Alois Kufner

O Hardyho nerovnosti

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 29 (1984), No. 1, 29--40

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139020

Celou řídící strukturu výpočtu je možno realizovat tak, že podmínkové plány uspořádáme podle nějaké priority a po každé změně modelovaných stavů systému (tj. například před každým zvyšováním hodnoty simulárního času) zkontrolujeme po řadě podmínkové plány a spustíme první nalezený proces (podmínkově plánovaný), jehož podmínka je splněna. Zakládání nebo rušení podmínkových plánů záleží pak pouze v jejich zařazování nebo vyřazování ze seznamu podmínek.

Schéma jedné možné realizace řídící struktury je na obr. 19. (Časově plánované procesy mají v tomto schématu přednost před podmínkově plánovanými; to samozřejmě není podstatné a nejrůznější priority mezi procesy lze realizovat i jinak.) [8]

Dokončení v příštím čísle.

O Hardyho nerovnosti

Alois Kufner, Praha

1. Tzv. *Hilbertova věta o dvojných řadách* říká, že pro nezáporné posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ $(n \geqq 1)$ platí

$$\sum_m \sum_n \frac{a_m b_n}{m+n} \leqq \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \left(\sum_n a_n^p\right)^{1/p} \left(\sum_n b_n^{p'}\right)^{1/p'} ; \tag{1.1}$$

zde je $p > 1$ a $p' = p/(p-1)$. Platí i integrální analogie nerovnosti (1.1):

$$\int_0^\infty \int_0^\infty K(x, y) f(x)\, g(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \leqq \tau_0 \left(\int_0^\infty f^p(x) \mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_0^\infty g^{p'}(x)\, \mathrm{d}x\right)^{1/p'} , \tag{1.2}$$

a to nejen pro jádro $K(x, y) = 1/(x + y)$, nýbrž i pro obecnější jádra. Speciálně platí pro nezáporná jádra $K(x, y)$, jež jsou homogenní stupně -1, vedle (1.2) též nerovnosti

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty K(x, y) f(x)\, \mathrm{d}x\right]^p \mathrm{d}y \leqq c_0^p \int_0^\infty f^p(x)\, \mathrm{d}x , \tag{1.3}$$

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty K(x, y)\, g(y)\, \mathrm{d}y\right]^{p'} \mathrm{d}x \leqq c_0^{p'} \int_0^\infty g^{p'}(y)\, \mathrm{d}y$$

s konstantou

$$c_0 = \int_0^\infty K(x, 1)\, x^{-1/p}\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty K(1, y)\, y^{-1/p'}\, \mathrm{d}y .$$

Nerovnost (1.1) dokázal počátkem tohoto století D. Hilbert pro $p = 2$ v přednáškách o teorii integrálních rovnic; jeho důkaz publikoval H. Weyl v roce 1908. Řada autorů pak Hilbertův výsledek zobecňovala, hledala jiné, jednodušší důkazy. Jeden důkazový postup zde naznačíme: Uvažujme „polovinu" dvojné řady v (1.1), tj. předpokládejme, že je $m \leqq n$. Pak je

$$\sum_{m \leqq n}\sum \frac{a_m b_n}{m+n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} \frac{a_m b_n}{m+n} \leqq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} \frac{a_m b_n}{n} = \sum_n A_n b_n ,$$

kde jsme symbolem A_n označili aritmetický průměr

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} .$$

Protože podle Hölderovy nerovnosti je

$$\sum_n A_n b_n \leqq \left(\sum_n A_n^p\right)^{1/p} \left(\sum_n b_n^{p'}\right)^{1/p'} ,$$

„stačí" najít odhad řady $\sum_n A_n^p$ pomocí řady $\sum_n a_n^p$ a máme polovinu nerovnosti (1.1).

A zmíněný odhad skutečně existuje: Platí

$$\sum_n A_n^p \leqq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_n a_n^p . \tag{1.4}$$

Protože podobně můžeme vyšetřovat i „druhou polovinu" dvojné řady v (1.1), dostáváme nakonec pomocí nerovnosti (1.4) odhad typu (1.1), byť i nikoliv s nejlepší možnou konstantou $\pi/\sin(\pi/p)$.

Nerovnost (1.4) neslouží jen k odvození odhadů typu (1.1), nýbrž je zajímavá i sama o sobě. Dokázal ji v roce 1920 G. H. Hardy (přesnou hodnotu konstanty našel ovšem až E. Landau v roce 1926); přejdeme-li od nezáporných posloupností k nezáporným funkcím a od aritmetického průměru A_n k integrálnímu průměru

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}F(x) ,$$

dostáváme spojitou analogii diskrétní nerovnosti (1.4):

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p \mathrm{d}x \leqq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)\,\mathrm{d}x . \tag{1.5}$$

Tuto (Hardyho) nerovnost jsme tedy použili k tomu, abychom odvodili odhady typu (1.1), resp. (1.2). Lze však naopak ukázat, že (1.5) plyne z první nerovnosti v (1.3), použijeme-li jádra

$$K(x, y) = \begin{cases} 1/y & \text{pro} \quad x \leqq y , \\ 0 & \text{pro} \quad x > y . \end{cases}$$

