Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Garrett Birkhoff

Psychologie matematiky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 21 (1976), No. 1, 1--16

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139068

Psychologie matematiky

Garrett Birkhoff, Cambridge, USA)*

15. Aritmetické poznání. Přicházím teď ke konečné záhadě. Jak matematik myslí? Mohou počítače napodobit jen nejjednodušší a nejběžnější myšlenkové pochody matematiků? Anebo mohou být programovány tak, aby obsáhly úsporně podstatnou část lidské matematické činnosti? Aby počítače zvládly hospodárněji nebo úspěšněji než matematik neběžné matematické úlohy, musejí – to je můj názor – být řízeny význačnými matematiky, kteří důvěrně znají hranice jejich možností.

Začnu s první otázkou: jak matematik myslí (matematicky).

Matematické myšlení má své kořeny v raném dětství a týká se nejdříve aritmetiky. Dříve než dítě začne se studiem aritmetiky, musí se naučit počítat. To se naučí velice snadno papouškováním zvuků (paměťové mimikry). Většina dětí dovede již ve třech letech napodobovat jevové posloupnosti, když odříkávají „jeden dva tři čtyři pět" tak snadno jako „abrakadabra". Při hře na pikanou se většina z nás naučila už v devíti odpočítat do sta ve dvaceti vteřinách bez jakéhokoliv zásahu dospělých.

Spočítat množinu U objektů tak, že spárujeme její prvky s postupnými ordinálními čísly a nic nevynechat ani nevzít víckrát, to vyžaduje již více dovednosti. Dítě si musí pamatovat, řekne-li číslo k, jaká je množina $S(k) \subset U$ předmětů již spočítaných; domnívám se, že tato schopnost záleží na zrakovém nebo hmatovém vnímání konkrétních předmětů. A uvědomit si, že mohutnost množiny U nezávisí na pořadí, v němž její prvky počítáme, vyžaduje již indukční úvahy a ještě větší zralosti. Teprve po této zkušenosti a po jejím pochopení si dítě uvědomí *význam* kardinálních čísel. PIAGET ([3], str. 406–414) stanoví, že je to obyčejně v sedmi letech. Domnívám se, že v tomtéž věku získají děti schopnost rozeznat na první pohled mohutnost množin, které mají méně než n prvků, kde pro většinu lidí znamená n „sedm plus minus dvě", jak poznamenává G. A. MILLER ([3], sv. 1, str. 135).

Když děti zvládnou v desetinné soustavě techniku počítání a její smysl, jsou připraveny, taktéž v desetinné soustavě, naučit se technice aritmetických operací. Nejsnáze opět

*) Část C článku *Matematika a psychologie*, otištěnébo v SIAM review sv. *11*, č. 4 z října 1969. Celý článek je vlastně řeč pronesená při odstoupení z funkce předsedy SIAM a vznikla z projevu před Americkou psychologickou společností 2. září 1967. Článek obsahuje úvod a je rozdělen na tři hlavní části: (A) Diskrétní matematika a psychologie. (B) Spojitá matematika a psychologie. (C) Psychologie matematika (a tedy matematiky).

paměťovými mimikry se děti naučí zpaměti tabulky pro sčítání a násobení deseti jednotek (45 pravidel v každé tabulce) a jak sčítat, násobit, odčítat a dělit v desetinné soustavě.*) Děti jsou potom připraveny učit se o zlomcích, desetinných číslech a záporných číslech. Tradičním znakem pro zvládnutí aritmetiky byla vždy studentova zběhlost provádět s nimi rychle a správně záludné výpočty (např. dlouhé dělení), což ovšem svedou počítače lépe a levněji. Profesionální počtáři ve skutečnosti užívali již od osmnáctého století sčítaček a kalkulaček.

V tzv. moderní matematice je vidět zdravý odklon od pěstování početní zběhlosti ve prospěch logických a aritmetických pojmů. Bohužel se opět jednostranně přeceňuje zběhlost v zacházení s bezvýznamnými symboly podle umělých pravidel na úkor hlubšího (a významnějšího) pojmu veličiny. Jak zdůrazňuje HELMHOLTZ ([26], str. 85 a následující), tkví tento pojem ve fyzikální zkušenosti a v operačních technikách měření.

Axiómy uspořádané grupy mohou být považovány za empirické vlastnosti kvantity. Ve třinácti letech by studenti měli mít jasnou představu o aproximaci a řádech veličin od velmi malých po velmi velké. Důležitá je také schopnost umět překládat slovní úlohy a životní situace do symbolického jazyka matematiky a naopak odhadovat smysl aritmetických tvrzení, jako „vydělává 3 $ na hodinu“ nebo „úroková sazba je 6%“. Taková schopnost ovšem tvoří podstatu aplikované matematiky.

Domnívám se, že se děti značně liší ve svém poměru k aritmetice nejen co se týče znalostí, ale také v relativní důležitosti, kterou přisuzují třem stránkám aritmetiky: obratnosti v zacházení s čísly, logickému uvažování a praktické důležitosti. Proto se domnívám, že rozdíly mezi matematiky vznikají už v dětství.

16. Algebra a geometrie. V dospělosti se při výkladu algebry a geometrie rozdíly mezi lidmi v jejich vztahu k matematice ještě prohlubují. A tak čistý matematik si myslí, že algebra je jakási hra s předměty podle jasných pravidel, jejímž účelem je osamostatnit x na jedné straně rovnice a ponechat známé hodnoty na straně druhé. Pro aplikovaného matematika je algebra nudným nástrojem, který mu umožňuje nalézt neběžnými metodami odpovědi na zajímavé otázky.

Z předchozího rozdílu stanovisek vzniká mnoho obtížných pedagogických sporů, o nichž nemám valné mínění. Ale myslím si, že je zajímavé srovnat ostře rozdílné názory EULEROVY, HELMHOLTZOVY a PEANOVY na základy algebry; tyto názory totiž ilustrují i rozdílnost matematiků.

Podle Eulera**) lze po zvládnutí aritmetiky pochopit platnost algebraických postupů tak lehce, že stačí jen upozornit na potřebné triky; algebra byla pro něho jednoznačnou honitbou za správnými odpověďmi. Helmholtz ([20], str. 61—97) naproti tomu přisuzoval postulátům pro reálná čísla (Grösse) základní význam, ale jejich platnost lze podle něho poznat přímo z fyzikální zkušenosti. Zatímco pro Peana bylo podstatné odvodit algebraické zákony z minima formálních předpokladů čistě logicky (slovními a symbolickými postupy).

*) Udivuje mě, jak opravdu prospívá nezaujatým dětem časný výklad nedesetinné (např. dvojkové) aritmetiky.

**) L. EULER, *Elements of Algebra*, London, 1797, zvláště str. 56—69, kde rozebírá iracionální a imaginární čísla a str. 291—296, kde se věnuje ústřední myšlence řešení rovnic.

16.1. Geometrické poznání. Geometrie je nejstarším (a nejjednodušším) odvětvím matematické fyziky. Než ji děti začnou soustavně studovat, musejí si srovnat, přeložit a vyložit nesmírné množství zrakových a hmatových zkušeností o prostoru a časoprostoru(!) z každodenního života. Např. se musejí naučit poznávat přímku, což děti většinou nedovedou.*)

Myslím si, že reakce studentů na formální středoškolskou geometrii jsou různé právě proto, že si své zkušenosti vyložili různými způsoby. Ostatně i zralí matematikové si vykládají geometrické zkušenosti po svém, i když ovšem správně.

