Detlef Laugwitz

K vývoju matematiky infinitezimálna a nekonečna

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 22 (1977), No. 6, 326--329

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139033

K vývoju matematiky infinitezimálna a nekonečna

Detlef Laugwitz, Darmstadt)*

Tento dodatok má doplniť článok W. A. J. LUXEMBURGA *Neštandardné číselné systémy a odôvodnenie Leibnizovho infinitezimálneho počtu.*

V novoveku prvými priekopníkmi infinitezimálneho počtu boli CAVALIERI, PASCAL, FERMAT a iní. GREGORY, NEWTON a predovšetkým LEIBNIZ infinitezimálny počet ďalej rozvinuli. Leibnizove abstraktné predstavy infinitezimálna použili BERNOULLIOVCI a zvlášť LEONHARD EULER (1707–1783) takým spôsobom, ktorý niekedy veľmi pripomína neštandardnú analýzu. Na doplnenie historického prehľadu, ktorý uvádza ABRAHAM ROBINSON na záver svojej knihy[1]), spomeniem niekoľko typických spôsobov ich uvažovania.

(a) Euler (1749) si všimol rozdielneho spôsobu vysvetľovania logaritmu pre záporné a imaginárne čísla u Leibniza a Johanna Bernoulliho[2]). Zatiaľ čo Bernoulli si myslel, že má byť $\log(-a) = \log a$, Leibniz chápal $\log(-1)$ ako imaginárne číslo. Obidvaja dlho a dôkladne odôvodňovali svoje názory. Euler naproti tomu tvrdil, že logaritmus je nekonečne mnohoznačný. Nech n je nekonečne veľké číslo (un nombre infiniment grand), $x = (1 + \omega)^n$ a $y = \log x$. Potom teda $y = n \,.\, \omega$ pri vhodnom tak definovanom nekonečne malom ω. (x, y sa tu pokladajú za konečné čísla!) Zo vzťahu $y = n \,.\, x^{1/n} - n$ sa môže teraz usúdiť, že existuje nekonečne veľa hodnôt pre y. Je totiž jasné, že $x^{1/2}$ má dve hodnoty, $x^{1/3}$ tri hodnoty a tak ďalej, teda $x^{1/n}$ má nekonečne veľa hodnôt. Tu sa znovu objavuje myšlienka, že pre nekonečne veľké čísla platí to isté ako pre konečné. Potom Euler určil (správne) hodnoty logaritmov pre x a to rozložením polynómu nekonečne veľkého stupňa

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - x$$

na lineárne faktory.

(b) Metóda rozkladu polynómu nekonečne veľkého stupňa sa už predtým všeobecne používala. Väčšina rozvojov do radov sa odvodzovala z binómov nekonečne veľkého stupňa na základe Newtonovej binomickej formuly a nie z Taylorovho rozvoja. V Luxemburgovi [4] sa nachádza úvaha o tom, ako Euler odvodil súčinovú reprezentáciu sinu,

---

*) Překlad článku *Zur Entwicklung der Mathematik der Infinitesimalen und Infiniten* otištěného v „Jahrbuch Überblicke Mathematik 1975" pořídila EVA GEDEONOVÁ. Pozn. red.

[1]) [2]; hranatými zátvorkami poukazujeme na číslo v zozname literatúry Luxemburgovej práce *Neštandardné číselné systémy a odôvodnenie infinitesimálneho počtu.*

[2]) L. EULER: *De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires.* Mem. de l'acad. Berlin *5* (1749), vyd. 1751, str. 139–179. Tiež Op. omn.

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\dots$$

Pre Eulera a Bernoulliho vznikajú takéto formuly preto, že nulové hodnoty $\sin x/x$ sú predsa známe a tým sa hneď získa vyjadrenie sinu v tvare súčinu. Keďže do ľavej strany možno dosadiť rozvoj sinu, možno porovnaním koeficientov nájsť predtým dlho hľadané rozvoje, napríklad $\pi^2/6 = \sum 1/n^2$. (K tomu aj Euler, Op. omn. (1) XLV str. 73–85, z roku 1734/35.)