Podobné úvahy lze provést i pro obecnější jádra. Tak vedou formule (1.3) pro jádro

$$(1.6) \qquad K(x, y) = \begin{cases} y^{\lambda-1}x^{-\lambda} & \text{pro} \quad x \leqq y\,, \\ 0 & \text{pro} \quad x > y \end{cases}$$

po jistých úpravách k nerovnosti

$$(\mathrm{H}) \qquad \int_0^\infty x^{\varepsilon-p}F^p(x)\,\mathrm{d}x \leqq \left(\frac{p}{|\varepsilon - p + 1|}\right)^p \int_0^\infty x^\varepsilon f^p(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

která platí pro $p > 1$ a $\varepsilon \neq p - 1$; přitom je

$$(1.7) \qquad F(x) = \begin{cases} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{pro} \quad \varepsilon < p - 1\,, \\ \int_x^\infty f(t)\,\mathrm{d}t & \text{pro} \quad \varepsilon > p - 1\,. \end{cases}$$

[V případě $\varepsilon < p - 1$ použijeme první vzorec z (1.3) s jádrem K z (1.6); volíme $\lambda < 1 - 1/p$ a $\varepsilon = \lambda p$ a pracujeme s funkcí $x^\lambda f(x)$ místo $f(x)$. V případě $\varepsilon > p - 1$ použijeme druhý vzorec z (1.3) s $\lambda < 1/p$; píšeme všude p místo p' a $y^{1-\lambda}f(y)$ místo $g(y)$ a volíme $\varepsilon = p - \lambda p$.]

Nerovnost (1.5) je speciálním případem nerovnosti (H) pro $\varepsilon = 0$. Přímý důkaz nerovnosti (H) – tj. důkaz bez použití vzorců (1.3) – podal v roce 1928 G. H. Hardy, a nerovnost proto nese jeho jméno. Pro účely tohoto článku ji přepíšeme v poněkud jiném tvaru:

$$(\mathrm{H}_1) \qquad \int_0^\infty |u(t)|^p t^{\varepsilon-p}\,\mathrm{d}t \leqq \left(\frac{p}{|\varepsilon - p + 1|}\right)^p \int_0^\infty |u'(t)|^p t^\varepsilon\,\mathrm{d}t\,.$$

Tato nerovnost platí pro

$$\varepsilon \neq p - 1\,;$$

přitom je třeba navíc předpokládat, že

$$(1.8) \qquad \begin{aligned} u(0) &= 0 \quad \text{pro} \quad \varepsilon < p - 1\,, \\ u(\infty) &= 0 \quad \text{pro} \quad \varepsilon > p - 1\,. \end{aligned}$$

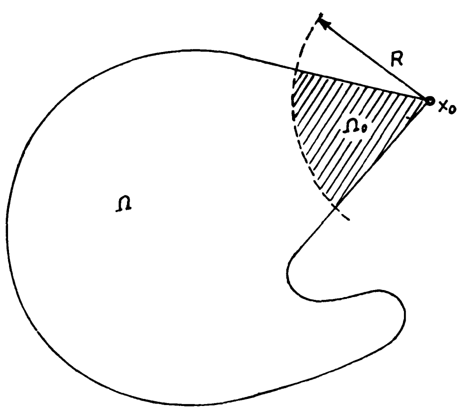
[Hodnoty $u(0)$, $u(\infty)$ v (1.8) je třeba chápat jako limity $\lim_{t\to0+} u(t)$, $\lim_{t\to\infty} u(t)$, a podobně později u podmínek typu $u(a) = 0$, $u(b) = 0$ pro obecný interval (a, b). – Podmínky (1.8) souvisejí s (1.7): (H_1) totiž dostaneme, položíme-li v (H) $f(t) = |u'(t)|$ a využijeme-li toho, že – pro $\varepsilon < p - 1$ a tedy pro $u(0) = 0$ – je

$$|u(x)| = |u(x) - u(0)| = \left|\int_0^x u'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqq \int_0^x |u'(t)|\,\mathrm{d}t = F(x)\,;$$

a podobně pro $\varepsilon > p - 1$.]

2. Hardyho nerovnost (H_1) je tedy známa od konce dvacátých let a v knižní formě ze znamenité knihy *Inequalities* (viz [3]) od roku 1934; v [3] se lze dočíst i více o její (staré) historii. Čas od času se též užívala jako pomocný prostředek, ale *systematické* aplikace se dočkala až v šedesátých a sedmdesátých letech, a to především v souvislosti s bouřlivým rozvojem teorie parciálních diferenciálních rovnic, při podrobnějším zkoumání kvalitativních vlastností řešení okrajových úloh.