Nejběžnější je názorný způsob Euklidův a způsob číselných trojic DESCARTŮV. Jednodušší než oba dva je kombinovaný způsob mého otce, který je (po zvládnutí aritmetiky) dnes široce rozšířen na amerických středních školách. Je založen na několika jednoduchých axiómech pro vzdálenosti a úhly, o kterých se předpokládá, že se měří pravítkem a úhloměrem.**)

16.2. Psychologické otázky. Bylo by zajímavé sledovat uvedené způsoby z psychologického hlediska. Jedinou psychologickou studií základů geometrie, kterou znám, je Helmholtzova práce [26].

Helmholtz ukazuje, že velká část geometrie může být odvozena ze dvou snadno ověřitelných fyzikálních skutečností:

(1) Prostor Σ je trojrozměrný,

(2) Každé tuhé těleso S se může v prostoru volně pohybovat (bez deformací) tak, že zachovává vzdálenosti mezi libovolnými svými dvěma body. To jest libovolný bod P tělesa S lze posunout do libovolné polohy, potom otočit S spojitě kolem této polohy tak, že libovolný bod q přejde do polohy q' se stejnou vzdáleností od p jako q, a konečně otočit S libovolně kolem osy pq'.

Helmholtz uvedl tato pravidla jako axiómy v Euklidově duchu. Tato psychofyzikální interpretace axiomatických základů geometrie je značně vzdálena pojetí axiómů geometrie jako pouhých pravidel pro hru na dokazování vět. Naneštěstí je třeba velmi sofistických argumentů***), aby se ukázalo, že z Helmholtzových axiómů (doplněných axiómem podobnosti) plyne celá geometrie. A tak jeho axiómy nejsou tak dobrým základem pro vyučování geometrii jako axiómy Euklidovy.

Myslím si, že spletitost geometrie je typická pro vyšší matematiku kontinua; naučit se poznávat a ověřovat její pravdy je obtížný úkol, při kterém je třeba využít mnoha rozdílných lidských vloh. Není to prostě po psychologické stránce (logická) hra podle předepsaných pravidel.

---

*) Viz PLATT, *Scientific American, 202* (1960), str. 121—129 a F. ROBERTS a P. SUPPES, *Synthèse, 17* (1967), str. 173—201.

**) Viz G. D. BIRKHOFF a R. BEATLEY, *Basic Geometry*, Scott, Foresman, 1941; E. E. Moise a F. L. Downs, *Geometry*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1941.

***) Viz G. BIRKHOFF, *Trans. Amer. Math. Soc., 55* (1964), str. 465—492 a Math. Z., 53 (1950), str. 226—235.

17. Vyučovací stroje? Věčný mýtus o robotu má mnoho variant; poslední je varianta o vyučovacím stroji, jehož mozkem je počítač. Tento mýtus se šíří známým výrokem ([18], str. 157): „V nejbližší budoucnosti budou mít milióny dětí ... pro svou osobu strážce tak dobře informovaného a reagujícího jako Aristoteles.“ Ačkoliv je každé proroctví na poli počítačů nebezpečné, domnívám se, že se o tomto růžovém obrazu mohu klidně vyjádřit. Ve skutečnosti se tu nemluví o vyučovacím stroji, ale o (programované) *instrukci pomocí počítače* (computer aided instruction, CAI). K „zosobnění“ takové instrukce by bylo třeba pracně programovaného počítače s rozsáhlými koncovkami a grafickými konzolami, které jsou obyčejně velmi nákladné. To jest bylo by třeba souběžného systému, v němž ([18], část VI) „ústřední orgán odpovídá postupně na požadavky svých uživatelů, ale tak rychle, že každý z nich se domnívá, že má počítač pro sebe“. Tvrzení, že takový „souběžný systém“ je dnes skutečností, je prostě nepravda; nemáme dosud ani představu o ekonomické proveditelnosti „veřejně prospěšného informačního systému souběžně působícího svými konzolami doma, ve škole a v kanceláři“.

Nehledě na cenu (která se může časem značně snížit), zdá se zřejmé, že aritmetický dril a dril středoškolské geometrie mohou být se zdarem převedeny na počítač. Navíc může mít odosobněný styk s individualizovaným člověkem – strojem bezesporu léčebný vliv na děti s psychologickými potížemi. Konečně cenným vedlejším jevem by byla objektivní statistická informace o jednotlivých studentech. Mělo by být rychlejší, spolehlivější a vhodnější pro počítače schraňovat a zpracovávat takové informace než pro učitele*). Moudře posouzena mohla by tato informace pomoci vychovatelům identifikovat studijní typy a dovršit účinnost programovaného drilu. Zvláště snadné by to mělo být v matematice, která je poměrně stereotypním předmětem.

Samozřejmě že programovaná instrukce nevyžaduje souběžných počítačů „konverzačního typu“. Jak zdůrazňuje Skinner ([51], str. 17), největším problémem ve vyučování aritmetice je navrhnout a programovat posloupnost otázek, aby odpovědi vedly studenta k účelnému matematickému jednání, bude-li postaven před kterýkoliv z 25 – 40 tisíc různých a nestejně složitých aritmetických příkladů. Tyto otázky mohou být obsaženy v cvičebnicích nebo na lístcích typu otázka-odpověď; *nemusejí* být uloženy v počítači, ani není nutné, aby se objevovaly na obrazovce počítače. Odpovědi mohou být napsány, ale není nutné, aby se objevovaly na konzolách.

Ponecháme-li stranou otázku nákladů, jsou nejvážnějším omezením vyučovacích strojů (nebo CAI) *hranice programované instrukce*, ať již na počítači nebo ne. Popíši teď některá z těchto omezení.

Především co se týče oprav: počítač může (podobně jako kniha nebo skripta) podat stereotypní výklad a určit osobní chyby studentovy, ale není schopen rozpoznat jeho duševní stav nebo citové problémy. Omyly jsou často způsobeny denním sněním nebo pozorováním sousedových taškařic.

Mimoto jak může programovaná instrukce nahradit motivaci? Dokonce i děti si instinktivně uvědomují, že cokoliv může být strojem vyloženo, může být i účinněji strojem spočítáno. Tak proč se tomu učit? Počítače nikdy nemohou vycvičit lidi, jak zaujímat významná postavení v automatizované společnosti.

*) Viz P. Suppes, Sat. Rev., leden *14*, 1967, str. 47—50. Je třeba uvážit, že lidský činitel závisí na životních podmínkách a může se změnit z jednoho desetiletí na druhé.

Konečně, a to je nejdůležitější, jak programovat instrukce *pojmů,* tj. smyslu slov? Pokoušel jsem se vás přesvědčit, že základním pojmem aritmetiky je kvantita. Tento pojem je obsažen v popisech „deset mil", „padesát tun", „jitro", „hodina", „dva milióny dolarů", právě tak jako v rozdílu mezi 3% a 10% úrokem! Jak vysvětlit počítači, *co je to* kvantita?

Také jsem se vás snažil upozornit na možné logické přístupy ke geometrii a na skromný úspěch nejlepšího existujícího programu na řešení „originálů" v Euklidově rovinné geometrii. Jistě by bylo daleko těžší programovat návod, který by byl schopen účinně a systematicky ukázat studentům s různým intuitivním pozadím, jak řešit širokou stupnici těchto originálů.

Otázka rozličnosti, ke které se později vrátím, má mnoho podob. Mělo by být snad vyučování matematice a vědě zjednodušeno na jeden jediný optimální program, kterého by se používalo celonárodně nebo celosvětově? Pochybuji o tom; myslím si, že rozličnost je zdravá*) a prospěšná matematické tvůrčí činnosti. Je-li tedy rozličnost žádoucí, bude asi těžko existovat nějaký program nejlepší pro všechny druhy studentů; bude třeba vyvinout celou spoustu programů pro CAI a určit je jednotlivým typům.