(c) Hoci sa bez rozpakov s divergentnými radmi explicitne počítalo, bolo už Eulerovi v roku 1734/35 jasné „Cauchyho" konvergenčné kritérium. Formuloval ho pre rady v infinitezimálno-matematickom tvare takto[3]: Series quae in infinitum continuata summam habet finitam, etiamsi ea duplo longius continuetur, nullum accipiet augmentum, sed id quod post infinitum adjicitur cogitatione, re vera erit infinite parvum. Nisi enim hoc ita se haberet summa seriei, etsi infinitum continuatae, non esset determinata et propterea non finita. Ex quo consequitur si id quod ex continuatione ultra terminum infinitesimum oritur, sit finitae magnitudinis, summam seriei necesario infinitam esse debere.[4]) Toto sa potom ihneď použilo na harmonické rady, pričom i (pre infini) je nekonečne veľké číslo:

$$i \cdot \frac{1}{2i} < \sum_{k=i+1}^{2i} \frac{1}{k} < 1 \cdot \frac{1}{i+1}.$$

Súčet je tu väčší ako 1/2 a menší ako 1, teda konečný a preto harmonický rad nemôže konvergovať. Potom použil Euler konvergenčné kritérium pre rady s členmi $k^{-\alpha}$.

(d) Euler nemal jednoznačný vzťah k nekonečným radom, ako to jasne vidno v jeho korešpondencii s Nicolausom Bernoullim (1743, pozri [5])). Euler s istotou predpokladá, že rad, ktorý vznikne rozvojom z uzavretého výrazu[6]), sa rovná tomuto uzavretému výrazu aj tam, kde nemá konečný súčet. Vyvodzuje z

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

[3]) Pozri tiež R. Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen, München 1889, pretlač Wiesbaden 1969, str. 119.

[4]) Do nekonečna predĺžený rad má súčet konečný, ak aj dvakrát predĺžený, nemá nijaký prírastok, avšak to, čo sa myšlienkovo pridá po nekonečne, bude v skutočnosti nekonečne malé. Keby tomu tak nebolo, súčet do nekonečna predĺženého radu by nebol určený a preto by nebol konečný. Z toho vyplýva, že keby to, čo vzniká z pokračovania za infinitesimálnou hranicou bolo konečnej veľkosti, musel by byť súčet radu nevyhnutne nekonečný. Pozn. pr.

[5]) Pozri znovu R. Reiff, tamtiež, § 11 a tam citovaná literatúra

[6]) Zaujímavé je aj, ako Euler neskoršie vyšetroval konvenčne divergentné trigonometrické rady. Jeho spôsob vyšetrovania je z hľadiska pojmu distribúcie v každom ohľade správny. Formálne stanovisko Eulera, o ktorom hneď budeme hovoriť, ožilo znovu v 20. storočí v teórii distribúcií. Táto teória je teda blízka formálnemu stanovisku Eulera a neštandardná analýza je blízka stanovisku infinitezimálnej analýzy.

pre $x = -1$ súčet $1/2$. Neskoršie pravidlá pre sčitovanie radov na toto nadväzujú. N. Bernoulli naproti tomu tvrdí, že správne je

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^\infty + \frac{x^\infty + 1}{1-x},$$

čo ostatne pripomína inokedy Eulerov názor, že pre nekonečne veľké čísla platia tie isté vety ako pre konečné. N. Bernoulli píše (preklad podľa Reiffa, tamtiež str. 121): „Ich kann mir nicht einreden, dass Du behauptest, eine divergente Reihe, der ja, wenn man sie auch ins Unendliche fortsetzt, immer noch etwas fehlt, stelle den Wert der Grösse, welche entwickelt wurde, exakt dar„.[7])

Toto je vôbec dôležitý jav, ktorý podstatne prispel k tomu, že sa infinitezimálne metódy zdiskreditovali. K tomuto tiež prispelo to, ako ukazuje Eulerov citát o kritériu konvergencie v (c), že sa presne nerozlišovalo medzi nulou a infinitezimálnom. Euler príležitostne bez rozpakov vynechá nekonečné súčty nekonečne malých čísel. Nicolaus Bernoulli je dokonca proti vynechaniu jednej konečnej veličiny. Berkeleyho námietky sú pochopiteľné.