Uveďme zde jednu z motivací, které vedou k použití Hardyho nerovnosti: Budiž Ω oblast v $\mathbb{R}^N$ s kuželovitým „rohem" v bodě x_0 na hranici $\partial\Omega$ (viz obr. 1) a předpokládej-



Obr. 1

me, že $u = u(x)$ je řešení okrajové úlohy na Ω. Vlastnosti tohoto řešení se obvykle charakterizují pomocí integrálů z funkce u a jejích derivací přes oblast Ω, ale vzhledem ke speciálnímu charakteru naší oblasti vzniká přirozená otázka, zda lze charakterizovat řešení u — alespoň v okolí Ω_0 hrotu x_0 — pomocí integrálů tvaru

$$\int_{\Omega_0} |D^\alpha u(x)| r^\varepsilon(x) \, \mathrm{d}x \,, \quad r(x) = |x - x_0| \,,$$

tj. pomocí integrálů *s vahou*. Použijeme-li sférických souřadnic (r, Φ) se středem v bodě x_0, lze uvedený integrál zapsat ve tvaru

$$\int_S \mathrm{d}\Phi \int_0^R \left| \frac{\partial^k w(r, \Phi)}{\partial r^k} \right|^p r^{\varepsilon + N - 1} \, \mathrm{d}r \,;$$

pro vnitřní (jednorozměrný) integrál se pak velmi dobře dají použít odhady typu Hardyho nerovnosti (H_1).

V souvislosti s takovýmito problémy a v souvislosti se systematickým studiem *Sobolevových prostorů s vahou* vzrostl i zájem o Hardyho nerovnost a o různá její zobecnění. Zmíníme se zde o některých možných zobecněních, ale nejdříve zapišme nerovnost (H_1) v poněkud jiném, možná ne zcela korektním, ale zato stručnějším tvaru

$$(\mathrm{H}_1^*) \qquad \|u(t)\, t^{\varepsilon/p - 1}\|_p \leqq \frac{p}{|\varepsilon - p + 1|} \|u'(t)\, t^{\varepsilon/p}\|_p \,;$$

zde je $\|w(t)\|_p$ norma funkce $w = w(t)$ v prostoru $L^p(0, \infty)$, resp. v prostoru $L^p(a, b)$ s obecným intervalem (a, b).

3. Uveďme nyní některé přirozené otázky, které v souvislosti s Hardyho nerovností vznikají:

3.1. Hodnota $\varepsilon = p - 1$ je singulární, což je zdůrazněno i konstantou v (H_1). Lze se tedy ptát, co se dá říci o normách v (H_1^*) pro $\varepsilon/p = 1 - 1/p$, tj. zda (a čím) lze odhadnout integrály

$$(3.1) \qquad \int_0^\infty |u(t)|^p\, t^{-1}\, dt \quad \text{resp.} \quad \int_0^\infty |u'(t)|^p\, t^{p-1}\, dt$$

shora, resp. zdola.

3.2. Přirozeným rozšířením Lebesgueových prostorů L^p jsou *Orliczovy prostory* L_M, kde M je tzv. Youngova funkce (viz např. [6] nebo [9]). Lze se pak ptát, zda lze nějak odhadnout (shora) integrály typu

$$\int_0^\infty M(u(t))\, t^\mu\, dt \quad \text{nebo} \quad \int_0^\infty M(u(t)\, t^\mu)\, dt\,,$$

či dokonce integrály s obecnější váhovou funkcí než t^μ, tj. např.

$$\int_0^\infty M(u(t))\, \varphi(t)\, dt \quad \text{atp.}\,,$$

a *čím* je lze odhadnout.

3.3. V odst. 3.2. jsme poprvé narazili na jiné váhové funkce než mocniny. Lze se tedy ptát, zda nerovnost (H_1^*) nelze zobecnit na *nepolynomiální* váhy, tj. zda neplatí nerovnost typu

$$(H_2) \qquad \|u(t)\, \varphi^{1/p}(t)\|_p \leqq \text{const}\, \|u'(t)\, \psi^{1/p}(t)\|_p{}^{*})\,,$$

a platí-li, jaký je pak vztah mezi váhovými funkcemi φ a ψ.

3.4. Vedle derivací $u', u'', \ldots$ *celého* řádu lze různými způsoby zavést i derivace necelého, „lomeného“ řádu, tedy např. derivaci řádu η, $0 < \eta < 1$ – označme ji $u^{(\eta)}$. Analogií nerovnosti (H_1^*) by pak byla nerovnost tvaru

$$\|u(t)\, t^{\varepsilon/p-1}\|_p \leqq \text{const}\, \|u^{(\eta)} t^{\varepsilon/p-1+\eta}\|_p\,,$$

resp.

$$\|u^{(\eta)}(t)\, t^{\varepsilon/p-1+\eta}\|_p \leqq \text{const}\, \|u'(t)\, t^{\varepsilon/p}\|_p\,.$$

---

*) V této nerovnosti i v dalších nerovnostech tohoto typu budeme vždy předpokládat, že konstanta v odhadu nezávisí na funkci u.

Vzniká ovšem problém, jak chápat jednak „lomenou“ derivaci $u^{(\eta)}$, jednak normu $\|u^{(\eta)}(t)\, t^{\mu}\|$. Nebudeme se zde tímto zobecněním dále zabývat, poznamenejme jen, že jisté první výsledky, dosažené pomocí teorie interpolace Banachových prostorů, lze najít v práci [11].

