třecího napětí a deformační rychlosti u stěny kapiláry; značí se τ_s a D_s.

Klíčový význam pro kapilární reometrii má fakt, že při laminárním a stacionárním toku kruhovou trubicí je třecí napětí v určitém bodě přímo úměrné vzdálenosti tohoto bodu od osy trubice ([4], str. 21):

$$\tau = \frac{\Delta p}{2L} r . \tag{10}$$

Hodnota τ_s se tedy snadno určí z tlakového rozdílu a rozměrů kapiláry.

V případě určení hodnoty D_s je situace složitější. Pro newtonskou kapalinu zjistíme snadno, že platí

$$D_s^{\mathcal{N}} = \frac{4Q}{\pi R^3} \tag{11}$$

tím, že zavedeme τ_s do Hagenova-Poiseuilleova zákona a uvědomíme si tvar Newtonovy konstituční rovnice. Výraz $D_s^{\mathcal{N}}$ hraje důležitou úlohu i při stanovování hodnoty deformační rychlosti u stěny pro kapaliny nenewtonské. Veličiny τ_s a $D_s^{\mathcal{N}}$ se v literatuře nazývají *konzistenční proměnné* ([4], str. 22). Hodnota konzistenční proměnné $D_s^{\mathcal{N}}$ se snadno stanoví z přímo měřené hodnoty objemového průtoku Q a poloměru kapiláry. Nyní si ukážeme, jak ze znalosti hodnoty veličiny $D_s^{\mathcal{N}}$ stanovíme skutečnou hodnotu deformační rychlosti u stěny D_s pro libovolnou zobecněnou newtonskou kapalinu. Na tomto místě je třeba uvést rovnici, která je velmi výhodná pro popis laminárního, ustáleného toku zobecněné newtonské kapaliny kruhovou trubicí. Jde o výraz pro objemový průtok Q, který obsahuje „obecný model toku“ v inverzním tvaru:

$$Q = \frac{\pi R^3}{\tau_s^3} \int_0^{\tau_s} \tau^2 f(\tau) \, d\tau , \tag{12}$$

kde

$$f(\tau) = D$$

je zmíněný obecný model toku. Při použití rovnice (12) se za něj dosazuje libovolný empirický model vhodný pro vyšetřovanou kapalinu. Např. model Ostwaldův-de Waeleův v inverzním tvaru

$$D = \left(\frac{\tau}{K}\right)^{1/n} .$$

Odvození rovnice (12) je založeno na předpokladu, že u stěny trubice je rychlost nulová, dále se opírá o vztah (10) a o definici rychlosti deformace v daném případě, ve válcových souřadnicích:

$$D = -\frac{dv}{dr} .$$

V reometrii je pak význam rovnice (12) v tom, že z ní lze odvodit vztah mezi konzistenční proměnnou $D_s^{\mathcal{N}}$ a skutečnou rychlostí deformace u stěny D_s. Tento vztah poprvé odvodil RABINOWITSCH, a proto rovnice nese jeho jméno:

$$D_s = f(\tau_s) = \tfrac{3}{4}D_s^{\mathscr{V}} + \tfrac{1}{4}\tau_s \frac{\mathrm{d}D_s^{\mathscr{V}}}{\mathrm{d}\tau_s} \,. \tag{13}$$

Při vyhodnocování dat z měření na kapilárním reometru se hodnoty derivace obsažené v druhém členu pravé strany rovnice (13) stanovují graficky.

Celý vyhodnocovací postup se tedy v principu skládá z těchto etap:

1. Z naměřených hodnot Δp a Q se stanoví hodnoty konzistenčních proměnných τ_s a $D_s^{\mathscr{V}}$ podle vztahů (10) resp. (11).
2. Graficky se stanoví hodnoty derivace závislosti $D_s^{\mathscr{V}}$ na τ_s v několika zvolených bodech.
3. Podle Rabinowitschovy rovnice – rovnice (13) – se pro zvolené hodnoty τ_s vypočtou příslušné hodnoty D_s.
4. Sestrojí se reogram proměřované kapaliny.

Reogram slouží buď k vystižení analytického tvaru konstituční rovnice, říkáme též k navržení vhodného reologického modelu, nebo ke stanovení číselných hodnot parametrů ve zvoleném známém modelu (např. parametrů K a n v Ostwaldově-de Waeleově modelu) anebo jako grafická charakteristika toku zkoumané kapaliny.

Literatura

[1] BIRD R. B., STEWART W. E., LIGHTFOOT E. N.: *Transport Phenomena* (český překlad: Praha; Academia 1968).

[2] BRDIČKA M.: *Mechanika kontinua*, Praha, Nakladatelství ČSAV 1959.

[3] PRAGER W.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik* (ruský překlad: Moskva, Izdatěľstvo inostrannoj litěratury 1963).

[4] ULBRECHT J., MITSCHKA P.: *Chemické inženýrství nenewtonských kapalin*, Praha, Nakladatelství ČSAV 1965.

A. Z. KRYGOWSKA:

Výrazný formalismus teorie množin překážel po dlouhou dobu zavedení množinového jazyka do elementární matematiky. Tyto překážky byly odstraněny, když jsme osvobodili pedagogický problém od formálních problémů, když jsme čestně přijali intuitivní základ množinového myšlení a když jsme nalezli pedagogické prostředky k jeho uvedení přirozeným způsobem na každé úrovni vyučování.

W. SERVAIS.

Množinové pojetí matematiky je jeden z nejnapadnějších aspektů probíhající modernizace vyučování matematice a — řekněte proč — vyvolává alergii. Připadla-li teprve Cantorovi úloha, aby zdůraznil základní význam množin a vytvořil z nich skvělou partii matematiky, neznamená to, že množiny nejsou matematice vlastní od doby, kdy existuje jako věda.