Uspokojím sa s týmito niekoľkými príkladmi a preskočím vývoj až po Cauchyho. Na chýbajúcu časť odkazujem čitateľa na Robinsona [2]. Prechádzam hneď k BERNARDOVI BOLZANOVI (1781–1848), ktorý, ako sa zdá, prvý dôsledne rozlišoval medzi nulou a nekonečne malými číslami. Okolo roku 1830 vypracoval „náuku o veličinách“ v ktorej sa vyskytujú nekonečné číselné výrazy ako $1 + 1 + 1 + \ldots$ atď, $1 + 2 + 3 + \ldots$ atď., $1/1 + 1 + 1 + \ldots$ atď., ako aj nekonečné súčiny. S týmito výrazmi počíta takým spôsobom, ktorý sa dá odôvodniť dnešnými metódami[8]). Škoda len, že tieto poznatky sa stali známe až sto rokov po Bolzanovej smrti a nemali žiadny vplyv na ďalší vývoj. Nie je tiež zrejmé, či Bolzano prišiel tak ďaleko, aby mohol dokázať Leibnizov infinitezimálny počet.

Toto posledné však môžeme s istotou tvrdiť už koncom 19. storočia o mladom študentovi T. LEVI-CIVITÁ (1873–1941). T. Levi-Civitá chcel najprv obrániť kritizované *Fondamenti di geometria* od jeho učiteľa G. VERONESEHO, v ktorých sa pracuje s nekonečne malými a nekonečne veľkými úsečkami. V skutočnosti sotva dvadsaťročný študent prispel podstatnou mierou k odôvodneniu infinitezimálneho počtu[9]). Skonštruoval usporiadané nearchimedovské teleso, ktorého prvky môžeme dnes napísať v tvare formálnych potenčných radov v nekonečne malej neurčitej ω. Teda $X = \sum_n a_n \omega^{\alpha_n}$, kde

[7]) „Ťažko pochopiť Tvoje tvrdenie, že divergentný rad predstavuje presne hodnotu veličiny, ktorá sa rozvíja. Divergentnému radu predsa vždy ešte niečo chýba, aj keď ho rozvíjaš do nekonečna“. Pozn. pr.

[8]) Teória reálnych čísel v Bolzanovej rukopisnej pozostalosti, vydané K. RYCHLÍKOM, Praha 1962: B. VAN ROOTSELAER, *Bolzanos Theory of real Numbers*, Arch. Hist. Ex. Sci. *2* (1964) 168–180; D. LAUGWITZ, *Bemerkungen zu Bolzanos Grössenlehre*, tamtiež 398–409.

[9]) T. LEVI-CIVITÁ: *Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici.* Atti Ist. Veneto di Sci. etc. ser. *7^a^*, *t. 4* (1892–93), 1765–1815. Priamo nadviazal len HANS HAHN, *Über die nichtarchimedischen Grössensysteme*, Sitzber. Akad. Wiss. Wien IIa *116* (1907), 601–655. V zborníku k 100. výročiu narodenia T. Levi-Civitá vyšla autorova práca: *Tullio Levi-Civitás work on nonarchimedean structures.*

$\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots \to \infty$, kde a_n sú reálne koeficienty, α_n sú reálne exponenty. Algebraické operácie sa dajú zaviesť zrejmým spôsobom. Usporiadanie dostávame tak, že položíme $X > 0$, ak prvý nenulový koeficient je kladný. Teraz sa rozšíria reálne funkcie na nové teleso. Ak je $X = x_0 + \mathrm{d}x$, kde x_0 je reálne a $\mathrm{d}x$ je nekonečne malé, tak položím