3.5. V nerovnosti (H_1^*) pracujeme vpravo i vlevo s normou ve *stejném* prostoru L^p. Lze se nyní ptát, zda neplatí i odhady tvaru

$$\|u(t)\, t^{\mu}\|_q \leqq \text{const}\, \|u'(t)\, t^{\varepsilon/p}\|_p$$

pro $q \neq p$ (zajímá nás především $q > p$) a jak bude vypadat exponent μ na levé straně; obdobným zobecněním nerovnosti (H_2) je pak nerovnost

$$(H_3) \qquad \|u(t)\, \varphi^{1/q}(t)\|_q \leqq \text{const}\, \|u'(t)\, \psi^{1/p}(t)\|_p$$

s obecnými váhovými funkcemi φ a ψ.

3.6. Zatím jsme pracovali převážně s funkcemi jedné proměnné t. V čl. 2 jsme sice hovořili o možnosti odhadů pro vícerozměrné integrály, tam však šlo o odhady přes jednorozměrný případ. Lze se tedy ptát, zda neplatí nějaká obecná *N-dimenzionální Hardyho nerovnost*, např. tvaru

$$(H_4) \qquad \int_\Omega |u(x)|^p \sigma_0(x)\, dx \leqq \text{const} \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^p \sigma_i(x)\, dx\,,$$

kde Ω je oblast v $\mathbb{R}^N$ a $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_N$ jsou jisté dané váhové funkce. Poznamenejme, že nerovnost (H_4) platí např. pro „rozumné“ oblasti Ω a pro funkce σ_i tvaru

$$\sigma_0(x) = [\text{dist}\,(x, \partial\Omega)]^{\varepsilon - p}\,, \quad \sigma_i(x) = [\text{dist}\,(x, \partial\Omega)]^{\varepsilon}\,, \quad i = 1, \ldots, N\,,$$

ovšem tato nerovnost se dá odvodit pomocí jednorozměrné nerovnosti (H_1); zajímavý by byl případ *obecných* váhových funkcí σ_i a otázka vzájemného vztahu funkce σ_0 a funkcí $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$.

4. Vyjmenovali jsme zde šest možných zobecnění Hardyho nerovnosti; tím však pochopitelně nejsou vyčerpány všechny možnosti, neboť uvedených šest typů lze dále mezi sebou kombinovat. Uveďme zde též práci L. Maligrandy [13] z roku 1980, který popisuje velice abstraktní zobecnění Hardyho nerovnosti v termínech prostorů „nezávislých na přerovnání“ (rearrangement invariant spaces) a v jehož přístupu jsou některá zde naznačená zobecnění obsažena.

Vraťme se však trochu podrobněji k některým výše uvedeným zobecněním:

4.1 (k odst. 3.1). V roce 1965 odvodil autor spolu s J. Kadlecem nerovnost

$$(\mathrm{H}_5) \qquad \int_0^1 |u(t)|^p t^{-1} |\log t|^\beta \,\mathrm{d}t \leqq \left(\frac{p}{|\beta+1|}\right)^p \int_0^1 |u'(t)|^p t^{p-1} |\log t|^{\beta+p} \,\mathrm{d}t\,,$$

která platí pro $\beta \neq -1$, a to za předpokladu

$$u(0) = 0\,, \quad \text{je-li} \quad \beta < -1\,,$$
$$u(1) = 0\,, \quad \text{je-li} \quad \beta > -1$$

(viz [4]). Tím je dána jistá odpověď na problém formulovaný v odst. 3.1, neboť pro $\beta = -p$ dostáváme singulární hodnotu $\varepsilon = p - 1$ na pravé straně v (H_1), pro $\beta = 0$ pak „kritickou" hodnotu $\varepsilon - p = -1$ na levé straně. Tím jsme tedy odhadli integrály v (3.1), a to přinejmenším pro funkce s nosičem v intervalu $\langle 0, 1\rangle$. K větším intervalům lze přejít zřejmými úpravami.

4.2 (k odst. 3.2). Pro Orliczovy prostory existuje zatím málo výsledků. Systematicky se touto problematikou zabývala G. Palmieri (viz např. [17]), která dokázala, že platí odhad tvaru

$$(\mathrm{H}_6) \qquad \|u(t)\, t^{\mu-1}\|_M \leqq \frac{cp}{1-\mu p} \|u'(t)\, t^\mu\|_M\,,$$

zde $\|\,.\,\|_M$ je norma v Orliczově prostoru $L_M(0, \infty)$. Nerovnost (H_6) platí za jistých omezujících předpokladů o Youngově funkci M a pro $\mu > 1/p$, kde p je jisté číslo závisející na M, a za předpokladu $u(0) = 0$. Jiné výsledky, především výsledky s jinými než mocninnými váhovými funkcemi, zatím autorovi známy nejsou.

4.3 (k odst. 3.3). Zde došlo k nejbouřlivějšímu vývoji a zvláště kolem roku 1965 dosáhla celá řada autorů nezávisle na sobě podobných výsledků. Rýsují se zde tři různé přístupy k nerovnosti (H_2).