Z těchto důvodů se mi zdá užitek vyučovacích strojů v blízké budoucnosti silně omezen jen na podávání, opravování a hodnocení individuální početní zručnosti na elementární úrovni. Navíc budou musit soutěžit *souběžné konzoly* v hospodárnosti s pracovními listy a kartami, produkovanými ve velkém množství, které mohou být analyzovány a opravovány velice levně a hromadně v podstatě tímtéž programem**) nebo opravovány volně studenty podle klíče.

Přesto si myslím, že počítače mohou být ve stále větší míře cenným přínosem pro vyučování matematice, ovšem budou-li jejich omezení správně pochopena.

18. Objevy v matematice. Fascinující a sporná je otázka, do jaké míry mohou přispět počítače, důvtipně programované, k objevům v matematice. Mně je jasné, že to je požadavek na vysoce vyvinutou *„symbiózu člověk – počítač,* v níž každý z partnerů dělá to, nač se nejlépe hodí" ([1], sv. 8, str. 41; viz. také [7]).

Člověk nemusí být tvůrčím matematikem, aby pochopil, v čem je sporná otázka. Neboť jak si všiml HADAMARD ([21], str. 104): „Mezi úsilím studenta, který hledá řešení geometrické úlohy, a úsilím genia ... je rozdíl pouze v míře!" Podobně PÓLYA ([42]) začíná svou předmluvu: „Veliký objev řeší veliký problém, ale zrnko objevu je v každém problému."

Dokazování matematických vět je převážně (ne-li vůbec) záležitostí deduktivní logiky a matematikové mají pronikavou a neobyčejně přesnou schopnost poznat, kdy je deduktivní krok správný. Tato schopnost je tisíckrát přivolávána v řadě sylogismů, kde jeden chybný krok může být osudný. Myslím, že tato schopnost záleží v rozpoznání jistých přijatelných větných vazeb; mohla by být nazvána deduktivně logickým „smyslem". Není to ovšem žádný z našich čtyř nebo pěti vnějších smyslů; je to vnitřní smysl,

*) O běžných rozdílech v názorech, jak nejlépe učit, viz *Educational Studies in Mathematics*, sv. 1, Reidel Publishing Co., Dordrecht, Holland, 1968.

**) Za předpokladu, že rukopis může být „čten" počítačem; lze předpokládat, že to bude možné.

jako je smysl pro rovnováhu nebo pocit horečky, které jsou ovlivněny mozkovou činností. Tak jako náš smysl pro hudbu (výška tónů a jejich zabarvení) mohou být i ony do značné míry ovlivněny cvikem.

Protože číslicové počítače jsou stroje s binárními prvky o konečném počtu stavů, domnívám se, že nám mohou být užitečné při důkazech vět diskrétní matematiky. Nejúčinnější bude zejména symbióza člověk-stroj při důkazech v logice, aritmetice (teorii čísel) a v příbuzných oblastech algebraických*) a kombinatorických. Ačkoliv ani v těchto oblastech nás nesmí *svádět náš obdiv pro logiku k podceňování významu našich ostatních smyslů.*

Ačkoliv je vlastně možné považovat člověka za hybridní počítač, je ve skutečnosti něčím více. Ve srovnání s lidmi jsou hybridní počítače jako osobnosti velmi omezeny. Jejich mysl je jednostranná: jsou dogmatické, bez představivosti a s oblibou se opakují. Nejsou schopny vnímat ani nejzřejmější fakta týkající se kontinua, pokud nejsou vybaveny speciální *aritmetickou jednotkou* (a řízeny numerickým analytikem). Tato jednotka umožňuje nahradit lidské „bleskové kalkulátory", které jsou však samy o sobě obvykle bez matematické vnímavosti.

Domnívám se, že by se matematici měli pokusit rozptýlit obecně vžitý názor, že i oni jsou jen nevnímavými automaty. Měli by popírat myšlenku, že rozdíl mezi nimi a herními nebo dokazujícími stroji je pouze v míře; rozdíl je kvalitativní. Matematici musejí bojovat proti nařčení, že jejich jedinou duševní schopností je obratnost v zacházení se symboly a čísly podle pevných pravidel! Není snad jejich schopnost zacházet s pojmy ve smyslu Gestalt teorie**) právě tak podstatná?

Tak právě elementární teorie čísel byla nesmírně obohacena pojmy (diofantské) aproximace a krystalické mříže***) (geometrie čísel), zatímco naše znalosti o rozložení prvočísel závisí podstatně na pojmech asymptotického přiblížení a komplexní analýzy (zobrazující nuly $\zeta(t)$ v komplexní rovině). Bylo by patrně nesmírně obtížné programovat počítač tak, aby dovedl spojovat tyto pojmy tak obratně jako dovedný matematik.

Omezující role binární logiky při matematických objevech je působivě vyjádřena v jediných psychologických studiích matematické tvůrčí práce, které znám: v HADAMARDOVI ([21]) a PÓLYOVI ([42]). Tak Pólya dospívá k tomuto tvrzení: „pokoušejíce se řešit nějaký problém, prohlížíme jej ze všech stran, obracíme jej ve své mysli; *obměny problému* jsou podstatné pro naši práci" ([42], str. 120). Podobně Hadamard ([21], kap. VII) rozebírá podrobně různé psychologické postupy v matematické tvůrčí činnosti. Spojuje postup „logické hry" s povrchností, tedy: „Je přirozené mluvit spíše o intuitivní mysli, je-li oblast, kde vznikají myšlenky, hlubší, a o logické mysli, je-li tato oblast spíše na povrchu...." Na další stránce zdůrazňuje význam matematických vjemů v raném mládí pro tvůrčí práci v dospělosti ([21], str. 114—115): „Známá zkušenost říká, že zcela dokonalá organizace a syntéza běžných jevů se děje v našem nejranějším dětství a pro-

*) Pro nedávné příspěvky k algebře vz. J. J. CANNON Comm. ACM, *12* (1969) str. 3—12 a J. R. GUARD et al., J. Assoc. Comput. Mach., 16 (1969), str. 49—62.

**) Také gestaltismus (Gestalt, tj. struktura): psychologický a filozofický směr, který odmítá navzájem izolovat jevy, aby mohly být vysvětleny, a považuje je za nedělitelné struktury (formy). Pozn. př.

***) Je důležité připomenout, že „prostorové grupy" krystalických mříží byly nalezeny metodami, které se opíraly o názor dříve, než byly „grupy" přesně zavedeny postuláty.

bíhá v hlubinách našeho podvědomí, a tedy nesmírně rychle," a zdůrazňuje „jak rozdílně se projevují vědci podle toho, jak jejich myšlení napomáhá obrazivost a jiné konkrétní představy."

Povrchnost myšlenky, že matematický objev je hra vhodná pro číslicové počítače, ironizuje i mnoho jiných matematiků. Tak E. W. BETH ([59], str. 210) připomíná, že více či méně triviální zobecňování problémů (tj. prověřování hypotéz) je jedna z mála věcí, které je schopen počítač. L. COUFFIGNOL také poznamenává, poněkud kousavě, že „Bourbaki je tu, aby si hrál na Bourbakiho" ([59], str. 125). Jak si všiml WEYL ([23], str. 483), matematické věty jsou pravdy s plným významem; jejich slovní opis je v takovém vztahu k matematické pravdě, jako se přirovnává v pohřební řeči balzamované lidské tělo k živé osobě.