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!} (\mathrm{d}x)^k .$$

Potom sa ukazuje, že platia Leibnizove pravidlá pre infinitezimálny počet. Stojí za povšimnutie vzhľadom na dnešné základy neštandardnej analýzy, že sa urobilo rozumné rozšírenie aspoň C^∞-funkcií. L. NEDER[10]) uvažoval podobným spôsobom, pravdepodobne nezávisle od Levi-Civitá. Dokonca pokladal svoje práce za explicitné potvrdenie Leibnizovho diferenciálneho počtu s aktuálne nekonečne malými číslami.

Z 19. storočia hodno spomenúť ešte PAULA DU BOIS-REYMONDA, ktorý chcel odhaliť podstatu nekonečna a infinitezimálna cez správanie sa funkcií v nekonečne.[11]) Aj Schmiedensove idey[12]), ktoré spomína Luxemburg vo svojom článku, vychádzajú z funkcií (alebo z postupností, t. zn. funkcií na **N**): Dve postupnosti sa nazvú ekvivalentnými, ak sa zhodujú pre skoro všetky indexy. Triedy tejto ekvivalencie budú nové čísla. Číslo je väčšie ako nejaké iné číslo, ak reprezentujúca postupnosť prvého čísla je väčšia ako reprezentujúca postupnosť druhého pre skoro všetky indexy. Podľa tohto vzoru možno všetky relácie základného telesa preniesť na nové čísla. Postupnosť $\{n\}$ je príkladom nekonečne veľkého čísla. Luxemburg potom vo svojich prednáškach v Pasadene ukázal, že tento postup sa dá zovšeobecniť. Podmnožiny ktoré obsahujú skoro všetky prvky množiny **N**, tvoria totiž voľný filter. Ak zoberieme iné voľné filtre, najmä však ultrafiltre, a považujeme triedu postupnosti $\{a_n\}$ za rovnú (menšiu ako) triede (trieda) postupnosti $\{b_n\}$, ak množina všetkých n, pre ktoré $a_n = b_n$ $(a_n < b_n)$ patrí do filtra, tak sa dá tiež všetko urobiť. V prípade ultrafiltra bude táto teória obzvlášť pekná (napríklad čísla budú tvoriť usporiadané teleso). A tak máme na základe naivnej teórie množín modely pre Robinsonove $^*\mathbf{R}$[13]).

---

[10]) NEDER, L.: *Modell einer Leibnizschen Differentialrechnung mit aktual unendlich kleinen Grössen sämtlicher Ordnungen.* Math. Annalen *118* 1943, 718—732.

t [11]) Napríklad jeho *Allgemeine Functionentheorie*, Tübingen 1882, pretlač Darmstadt 1968.

[12]) C. SCHMIEDEN a D. LAUGWITZ: *Eine Erweiterung der Analysis*, Math. Zeitsch. *69* (1958), 1—29. Práce od roku 1958, ktoré na túto nadväzujú, sú citované v mojej práci: *Ein Weg zur Nonstandard-Analysis*, Jahresber. d. DMV *75* (1973), 66—93. Už v práci z roku 1958 (teda dva roky pred Robinsonovými výsledkami) sa uvažovali isté integrály ako nekonečné súčty nekonečne malých sčítancov, derivácie ako podiely nekonečne malých čísel a dokázali sa základné vety analýzy.

[13]) O ďalších Robinsonových prácach od roku 1960 sa dajú získať informácie zo zborníkov troch konferencií. Okrem práce [6] z Luxemburgovho prehľadu literatúry sú ešte: *Applications of model theory to algebra, analysis, and probability.* W. A. J. LUXEMBURG, New York 1969; *Victoria Symposium on Nonstandard Analysis*, A. E. HURD, P. LOEB. Springer Lect. Notes Nr. *369*, 1974.