(A) *K dané váhové funkci* ψ *se hledá* (optimální) *váhová funkce* φ (nebo naopak). Zde došli nezávisle na sobě v letech 1964 a 1965 k analogickým výsledkům V. R. Portnov [18], F. A. Sysoeva [20], V. N. Sedov (publikováno až 1972 v [19]), autor (nepublikováno, aplikováno 1969 v [7]) a snad i další. V roce 1974 podali autor a H. Triebel nový důkaz, který publikovali r. 1978 [11]. Zformulujeme-li nerovnost (H_2) pro prostor $L^p(a, b)$, pak tato nerovnost platí, je-li

(A-1) $u(a) = 0$ a

$$(4.1) \qquad \varphi(t) = \psi^{1-p'}(t) \left[\int_a^t \psi^{1-p'}(s)\,\mathrm{d}s\right]^{-p}, \quad p' = \frac{p}{p-1}\,;$$

nebo

(A-2) $u(b) = 0$ a

$$\varphi(t) = \psi^{1-p'}(t) \left[\int_t^b \psi^{1-p'}(s)\, \mathrm{d}s \right]^{-p} . \tag{4.2}$$

Tím je vyjádřena funkce φ pomocí funkce ψ a je též vidět, jaké podmínky musí splňovat funkce ψ: $\psi^{1-p'}$ musí patřit do $L^1(a, t)$, resp. do $L^1(t, b)$ pro každé $t \in (a, b)$. Naopak je

$$\psi(t) = (p - 1)^p \varphi^{1-p}(t) \left[\int \varphi(s)\, \mathrm{d}s \right]^p , \tag{4.3}$$

kde integrujeme od t do b v případě (A-1), od a do t v případě (A-2).

Tento výsledek v sobě obsahuje jak klasickou Hardyho nerovnost (H_1), tak i nerovnost (H_5).

(B) *Hledají se nutné a postačující podmínky pro dvojici φ, ψ, za nichž platí* (H_2). Základní výsledek zní pro interval $(0, \infty)$ takto: Nerovnost (H_2) platí tehdy a jen tehdy, je-li pro $u(0) = 0$ konečné číslo

$$B = \sup_{t>0} \left[\int_t^\infty \varphi(s)\, \mathrm{d}s \right]^{1/p} \left[\int_0^t \psi^{1-p'}(s)\, \mathrm{d}s \right]^{1/p'} ; \tag{4.4}$$

je-li $u(\infty) = 0$, píšeme $\int_0^t$ místo $\int_t^\infty$ a naopak.

Navíc lze pomocí čísla B odhadnout nejlepší možnou konstantu v (H_2): Označíme-li ji C, platí

$$B \leqq C \leqq B p^{1/p} p'^{1/p'} ;$$

tvrzení přitom platí i pro $p = 1$ a $p = \infty$ a je pak $B = C$.

Tyto výsledky odvodil zčásti již v roce 1969 G. Tomaselli [21], který vedle čísla B z (4.4) udal i jiná čísla, pomocí nichž lze odhadnout nejlepší konstantu C (vše pro $u(0) = 0$). Jiným způsobem odvodil tyto výsledky v roce 1972 B. Muckenhoupt [15]; ten navíc rozšířil nerovnost (H_2) i na případ, kdy v integrálech v (H_2) vystupují místo $\varphi(t)\, \mathrm{d}t$ a $\psi(t)\, \mathrm{d}t$ obecné Borelovy míry $\mathrm{d}\mu$ a $\mathrm{d}\nu$.

Porovnáme-li integrály v (4.4) s integrály v (4.1) a (4.3), je zřejmé, že mezi přístupy (A) a (B) je značná příbuznost. Zcela rozdílný je přístup třetí.

(C) *Funkce φ a ψ jsou koeficienty jisté diferenciální rovnice.* Tento přístup je historicky nejstarší: v roce 1961 jej zveřejnil P. R. Beesack [1] (který uvažoval vedle hodnot $p > 1$ i hodnoty $p < 0$ a hodnoty $0 < p < 1$; v tomto posledním případě je ovšem třeba obrátit v (H_1) znaménko nerovnosti). Jeho myšlenky rozvinul a zjednodušil G. Tomaselli [21] v roce 1969 (ovšem pouze pro $p > 1$). Při tomto přístupu se vyšetřuje na intervalu (a, b) obyčejná (pro $p \neq 2$ nelineární) diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\psi(t)\, y'^{p-1}(t)) + \lambda^p \varphi(t)\, y^{p-1}(t) = 0 \tag{4.5}$$

a platí toto tvrzení: Má-li diferenciální rovnice (4.5) s $\lambda > 0$ řešení y, které je na intervalu (a, b) nezáporné a má tam nezápornou derivaci, pak platí nerovnost (H_2) [v $L^p(a, b)$] pro každou funkci u takovou, že $u(a) = 0$, a s konstantou $C = 1/\lambda$.