19. Umělecké dílo na počítači. Z psychologického hlediska má matematika mnoho společného s hudbou a s výtvarným uměním. Obojí se spoléhají na jemný estetický cit. Jak poznamenává VON NEUMANN ([41], str. 4): „Matematické myšlenky pramení ze skutečnosti .... Ale od okamžiku, kdy je předmět zachycen ..., je ovládán výlučně estetickými ohledy." Podobně píše G. H. HARDY: „Matematik je podobně jako básník nebo malíř tvůrcem... Prvním hlediskem je krása."*)

Tedy možnost převést dokazování vět na počítač je jen jedním zřetelem širšího problému, totiž převést na počítač uměleckou tvorbu. Chtěl bych něco málo poznamenat k této svůdné (pro některé vědce zabývající se počítači) a současně úděsné (pro většinu umělců) možnosti, než se vrátím k matematice. Chtěl bych tak učinit proto, že můj otec GEORGE D. BIRKHOFF usilovně přemýšlel o této možnosti zmechanizovat umělecký výtvor již před čtyřiceti léty.

Když vykládal své myšlenky matematikům v krásném Palazzo Vecchio ve Florencii, začal s odvoláním**) na HEMSTERHUISOVU (18. stol.) definici umělecké hodnoty požadující „vyjádření co největšího počtu myšlenek v co nejkratším čase". Jak je to blízko duchu našeho současného sympozia o optimizaci!***)

Můj otec podal ve své knížce *Aesthetic Measure* ([11]) kvantitativní ocenění estetické kvality M formulí $M = O/C$, v níž čitatel O znamená míru „řádu" a jmenovatel C míru „složitosti" nebo úsilí o pochopení. Tato studie byla napsána v duchu blízkém introspektivní psychologii, v němž BOOLE vyšetřoval zákony logiky.

Můj otec vytvořil také na ukázku vázy, melodie a básně podle oné formule (i když bez pomoci počítače). Ovšem také varoval ([11], str. 13), že „úplné kvantitativní použití základní formule je možné, jen jsou-li prvky řádu vesměs formální". Ačkoliv tvořil, veden formulemi, považoval to jen za ukázku dovednosti (*tour de force*) a nikdy ani minutu nepomyslil na to, že by umění mohlo z takových pokusů těžit.

V každé umělecké činnosti, ať je to umění nebo čistá matematika, je nejobtížnějším problémem volba z nesčíslného množství možností. Tak např. podle POINCARÉA a HADA-

*) G. H. HARDY, *A Mathematician's Apology*, London, 1940

**) Atti Congresso Internat. dei Matematici, sv. *1*, Bologna 1928 str. 315—333. Přetištěná verze některých těchto myšlenek je v JAMES R. NEWMAN, *The World of Mathematics*, sv. 4.

***) Viz. SIAM, J. Control (1969) ,jehož příspěvky byly předneseny na tomtéž shromáždění SIAM jako tato řeč.

MARDA ([21], str. 30) „podvědomí vytváří nesčetně možností a kombinací, z nichž vědomí zkoumá jen malou část“. Hadamard zdůrazňuje podobnost s uměleckou tvůrčí prací, jak ji popisuje PAUL VALÉRY*): „Dvě stránky téže mysli se zúčastní na tvorbě. Jedna kombinuje a druhá volí..., co nazýváme géniem, je daleko méně práce prvé než pohotovost druhé, chopit se předložených hodnot a zvolit mezi nimi. Pravidla, kterými se tato volba řídí (v umění i v matematice), jsou na výsost jemná a choulostivá. Stanovit je přesně je téměř nemožné: jsou spíš cítěna než vyjádřena..., jak bychom si mohli představit síto schopné používat jich mechanicky?“

Proto si myslím, že by „vědci“ zabývající se počítači, kteří navrhují šmahem převést uměleckou tvorbu na počítače, měli pečlivě volit svá slova. Jak objevil můj otec, nejobtížnějším problémem v převedení umělecké činnosti na počítač je nalézt formuli pro estetickou hodnotu, která by spolehlivě volila nejlepší z mechanicky vytvořených děl. Pro uměleckou tvorbu je nejdůležitějším požadavkem dobrý vkus a ten je všeobecně považován za nedefinovatelný. Je také třeba zabránit tvorbě kýčů a neplýtvat časem při jejich hodnocení. Dokud nebude stanoveno v matematických termínech, co je to dobrý vkus a kýč, mohou být počítače programovány jako kresliči a hráči na piano, ale nikoliv jako hudebníci ani jako umělci.

A tak pochybuji, že „číslicové počítače budou psát hudbu, kterou kritikové označí za esteticky cennou“ už v roce 1967, jak bylo prorokováno**). Přinejlepším mohou někteří vědci zabývající se počítači a někteří kritikové shledat, že počítače jsou užitečné při analýze, pozměňování a znovusestavování zlomků jejich výtvorů***). Skutečně se také počítače osvědčily výtvarným umělcům v této symbiózní spolupráci.

Co se týče dokazování vět, skutečně je možné napsat program, který by dokázal jakýkoliv počet pravdivých vět – vyjadřujících např. boolovské identity. Ale jak poučit počítač, aby vybíral důležité věty? Nebo aby řadil lemmata tak, aby byla po ruce, když je právě třeba? Nebo aby se vystříhal věčných opakování na totéž téma? Dosud se v tom ničeho nedosáhlo, a to na žádné úrovni.

Konečně téměř všechny otištěné matematické důkazy vynechávají velkou část nepodstatných detailů, viz § 21 pro rozbor a význam této skutečnosti. Jak programovat počítač, aby potlačoval „triviální“ detaily (a odstranil balast)? Nemohlo by to být tak, že by se optimizovala spolupráce člověk-počítač (viz § 18) a hlavní úlohou počítače by přitom bylo právě prověřování takových detailů?

Z těchto důvodů si myslím, že bude velice nesnadné převést na počítač umělecká díla v matematice, natož pak ve výtvarném umění.

---

*) PAUL VALÉRY (1871–1945), francouzský spisovatel a básník, žák S. MALLARMÉA a dovršitel francouzského symbolismu. Po několika sbírkách se odvrátil na čas od poezie, neboť ji považoval za „nebezpečné modlářství“ a věnoval se matematice. Hledání „jednoty tvůrčího ducha“ jej opět přivedlo k literatuře a nakonec nalezl znovu poezii. Pozn. př.

** H. A. SIMON a A. NEWELL, Operations Res., *6* (1958), str. 1–10; viz také L. A. HILLER a L. M. ISAACSON, *Experimental Music: Composition with an Electronic Computer*, McGraw-Hill, New York, 1959.

***) Viz J. E. YOUNGBLOOD, J. Music Theory, *2* (1958), str. 24–35; A. FORTE, tamtéž, *8* (1964), str. 136–183, a 10 (1966), str. 330–364; také J. E. COHEN, Behavioral Sci., *7* (1962), str. 137–163. Za tyto odkazy děkuji panu S. W. SMOLIAROVI.