Známe-li tedy příslušné řešení y diferenciální rovnice (4.5), můžeme k dané váhové funkci ψ vypočítat odpovídající váhovou funkci φ:

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\lambda^p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\psi(t)\, y'^{p-1}(t)\right)/y^{p-1}(t)\,;$$

a též naopak. Většinou budou potíže s nalezením oněch řešení y, a proto se nám zdají přístupy (A) a (B) pro potřeby aplikací vhodnější.

Jak poznamenal B. Opic [16], je existence nezáporného řešení y diferenciální rovnice (4.5) (s nezápornou derivací y') nejen postačující, nýbrž i *nutnou* podmínkou platnosti nerovnosti (H_2); doplníme-li navíc rovnici (4.5) okrajovými podmínkami typu

$$y(a) = 0\,, \quad \lim_{t\to b} y(t)\, y'^{p-1}(t)\, \psi(t) = 0\,,$$

dostaneme řešení y, pro něž v (H_2) nastává rovnost.

4.4 (k odst. 3.5). Zde jsou známy výsledky z poslední doby. V roce 1979 publikovali nezávisle na sobě V. G. Maz'ja [14] a V. M. Kokilašvili [5] (ten bez důkazu) nutnou a postačující podmínku, jež je analogií podmínky z přístupu (B) v odst. 4.3: Nerovnost (H_3) platí tehdy a jen tehdy, je-li pro $u(0) = 0$ konečné číslo

$$B = \sup_{t>0}\left[\int_t^\infty \varphi(s)\,\mathrm{d}s\right]^{1/q}\left[\int_0^t \psi^{1-p'}(s)\,\mathrm{d}s\right]^{1/p'} \tag{4.6}$$

(srovnejte s číslem B ze vzorce (4.4)); přitom se předpokládá, že je $q \geqq p$, a pro nejlepší konstantu C v (H_3) platí odhad

$$B \leqq C \leqq Bp^{1/q}p'^{1/p'}\,.$$

Případ $u(\infty) = 0$ se vyšetřuje analogicky jako v odst. 4.3 (B). V. G. Maz'ja přitom vyšetřuje i případ $q < p$ (pro $L^p(0, b)$ a pro speciální váhu $\psi(t) \equiv 1$), V. M. Kokilašvili připouští i míry $\mathrm{d}\mu$ a $\mathrm{d}\nu$ místo $\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ a $\psi(t)\,\mathrm{d}t$.

Podobně lze „imitovat" i přístupy (A) a (C) z odst. 4.3: P. Gurka dokázal v roce 1982 ve své diplomové práci [2], že nerovnost (H_3) platí pro $q > p$ s konstantou $1/\lambda$, má-li diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\psi^{q/p}(t)\, y'^{q/p'}(t)\right) + \lambda^q \varphi(t)\, y^{q/p'}(t) = 0 \tag{4.7}$$

kladné řešení y s kladnou derivací y' (analogie přístupu (C)), a že funkce φ a ψ v (H_3) jsou spolu (pro $u(0) = 0$) vázány vztahy

$$\varphi(t) = \psi^{1-p'}(t)\left[\int_0^t \psi^{1-p'}(s)\,\mathrm{d}s\right]^{-q/p'-1}, \tag{4.8}$$

$$\psi(t) = \left(\frac{q}{p'}\right)^{p-1+p/q} \varphi^{1-p}(t) \left[\int_t^\infty \varphi(s)\,\mathrm{d}s\right]^{p-1+q/p}$$

(analogie se vzorci (4.1) a (4.3) v přístupu (A)). Opět je zde vidět podobnost integrálů ve vzorcích (4.8) a (4.6).

Pro zajímavost uveďme, jak vypadá analogie nerovnosti (H_1) pro $q > p$: Volíme-li $\psi(t) = t^\varepsilon$, bude $\varphi(t) = \text{const}\, t^\eta$ s $\eta = -q/p' - 1 + \varepsilon q/p$, takže platí

$$\left(\int_0^\infty |u(t)|^q t^{-q/p'-1+\varepsilon q/p}\,\mathrm{d}t\right)^{1/q} \leqq \text{const}\left(\int_0^\infty |u'(t)|^p t^\varepsilon\,\mathrm{d}t\right)^{1/p};$$

konstanta opět závisí na p, q a ε a je nekonečná pro $\varepsilon = p - 1$.

4.5 (k odst. 3.6). V knížce [8] je pojednáno o nerovnostech typu (H_4), jsou-li váhové funkce $\sigma_i(x)$ tvaru $d^\varepsilon(x)$ nebo $\varphi(d(x))$, kde ε je reálné číslo, $d(x)$ vzdálenost bodu x od jisté části hranice $\partial\Omega$ oblasti Ω a $\varphi = \varphi(t)$ kladná funkce jedné proměnné; je tam např. ukázáno, že pro jisté hodnoty ε lze volit $\sigma_1(x) = \ldots = \sigma_N(x) = d^\varepsilon(x)$ a že pak je $\sigma_0(x) = d^{\varepsilon-p}(x)$, resp. že lze volit $\sigma_1(x) = \ldots = \sigma_N(x) = \psi(d(x))$ a že pak je $\sigma_0(x) = \varphi(d(x))$, kde φ, ψ jsou funkce z odst. 4.3; také je tam pojednáno o vlivu „geometrie" hranice oblasti Ω na tvar příslušných váhových funkcí. Všechny tyto úvahy však podstatně využívají „jednodimenzionální" Hardyho nerovnost (H_1) a její zobecnění (H_2), a to prostřednictvím lokálních souřadných systémů, v nichž je popsána hranice $\partial\Omega$ oblasti Ω.

O jistý *globální* přístup se pokouší R. Lewis [12], který dokázal, že pro funkce $u \in C_0^\infty(\Omega)$ platí nerovnost

$$\int_\Omega |u(x)|^2\,|\Delta g(x)|\,\mathrm{d}x \leqq 4\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \frac{|\nabla g(x)|^2}{|\Delta g(x)|}\,\mathrm{d}x\,;$$

to je odhad typu (H_4) pro $p = 2$ s váhovými funkcemi $\sigma_0(x) = |\Delta g(x)|$, $\sigma_1(x) = \ldots = \sigma_N(x) = |\nabla g(x)|^2/|\Delta g(x)|$, přičemž g je jistá daná dostatečně hladká funkce.

Ještě obecnější přístup lze najít u autora a B. Opice: V článku [10] je uvedeno toto tvrzení:

Nechť jsou σ_i, $i = 1, \ldots, N$, funkce z $C^1(\Omega)$, kladné skoro všude v Ω. Nechť je funkce v taková, že je $v(x) \geqq 0$ a $\partial v/\partial x_i(x) \geqq 0$ v Ω $(i = 1, \ldots, N)$; nechť je

$$\sigma_i \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big/ v\right)^{p-1} \in C^1(\bar{\Omega})\,, \quad i = 1, \ldots, N\,,$$

a nechť je funkce

$$\sigma_0(x) = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma_i(x)\left[\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right]^{p-1}\right)\Big/ v^{p-1}(x) \tag{4.9}$$

kladná skoro všude v Ω. Pak nerovnost (H_4) platí pro všechny funkce $u \in C^1(\bar{\Omega})$ takové, že je

$$(4.10) \qquad |u|^p \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big/ v\right)^{p-1} \sigma_i \nu_i = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega ;$$

zde je $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_N)$ vektor vnější normály k $\partial\Omega$.

Formule (4.9) tedy udává vztah mezi váhovými funkcemi $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ a váhovou funkcí σ_0, a to pomocí jisté „pomocné“ funkce v. Přepíšeme-li vztah (4.9) do tvaru

$$(4.11) \qquad \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma_i(x) \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^{p-1} (x)\right) + \sigma_0(x)\, v^{p-1}(x) = 0 \quad \text{na} \quad \Omega$$

a vztah (4.10) do tvaru

$$(4.12) \qquad \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^{p-1} \sigma_i \nu_i = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma \subset \partial\Omega ,$$

vyjadřují obě poslední formule jistou *okrajovou úlohu* (která je pro $p \neq 2$ *nelineární*, a to i v okrajové podmínce). Můžeme tedy říci, že nerovnost (H_4) bude platit, bude-li existovat řešení v parciální diferenciální rovnice (4.11), splňující okrajovou podmínku (4.12), a to řešení nezáporné s nezápornými derivacemi prvního řádu.

Poznamenejme že vzhledem k (4.10) je okrajová podmínka aktuální pouze na té části Γ hranice $\partial\Omega$, na níž je funkce u nenulová. Zajímá-li nás tedy např. platnost nerovnosti (H_4) pro funkce $u \in C_0^1(\Omega)$, nemusíme brát podmínku (4.12) vůbec v úvahu a „stačí“ nám hledat řešení parciální diferenciální rovnice (4.11).

5. V odst. 2 jsme řekli, že zájem o Hardyho nerovnost byl vyvolán především potřebami teorie parciálních diferenciálních rovnic. Po řadě úvah jsme zde opět dospěli k jisté okrajové úloze, a lze tedy říci, že jsme po jistém kruhu, který se nyní uzavřel, dospěli opět k výchozímu motivujícímu problému.

Na závěr ovšem budiž poznamenáno, že výběr skutečností i (v článku naznačených) otevřených problémů je subjektivní a článek si rozhodně neklade žádné nároky na úplnost.

Literatura

[1] Beesack, P. R.: *Hardy's inequality and its extensions.* Pacific J. Math. *11* (1961), 39—61.
[2] Gurka, P.: *Diplomová práce.* MFF KU Praha, 1982/83.
[3] Hardy, G. H.; Littlewood, J. E.; Pólya, G.: *Inequalities.* University Press, Cambridge 1952.
[4] Kadlec, J.; Kufner, A.: *Characterization of functions with zero traces by integrals with weight functions II.* Časopis Pěst. Mat. *92* (1967), 16—28.
[5] Kokilašvili, V. M.: *O neravenstvach Chardi v vesovych prostranstvach.* Soobšč. AN Gruz. SSR, *96* (1979), 2, 37—40.
[6] Krasnosel'skij, M. A.; Ruticku, J. V.: *Vypuklye funkcii i prostranstva Orliča.* Fizmatgiz, Moskva 1958.
[7] Kufner, A.: *Imbedding theorems for general Sobolev weight spaces.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa *23* (1969), 373—386.
[8] Kufner, A.: *Weighted Sobolev spaces.* Teubner, Leipzig 1980.