20. Názornost. Matematikové se značně rozcházejí v míře*), v jaké se při nalézání a ověřování vět spoléhají na názor. Že však názor hraje hlavní roli, vidím v tom, že stále užíváme jako synonyma slov „dokazovat“ „demonstrovat“ nebo „ukázat“. Právě v abstraktní diskrétní matematice přichází názor vhod při manipulaci se symboly. Uvažme např. všeobecnou popularitu črtání diagramů v algebře (zvláště v teorii homologií a kategorií).**)

Jak mohli Descartes a Hilbert uvažovat jinak? Descartes byl pravděpodobně ovlivněn svým skvělým úspěchem, když se mu podařilo nahradit obrázky v Euklidově geometrii polynomickou algebrou. Hilbert byl také ovlivněn kartézskou geometrií; ve své práci o logice naráží stále na to, že bezespornost Euklidových axiómů by bylo lze dokázat analyticky, kdyby se definovaly body abstraktně jako dvojice čísel (x, y) nebo trojice (x, y, z).***) (Jak je to vzdáleno Helmholtzovým myšlenkám o „základech“ geometrie!) Hilbert mohl být také ovlivněn svým úspěchem v použití axiómu výběru k nekonstruktivním důkazům algebraických vět. V každém případě jsou Hilbertovy a Descartovy názory jednostranné. Všiml si toho Hadamard ([21], str. 87), když poznamenává: „Descartes znevažuje vliv názoru a přeje si jej úplně vymýtit z vědy... Docela nedávno byl podán jiný přesný výklad geometrie prostý vší intuice... slavným matematikem Hilbertem. Logicky je vyloučen každý zásah geometrického citu. Ale je to totéž z psychologického hlediska? Jistě ne.... Obrázky se objevují na každé stránce (Hilbertovy knihy!).“

V předmluvě k jiné knize****) Hilbert zdůrazňuje, že „intuitivní chápání hraje hlavní úlohu v geometrii“. Totéž platí o klasickém axiomatickém pojetí projektivní geometrie, i když se používá libovolných systémů souřadnic.†)

Naopak mnozí moderní algebraičtí a diferenciální geometři následují tvrdošíjně Hilberta. Studují geometrii trojrozměrného prostoru R^3, v němž žijeme, nebo dokonce našeho prostoročasového kontinua R^4. Jejich hlavním zájmem jsou obecné vlastnosti platné pro všechny množiny (m-rozměrné variety) vektorů $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, komplexních řešení libovolné množiny $n - m$ nezávislých polynomických rovnic. Zřejmým znakem jejich nedostatku fyzikálního cítění a nezájmu o geometrii je, že se v jejich knihách nevyskytuje ani jeden obrázek reálné křivky nebo plochy.

Bylo by neplodné debatovat o zásluhách těchto různých pojetí geometrie; zmiňuji se o nich proto, abych ukázal na různorodost matematiků. Zdá se, že bude zajímavější vrátit se zpět k otázce: „*Do jaké míry může být analýza založena jen na logice*?“

20.1. Klasická analýza. Zanedlouho potom, co Descartes ukázal, jak aplikovat souřadnicovou geometrii („géométrie analytique“) na vyjádření křivek a ploch algebraickými formulemi, byl vynalezen infinitezimální počet (infinitezimální analýza, zkráceno později

*) Bylo by zajímavé napsat psychologickou studii modu operandi slepých matematiků, jako byl Euler nebo Pontrjagin.

**) Viz S. MacLane a G. Birkhoff, *Algebra*, MacMillan, New York, 1967.

***) Za předpokladu bezespornosti axiómů euklidovského prostoru (tedy relativní bezespornost). Pozn. překl.

****) D. Hilbert a S. Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*, Springer Verlag, Berlin, 1932 (podle Hilbertových přednášek z let 1920—1921).

†) Viz O. Veblen a J. W. Young, *Projective Geometry*, sv. 1 a 2, Ginn, Boston, 1910, 1918.

na analýzu) k určování jejich sklonu, obsahů, tečen, úhlů průsečnic a jiných viditelných vlastností. Pro příštích 150 let zůstala analýza ve svém vývoji podstatně závislá na názoru a fyzikální intuici. Ve skutečnosti ani EULER, ani CAUCHY nikdy formálně necharakterizovali systém reálných čísel (jako jediného úplně uspořádaného tělesa)*); ani si nebyli vědomi toho, že tato množina je nespočetná. Euler si zcela jistě *představoval* reálné číslo střídavě jako neomezené desetinné číslo a jako představitele bodu na přímce s vyznačenou stupnicí. Nikdy také nepodal obecnou definici funkce. Představoval si zřejmě funkce střídavě jako definované formulemi, grafy, tabulkami přibližných číselných hodnot a posloupností koeficientů mocninných řad a zvláštními geometrickými nebo fyzikálními vztahy, které mohou být jen matně popsány v symbolické logice. Pro něho (jako i pro mne!) je úžasná skutečnost, že tyto různé představy jsou záměnné v té spoustě aplikací, skutečnost, která může být ověřena na nesčetně způsobů.

Navíc přivedlo Eulera intuitivní spojování spojitých funkcí s posloupnostmi koeficientů (obyčejně racionálních čísel, alespoň v zajímavých případech) jejich mocninných rozvojů k použití vytvořujících funkcí na řešení problémů z kombinatorické analýzy a teorie čísel. Tato plodná myšlenka by ho byla nikdy nenapadla ve století, kdy byl nejasný rozdíl mezi analytickou a nekonečně diferencovatelnou funkcí, kdyby byl trval na detailním a formálním důkazu každého tvrzení.

21. Logická přesnost v analýze. Potřeba větší logické přesnosti v analýze se poprvé ukázala po roce 1755, když DANIEL BERNOUILLI inspirován matematickou teorií chvějící se struny vyslovil domněnku, že „každá“ (rozumná) periodická funkce může být rozvinuta, jak bychom dnes řekli, ve svou Fourierovu řadu. Proti této domněnce se vyslovili D'ALEMBERT, Euler a LAGRANGE, ale čas ukázal, že jejich námitky nebyly správné.

Tato neprůkaznost se stala zřejmou kolem roku 1815, když FOURIER podal pozoruhodné příklady, ukazující, že konvergentní řady hladkých (dokonce analytických!) funkcí nemusejí mít hladké součty. Fourier také podal s použitím Eulerova pojmu ortogonality výmluvné intuitivní důvody k podpoře tvrzení, že „každá“ funkce $f(x)$ s konečným $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ může být vyjádřena jako (Fourierův) integrál $\int A(k) \cos kx\, dk + \int B(k) \sin kx\, dk$. Tento výsledek (Fourierův integrální teorém) pomohl inspirovat Helmholtze k teorii slyšení, která byla rozebrána v § 12.

Rozpory kolem rozvinutelnosti ve Fourierovu řadu nutily matematiky podat jasnou definici funkce, spojitosti a konvergence. Přesto, jako často v matematické fyzice (viz 22), přesnost přišla naposled. Bylo to až 1829, kdy DIRICHLET podal rozumně přesný deduktivní důkaz Bernouillovy domněnky, založený na jasné definici spojité funkce a konvergence. To vedlo konečně kolem r. 1850 k RIEMANNOVĚ obecné teorii integrability.

Hledání větší teoretické přesnosti v základech analýzy pokračovalo až do 1. světové války. Vedlo k moderní charakteristice reálného kontinua jako jediného úplně uspořádaného tělesa a konečně k Lebesgově teorii integrace, daleko obecnější, než byla Riemannova, a v níž podstatnou úlohu hraje Cantorova klasická věta, že totiž *reálné kontinuum*

*) Ovšem pokud má mít systém reálných čísel jediný model (jak se obvykle předpokládá), nemůže být zcela popsán žádným formálním systémem axiómů (který nemluví neformálně o množinách), neboť každý formální systém, který má nekonečný model, má modely libovolně velkých mohutností. Pozn. př.

je nespočetné: je nemožné uspořádat množinu R reálných čísel do posloupnosti. To znamená, že mohutnost $\mathfrak{c}$ reálného kontinua je nekonečně větší než mohutnost nekonečné posloupnosti, která je $\aleph_0$.

21.1. Cantorův ráj. Cantorův skvělý výsledek byl právě jednou z aplikací jeho dalekosáhlé obecné teorie nekonečných množin, která je čistě deduktivní a která osvobodila rozbor reálného kontinua od všeho názoru a ode vší mystiky. Jako další použití své obecné teorie ukázal Cantor také, že $\mathfrak{c} = n^{\aleph_0}$ pro každé celé $n > 1$ a také, že $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}^n$ pro každé přirozené n: mezi prostory všech dimenzí existuje vzájemně jednoznačný vztah.

Je si třeba uvědomit, že Cantorovy myšlenky a metody nebyly zpočátku uznávány. Kronecker byl tak zaujatý vůči Cantorovým metodám, že jim odmítal publikaci, a i Cantor sám byl k nim nedůvěřivý*).

21.2. Richardův paradox. Cantorova teorie skutečně vedla k řadě paradoxů a hlubokých otázek. Uvažme např. problém definování všech reálných čísel. Máme-li nějakou konečnou abecedu, obsahující písmena, číslice, interpunkční znaménka a mezery, je možné seřadit do nekonečné posloupnosti všechny možné slovní definice: pouze konečně mnoho jich má délku n. Naopak, jak již bylo poznamenáno, Cantor ukázal, že je nemožné uspořádat množinu R reálných čísel do posloupnosti. Z toho plyne, že *jen nepatrná část reálných čísel je definovatelná slovy:* v jazyce, kterým píšeme na psacím stroji, nelze definovat libovolné reálné číslo (bod kontinua). Tento nepříjemný fakt se nazývá Richardův paradox.**)

Logikové věnovali mnoho úsilí, aby popsali (spočetnou) množinu $W \subset R$ všech reálných čísel, které lze (rekurzívně) definovat pomocí konečných tvrzení. Poněvadž existuje bijekce b, $b : R \to 2^P$ z množiny reálných čísel do podmnožin $S \subset P$ množiny P všech přirozených čísel, existuje odpovídající množina $b(W)$ definovatelných množin přirozených čísel. Tímtéž způsobem lze vydělit „definovatelné" podmnožiny každé spočetné množiny (např. Z nebo Q). Dokonce lze definovat podobně množinu všech definovatelných funkcí $f : U \to V$ ze spočetné množiny do jiné spočetné množiny, neboť existuje bijekce $\beta : R \to P^P$.

Turingovu tezi (často nazývanou Churchovou tezí)***) lze snadno vysvětlit na pozadí

---

*) H. Meschkowski, *Ways of Thought of Great Mathematicians*, Holden-Day, San Francisko, 1964, str. 92—93.

**) Richardův paradox se obyčejně popisuje jinak: Mějme konečnou abecedu popsanou v textu. Všechny definice vlastností přirozených čísel srovnejme do posloupnosti: $A_1, \ldots$. Že nějaké číslo n má vlastnost označenou A_k, zapišme $A_k(n)$, v opačném případě $\sim A_k(n)$. Všimněme si výrazu $\sim A_n(n)$ (který je zápisem tvrzení: číslo n nemá vlastnost A_n). Existuje tedy r tak, že $A_r(n)$. Pro všechna n tedy A_r platí, právě když platí $\sim A_n$. Položme $n = r$ a dostáváme spor.

V tomto popisu je spousta nepřesností, které se podařilo odstranit Gödelovi a přetvořit tak R. paradox v jeden z nejvýznamnějších metamatematických výsledků, v tzv. Gödelovu větu o neúplnosti jistých formálních systémů (ukazující existenci intuitivně pravdivých vět, které jsou v těchto systémech nedokazatelné). Pozn. př.

***) Churchovou tezí se nazývá toto (v podstatě) filozofické tvrzení: Třída všech funkcí, které lze efektivně vyjádřit, splývá s třídou všech obecně rekurzívních funkcí (a s třídou všech funkcí, které lze vyjádřit pomocí Turingova stroje (Turingova teze)). Pozn. př.

předchozích definic. Říká, že každé definovatelné reálné číslo lze spočítat na Turingově stroji a naopak. Definovatelnost a spočítatelnost jsou tedy ekvivalentní.

21.3. Hypotéza kontinua. Nakonec Cantor uvízl. Ačkoliv si byl jist, že není žádné nekonečné kardinální číslo mezi $\aleph_0$ a $\mathfrak{c}$ – tj. že $\mathfrak{c}$ je druhé nejmenší nekonečné kardinální číslo $\aleph_1$ – nemohl to dokázat. Weierstrass a Hilbert, ačkoliv byli hlubokými a přesnými analytiky, oba věřili, že tuto domněnku, tzv. hypotézu kontinua, dokázali.*)

Nedávno dokázal PAUL COHEN ([15]) intuitivními metamatematickými metodami, že hypotéza kontinua nemůže být soudobými metodami formální logiky ani dokázána, ani popřena.

Jak se mohli Weierstrass a Hilbert tak hluboce mýlit? Podobně jak mohl velký logik FREGE pracovat po léta na základech logiky a nakonec se dovědět od RUSSELA, že jeho metody obsahují spor (viz [23], str. 127, kde je popsán Russelův paradox)? Podle mého mínění ukazují prostě tyto příklady na to, jak je nebezpečné spoléhat se pouze na čistou deduktivní logiku.

To vše ovšem nezlehčuje význam úsilí o zpřesňování analýzy. Samozřejmě že každý má logikou kontrolovat intuici; HADAMARD říká ([21], str. 102), že názor a zdravý rozum jsou klamné. Já pouze zdůrazňuji nebezpečí založit analýzu *výlučně* na logice. V tomto duchu zdůrazňoval WEYL ([23], str. 483), že „asi jen pro ubohou část klasické analýzy mohou být podány zcela formální důkazy“. WHITEHEAD a Russel ([55], část VI) doznávají, že dokonce v jejich mistrovském díle „důkazy počátečních vět jsou podány se všemi podrobnostmi, ale jak dílo pokračuje, postupně se zhušťují“. A i tak jim zabralo tři tlusté svazky psané ve zhuštěném symbolismu jen ke konstrukci R.

Tyto úvahy mě přesvědčily, že formální logika sama o sobě je nevhodná pro analýzu – a ačkoliv některé formální stránky analýzy mohou být převedeny na počítač ([1], sv. 8, str. 64–66) a ([17], str. 191–206), jsou mnohé z jejích pojmů pochopitelné jen názorem. Jak napsal von Neumann ([41], str. 27): „Analýza je technicky nejúspěšnějším a nejlépe vypracovaným odvětvím matematiky. A tak je formální logika svým postupem odříznuta od nejlépe pěstěných částí matematiky.“

Jako na další nepřímé svědectví ve prospěch svých názorů bych vás chtěl upozornit na existenci dvou neklasických (kacířských) současných verzí analýzy, z nichž každá je alespoň tak logická a v sobě bezesporná jako analýza Riemannova, Weierstrassova a Poincaréova. Je to konstruktivní analýza a nestandardní analýza. První pramení z logického intuicionismu L. E. J. BROUWERA (chrabrého dopůrce Hilbertova formalismu); je silně omezující a přímo puritánská v tom, co nedovoluje. Druhá je vytvořena v geniální tradici Leibnizově a Cantorově a velmi liberální, co se týče vnitřně bezesporných modelů skutečnosti. S hrubým násilím na Weierstrassově puritánství mluví svobodně o nekonečně malých a nekonečně velkých bez jakýchkoliv ε a δ.

Abyste viděli, jak se může analýza rozpadnout, když je vedena pouze deduktivní logikou, doporučuji vám dvě pěkná klasická díla popisující obě tyto verze.**)

*) Viz [23], str. 367 a také K. GÖDEL, Amer. Mat. Monthly, *54* (1947), str. 515–524.