[9] Kufner, A.; John, O.; Fučík, S.: *Function spaces*. Academia, Prague & Noordhoff, Leyden 1977.

[10] Kufner, A.; Opic, B.: *Some imbeddings for weighted Sobolev spaces*. Constructive function theory '81. Proceedings of the international conference on constructive function theory, Varna June 1 — 5, Sofia 1983, 400—407.

[11] Kufner, A.: Triebel, H.: *Generalization of Hardy's inequality*. Confer. Sem. Univ. Bari *156* (1978), 1—21.

[12] Lewis, R. T.: *Singular elliptic operators of second order with purely discrete spectra*. Trans. Amer. Math. Soc. *271* (1982), 2, 653—666.

[13] Maligranda, L.: *Generalized Hardy inequality in rearrangement invariant spaces*. J. Math. Pures et Appl. *59* (1980), 405—415.

[14] Maz'ja, W.: *Einbettungssätze für Sobolewsche Räume*. Teil 1. Teubner, Leipzig 1979.

[15] Muckenhoupt, B.: *Hardy's inequality with weights*. Studia Math. 44 (1972), 31—38.

[16] Opic, B.: Nepublikovaný rukopis, Praha 1980.

[17] Palmieri, G.: *Un approcio alla teoria degli spazi di traccia relativi agli spazi di Orlicz-Sobolev*. Boll. Un. Mat. Ital. *16* (1979), 100—119.

[18] Portnov, V. R.: *Dve teoremy vloženija dlja prostranstva* $L_{pb}^{(1)}(\Omega \times R_+)$. Dokl. AN SSSR *155* (1964), 761—764.

[19] Sedov, V. N.: *Vesovye prostranstva. Teoremy vloženija*. Diff. Uravnenija *8* (1972), 1452—1462.

[20] Sysoeva, F. N.: *Obobščenija odnogo neravenstva Chardi*. Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika *6* (49) (1965), 140—143.

[21] Tomaselli, G.: *A class of inequalities*. Boll. Un. Mat. Ital. *4* (1969), 622—631.

Euler je největší matematik všech dob; byl však jen matematik, tedy žádný kouzelník, žádný prorok, žádný ranhojič. Matematiku pěstoval s přesvědčením, že tento svět lze ovládat podle nejlepších možných přírodních zákonů, Věřil, že člověku přísluší zvláštní úloha, aby porozuměním těmto zákonům objevoval a rozvíjel principiálně dostupné možnosti k zlepšení lidstva. Velká kniha přírody leží před námi otevřená, je však psána řečí, kterou se musíme naučit číst vlastní pílí, láskou a utrpením. Touto řečí je matematika. Prvním krokem toho, kdo se učí řeči, je čtení, teprve hlubším studiem se naučí plynně mluvit a odpovídat na otázky. Teprve pak následuje obtížnější část vědy, řešit matematicky formulované úlohy. Při objasňování a zodpovídání těchto otázek usiluje člověk konec konců o nejlepší možnosti, které mohou vyplynout z pevného světového řádu.

C. A. Truesdell

Eulerův život zahrnul šedesát let tvůrčí činnosti, která byla spojena s podivuhodnou plodností: napsal asi 760 časopiseckých statí, vydal 40 knih a obeslal svými pojednáními 15 úloh vypsaných akademiemi, popsal četné poznámkové sešity a rozeslal několik tisíc dopisů do celé Evropy. Jeho výkonnost během jeho života neustále rostla. V prvních čtrnácti letech své vědecké aktivity uveřejnil Euler kolem 80 prací v rozsahu asi 4000 tiskových stran; naproti tomu, přestože byl v posledních čtrnácti letech svého života slepý, vytvořil 350 prací v rozsahu 8000 stran tisku. V leningradském archívu jsou ještě tisíce fólií Eulerových neuveřejněných rukopisů. Statisticky vzato musel Euler udělat každý týden jeden objev.

Duchovní klima rodného domu velice příznivě ovlivnilo duševní vývoj mladého Leonharda Eulera. Matka pocházela ze vzdělané basilejské rodiny, otec byl matematicky nadaný a poslouchal přednášky u Jacoba Bernoulliho a r. 1688 u něj podal disertaci věnovanou poměrům a proporcím. První výuku poskytl Leonardu Eulerovi jeho otec. Jeho první matematickou učebnicí byla algebra napsaná Christofem Rudolffem ze Slezského Javora, pro chlapce Leonhardova věku neobyčejně obtížná kniha. Ve své krátké autobiografii Euler r. 1767 vzpomíná na to, že knihu prostudoval pilně a úplně. Kolem r. 1713 byl poslán do latinské školy v Basileji, kde však byla matematika na žádost měšťanů škrtnuta z výuky.