**) E. BISHOP, *Constructive Analysis,* John Wiley, New York, 1967; A. ROBINSON, *Nonstandard Analysis*, North-Holland, 1966. Robinson ve své předchozí knize o nestandardní algebře se staví za „tak liberální a nespoutané hledisko, jak jen možno“.

22. Aplikovaná matematika. Ačkoliv toho počítače dosud mnoho neudělaly ani pro uměleckou tvorbu ani pro čistou matematiku, jsou již přes desetiletí nepostradatelné pro aplikovanou matematiku. Je to pravděpodobně tím, že *kritéria pro optimizaci průmyslové výroby jsou objektivní:* obyčejně jde o to, jak dosáhnout největšího výnosu s nejmenšími náklady! To udělalo z počítačů (obratně programovaných numerickými analytiky) nepostradatelný nástroj pro optimální návrhy jaderných reaktorů, odbytu nafty a vysílání družic na oběžnou dráhu.

To mě nepřekvapuje. Co mě však překvapuje, je stanovisko některých vědců zabývajících se počítači, kteří tento úspěch snižují pod vlivem zjednodušujících představ o lidském mozku. Tito čistí „vědci" jsou podobni čistým matematikům, kteří ačkoliv jsou sami jen aplikovanými logiky, neustále snižují význam aplikované matematiky a nejraději by ji odsoudili k zániku. Osobně považuji za větší výzvu na poli kybernetiky zlepšení lidských životních podmínek než pokusy o napodobení lidského mozku. Jakkoliv jsou takové pokusy uchvacující ze stanoviska čistě psychologického, jsou z realistického stanoviska zatím bezvýznamné.

Lidský mozek, jak jsem se vás snažil přesvědčit, je mnohem více než pouhý logický stroj. Ve smyslu von Neumannova pozorování, že „matematické myšlenky pramení v empirii", bych chtěl upozornit, že matematika poprvé nabrala hloubku, když se lidé pokoušeli použít diskrétní početní techniky a logiky na geometrii. To vedlo PYTHAGORA k objevu existence iracionálních čísel a později k základnímu pojmu Dedekindových řezů. Také teorie čísel se obohatila hlubším obsahem, který byl dán pojmu „diofantské rovnice". Teorii čísel nakonec zrevolucionovalo, když GAUSS a jeho současníci znázornili algebraická čísla v komplexní rovině.

Riemannova teorie funkcí také vděčí za svůj původ geometrické a dokonce fyzikální intuici.*) Tento příklad ukazuje závislost analýzy nejen na názoru, ale také na naší fyzikální intuici pro tepelné a světelné jevy, pro elektřinu a magnetismus. Ocitujme Fouriera: „Hluboké studium přírody je největším pramenem matematických objevů." V minulosti se ukázala fyzikální intuice mnohem spolehlivější než formální matematika při úvahách, které problémy z parciálních diferenciálních rovnic jsou dobře položeny.**) Navíc byla fyzikální intuice pramenem takových základních matematických pojmů, jako je stabilita, vektorové pole, Greenova funkce, ortogonální rozvoj, vlastní funkce, charakteristiky, obory závislosti.

Konečně jestliže byla fyzikální intuice pramenem tolika nejhlubších myšlenek čistě matematických, jak mnohem významnější je pro aplikovanou matematiku, neustále vyzývanou novými problémy reálného života nezbadatelné hloubky a složitosti. A zkusme ovládnout tyto problémy logikou, vždy nám něco unikne. V mechanice kapalin je např. známo, že přesvědčivé matematické důvody vedly často na scestí a k paradoxům***), jejichž řešení zaměstnalo dovednost mnoha sofistů!

---

*) SOMMERFELD ve své *Electricity* poznamenává, že Weierstrass považoval Riemannovy myšlenky za těžko pochopitelné, zatímco více intuitivní Helmholtz se jich okamžitě chopil.

**) Viz HADAMARD, *Lectures on Cauchys Problem*, Yale University Press, New Haven, 1922.

***) Viz G. BIRKHOFF, *Hydrodynamics: A study in Logic, Fact and Similitude*, 2nd ed., Princeton University Press, Princeton, 1960.

Může být, že v budoucnosti bude hrát fyzikální intuice stále menší roli v čisté i v aplikované matematice. Žijeme totiž ve věku, kdy aplikace matematiky sahají daleko za fyziku a inženýrské obory, začínají pronikat chemií, biologií, ekonomií a vědami o řízení. Předpovídám, že vznikne mnoho nových, významných pojmů v matematice, podníceno svědectvím všech našich smyslů a citů, a nejen smyslem pro logiku.

22.1. Symbioza člověk-počítač. S myšlenkou „myslícího stroje" na způsob robota, který by nahradil lidskou bytost zvláště v čisté matematice, se asi musíme rozloučit. Místo toho se raději podívejme na stále se rozvíjející symbiózu člověk-počítač, v níž každý partner dělá, co nejlépe umí. Určit, která je to činnost, nebude lehké. Bude užitečné sledovat Pólyův návrh ([42]), že „matematická vynalézavost a vyučování matematice by mělo být vyšetřováno ... metodami experimentální psychologie". Jen když bude vedena porozuměním jednak pro psychologii lidského partnera, jednak pro zvláštnosti číslicových počítačů, bude symbióza člověk-počítač úspěšná v zítřejší čisté a aplikované matematice.

Věřím, že počítače se stanou cenným nástrojem výzkumu psychologických postupů lidského učení, dokazování vět, hraní her a jazykových překladů. Ale zároveň si myslím, že pokusy nahradit lidské myšlení staticky nebo dynamicky programovanými výpočty, by měly být omezeny na oblasti se zřejmým ekonomickým a společenským významem.

To může zúžit úlohu čistých vědců zabývajících se počítači na úlohu techniků, kteří optimizují příspěvek stroje k symbióze člověk-počítač. Aby se stala tato symbióza opravdu účinnou, bude naše společnost potřebovat jak aplikované matematiky, tak numerické analytiky, aby řídili aproximace, které byly vytvořeny k modelování kontinuí, a především převáděli výsledky na vědecké a inženýrské problémy, jejichž řešení měli najít.

Myslím si, že tyto potřeby dávají SIAMu jednu z největších příležitostí a současně výzvu: dodávat odvahu a povzbuzovat odborný vývoj takových aplikovaných matematiků, kteří jsou schopni s porozuměním rozmlouvat s ostatními vědci a inženýry a kteří znají možnosti a omezení číslicových počítačů. Mužů s těmito schopnostmi bude zapotřebí v matematickém světě zítřka, ale bude obtížné je nalézt a vychovat.

Literatura

[1] A. L. Samuel: Advances in Computers, Academic Press, New York. (Periodical).

[2] J. McCarthy a C. E. Shannon vyd.: *Automata Studies*, Anals of Mathematics Studies, 34, Princeton University Press, Princeton, 1956.

[3] R. C. Anderson a D. P. Ausubel: *Readings from the Psychology of Cognition*, Holt, Rinehart a Winston, New York, 1965.

[4] W. Ross Ashby; *Design for a Brain*, John Wiley, New York 1952.

[5] — *An Introduction to Cybernetics* John Wiley, N. Y. 1956.

[6] Y. Bar Hillel: *Language and Information...* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1964.

[7] G. von Békésy: *Experiments in Hearing*, McGraw-Hill, New York, 1960.

[8] R. Bellman vyd.: *Mathematical Problems in the Biological Sciences*, Proc. XIV Symposium Applied Mathematics, American Mathematical Society, Providence, 1962.

[9] P. BENACERRAF a HILARY PUTNAM: *Philosophy of Mathematics, Selected Readings*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

[9a] E. W. BETH a J. PIAGET: *Mathematical Epistemology and Psychology,* Gordon a Breach, New York, 1966.

[10] G. BIRKHOFF a T. C. BARTEE: *Modern Applied Algebra*, McGraw-Hill, New York, 1968.

[11] G. D. BIRKHOFF: *Aesthetic Measure*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts 1933.

[12] A. W. BOOTH a j.: *Mechanical Resolution of Linguistic Problems*, Academic Press, N. Y. 1958.

[13] H. BORKO vyd.: *Computer Applications to the Behavioral Sciences*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.

(13a) H. BORKO vyd.: *Automated Language Processes*, John Wiley, New York, 1967.

[14] NOAM CHOMSKY: *Aspects of the Theory of Syntax,* M. I. T. Press, Cambridge, Mass., 1965.

[15] P. J. COHEN: *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, M. A. Benjamin, New York, 1966.

[16] JOHN F. CORSO: *The Experimental Psychology of Sensory Behavior*, Holt, Rinehar a Winston, New York, 1963.

[17] E. A. FEIGENBAUM a J. FELDMAN: *Computers and Thought*, McGraw-Hill, New York, 1963.

(17a) JEROME FELDMAN a DAVID GRIES: *Translator Writing Systems*, Comm. ACM, *11* (1968), str. 77—113.

[18] D. FLANAGAN vyd.: *Information*, Scientific American, W. H. Freeman, 1966.

[18a] J. L. FLANAGAN: *Speech Analysis: Synthesis and Perception*, Springer Verlag, Berlin, 1965.

[19] G. E. FORSYTHE: *What do to until the computer scientist comes*? Tech. Rep. *CS77*, Stanford University, Stanford, California; 1967.

[20] R. D. GREENBLATT, D. E. EASTLAKE a S. D. CROCKER: *The Greenblatt chess program*, Fall Joint Computer Conference, 1967, str. 801—810.

[21] J. HADAMARD: *The psychology of Invention in the Mathematical Field,* Princeton University Press, Princeton, 1964.

[22] D. G. HAYS: *Introduction to Computional Linguistics*, American Elsevier, New York, 1967.

[23] J. VAN HEIJENOORT: *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1967.

[24] H. VON HELMHOLTZ: *On the Sensation of Tone*, Dover, New York, 1954.

[25] — Psychological Optics, *3* sv., J. C. P. Southall vyd. American Optical Society, 1925.

[26] — *Schriften zur Erkenntnistheorie*, Springer Verlag Berlin, 1921.

[27] C. JACKER: *Man, Memory and Machines*, Macmillan, New York, 1964.

[28] ROMAN JAKOBSON vyd.: *The Structure of Language and its Mathematical Aspects*, Proc. XII Symposium, Applied Mathematics, american Mathematical Society, Providence, 1961.

[28a] ALLEN KENT a O. E. TAULBEE: *Electronic Information Processing*, Spartan, 1965.

[29] ROMAN JAKOBSON vyd.: viz (28).

[30] S. C. KLEENE: *Mathematical Logic*, John Wiley, New York, 1967.

[31] T. K. LANDAUER vyd., *Physiological Psychology,* McGraw-Hill, New York, 1967.

[32] W. N. LOCKE a E. A. BOOTH vyd.: *Machine Translations of Language,* M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1955.

[33] R. D. LUCE, R. R. BUSH a E. GALANTER vyd.: *Handbook of Mathematical Psychology*, 3 sv., John Wiley, New York, 1963.

[34] — *Readings in Mathematical Psychology*, 2 sv., John Wiley, New York, 1965.

[35] S. MARCUS: *Algebraic Linguistics: Analytical Models*, Academic Press, New York, 1967.

[36] W. S. MCCULLOCH, *Embodiments of Mind:* M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1965.

[37] N. C. METROPOLIS, A. H. TAUB, JOHN TODD, C. B. TOMPKINS vyd.: *Experimental Aritmetic, High-Speed Computing and Mathematics*, Proc. XV Symposium Applied Mathematics, AMS, Providence, 1963.

[38] G. A. Miller: *Language and Communication:* McGraw-Hill, New York, 1951.

[39] M. MINSKY: *Computation: Finite and Infinite Machines*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.

[40] J. VON NEUMANN: *The Computer and the Brain.* Yale University Press, New Haven, Connecticut, 1958.

[41] — *Theory of Self-Reproducing Automata,* A. W. BURKS vyd., University of Illinois Press, Urbana, 1966.
[41a] W. PENFIELD a L. ROBERTS: *Speech and Brain.* Mechanisms, Princeton University Press, Princeton, 1959.
[42] G. PÓLYA: *Mathematics and Plausible Reasoning,* 2 sv., Princeton University Press, Princeton, 1954.
[42a] G. C. QUARTON, T. MELNECHUCK a F. O. SCHMITT vyd.: *The Neurosciences Program,* Rockefeller University Press. New York, 1967.
[42b] F. RATLIFF: *Mach Bands.* Holden-Day, San Francisko, 1965.
[43] B. ROSSER: *Logic for Mathematicians,* McGraw-Hill, New York, 1952.
[44] BERTRAND RUSSELL: *Principles of Mathematics,* 2. vyd., London, 1950.
[45] T. C. RUCH a H. D. PATTON: *Psychology and Biophysics,* 19. vyd., W. B. SAUNDERS, Philadelphia, 1965.
[46] H. RUTISHAUSER: *Description of ALGOL 60,* Springer Verlag, Berlin, 67.
[47] K. M. SAYRE a F. J. CROSSON: *The Modeling of Mind,* University of Notre Dame Press, Notre Dame, Indiana, 1963.
[48] J. T. SCHWARTZ vyd.: *Mathematical Aspects of Computer Sciences,* Proc. XIV Symposium on Applied Mathematics, AMS, Providence, 1967.
[49] C. E. SHANNON: *The Synthesis of two-terminal switching circuits,* Bell System Tech. J., *28* (1949), str. 59—98; také Trans. Amer. Inst. Elec. Engrg., *57* (1938), str. 713—723.
[50] C. E. SHANNON a WARREN WEAVER: *Mathematical Theory of Communication,* M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts.
[50a] J. J. SHEPPARD JR.: *Human Color Perception,* American Elsevier, N. Y., 68.
[51] B. F. SKINNER: *The Technology of Teaching,* Appleton Century-Croft, 68.
[52] S. S. STEVENS: *Handbook of Experimental Psychology,* 3 sv., John Wiley, New York, 1951.
[53] A. M. TURING: *On computable numbers...,* Proc. London Math. Soc., *42* (1936), str. 230—265.
[54] HAO WANG: *A Survey of Mathematical Logic,* North Holland, Amsterdam, 1963.
[54a] E. G. WEVER: *Theory of Hearing,* John Wiley, New York, 1949.
[55] A. N. WHITEHEAD a B. RUSSELL: *Principia Mathematica,* 3 sv., Cambridge University Press, Cambridge, England, 1908—1912.
[56] NORBERT WIENER: *Cybernetics,* 2. vyd., John Wiley, N. Y. a M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1961.
[56a] DEAN WOOLDRIDGE: *The Machinery of the Brain,* McGraw-Hill, N. Y., 1963
[57] H. ZIMMER vyd.: *Computers in Psychophysiology,* C. C. Thomas, Springfield Illinois, 1966.
[58] *Man-Machine Communications,* Proc. IBM Computing Symp., IBM, 1966.
[59] Proc. Third International Congress on Cybernetics, Namur, 1961.
[60] R. C. ATKINSON, vyd.: Journal of Mathematical Psychology, Academic Press, New York.
[61] Kybernetik, periodikum vycházející v Berlíně.