Paul R. Halmos

Zpomalil se rozvoj matematiky? (2.část)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 36 (1991), No. 6, 305--319

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139004`

Zpomalil se rozvoj matematiky?

2. část*)

Paul Halmos, Santa Clara, USA

Exploze 1: Problém čtyř barev. Každý ví, co je to problém čtyř barev, ale přesto bych rád na začátku položil v souvislosti s tímto problémem několik jednoduchých otázek, několik otázek, které jste se možná neobtěžovali sami sobě dříve klást. Věc je v tom, že problém se týká euklidovské roviny a topologie roviny umí připravit neočekávané a výstřední projevy.

Víte například, že v rovině existuje 5 oblastí („Wadská jezera"), které všechny mají tutéž hranici? S číslem „dvě" místo „pěti" to zná každý: jenom si vzpomeňte na pravou a levou polorovinu, tj. v kartézských souřadnicích množinu bodů s kladnou x-ovou souřadnicí a množinu bodů se zápornou x-ovou souřadnicí. Potom je společnou hranicí y-ová osa a není na tom nic překvapivého. (Mimochodem, „oblast" zde má význam obvyklý ze základní přednášky z komplexní proměnné: otevřená a souvislá množina.) Co takhle „tři" oblasti se společnou hranicí — existuje jednoduchý příklad takové situace? Ne, neexistuje; každý, kdo umí sestrojit příklad se třemi, umí stejně tak snadno sestrojit s pěti nebo vlastně s každým jiným počtem.

Nevypadá to jako negativní řešení problému čtyř barev? Pět oblastí představuje pět zemí rovinné mapy, a protože se každé dvě stýkají (v jejich společné hranici), jediný způsob, jak správně mapu obarvit, je použít pěti různých barev.

Ano, je to negativní řešení problému 4 barev, ale jen když je problém nedbale formulovaný. Když má 5 oblastí společnou hranici, pak se tyto oblasti a jejich hranice musí kroutit a proplétat mimořádně ošklivým způsobem. Klasický problém čtyř barev předpokládá (obvykle mlčky), že země vyznačené na mapě vypadají zdravě, nepatologicky. Jednoduchá cesta k vyloučení patologií je požadovat, aby hranice země byly lomené čáry (konečný počet úseček); ***plná hloubka*** a obtížnost problému jsou zachovány dokonce v takto silně omezujícím případě. Pokud se to zdá příliš tvrdé, je v pořádku připustit jako hranice příjemné spojité křivky. V každém případě však, jak ukazuje příklad s pěti oblastmi, určitá geometrická omezení jsou nutná.

Rozdílný druh poučného příkladu, na který se podíváme, je mapa tvořená kruhem, v němž je vyznačen určitý počet průměrů (například 3). Tyto průměry rozdělují kruh na šest zemí, z nichž každá tvarem připomíná kousek dortu, a všech šest zemí se „stýká" ve středu kruhu. Neznamená to, že k obarvení mapy je zapotřebí 6 barev? Ne, neznamená. Je to situace, kterou obvykle formulace problému čtyř barev předvídá

*) 1. část článku byla otištěna v minulém čísle. Pozn. red.

P. R. HALMOS: *Has Progress in Mathematics Slowed Down?* The American Mathematical Monthly 97 (1990), No. 7, 561–588. Přeložili OLDŘICH KOWALSKI a IVAN NETUKA.

a vylučuje: říká se, že se dvě země „stýkají“, pokud mají rozumně dlouhý kus společné hranice, a to více než nějaké izolované rohy.

Tak dobrá: jaký je nejmenší počet barev postačující na obarvení všech slušných map? Mohl by být „dvě“? Jedna z možností, jak na tuto otázku odpovědět, je zeptat se: lze navrhnout mapu se třemi zeměmi, z nichž každá se stýká s oběma ostatními? Odpověď je zde lehká: udělejte prostě takovou mapu a udělejte tři země, jako byste rozkrojili dort na tři stejné kousky, takže každý má ve středu 120°. V takovém případě je každá ze zemí „mezi“ ostatními dvěma. Závěr: Dvě barvy nestačí na obarvení všech map.

V pořádku: existuje mapa se čtyřmi zeměmi taková, aby se každá země dotýkala všech tří ostatních? Ano — vezměte právě sestrojenou dortovou mapu a vykrojte v ní otvor — nahraďte střed dosti velkou kruhovou zemí, řekněme s polovičním poloměrem, než má celá mapa. Vnější země stále mají vlastnost, že každá z nich je mezi ostatními dvěma a zároveň se každá z nich stýká se zemí ve středu kruhu. Závěr: tři barvy na obarvení všech map nestačí.

Bude postup, který jsme zatím užili dvakrát, účinný v dalším kroku: existuje mapa s pěti zeměmi, z nichž každá se stýká se všemi ostatními? Ve snaze nalézt odpověď zaměňme právě zkoumanou mapu se čtyřmi zeměmi ve dvou směrech: vložme kruh (říkejme mu C), který mapu představuje, do většího kruhu (nazvěme ho D) a rozřízněme malý kruh ve středu původní mapy (říkejme mu B) na dvě části. Výsledná mapa má šest oblastí: jedna je tvaru mezikruží mezi D a C, dvě další jsou poloviny B a další tři tam byly před provedenými změnami. Pět oblastí uvnitř C nazvěme zeměmi. Zběžný pohled na obrázek ukazuje, že tři z nich se stýkají s ostatními čtyřmi, ale dvě z nich tuto vlastnost nemají. Přidejme vnější oblast tvaru mezikruží (jako kolonii?) k té polovině B, která se nestýká s každou z oněch čtyř zemí — a hle! — výsledkem je mapa s pěti zeměmi, z nichž každá se dotýká všech ostatních čtyř. Správné obarvení této mapy potřebuje pět barev — čtyři nestačí! Není těžké tento postup zobecnit: pro každé přirozené n existuje mapa s n zeměmi, z nichž každá se stýká se všemi $n-1$ ostatními.

Je něco v nepořádku? Možná námitka je, že (v případě $n = 5$) jedna z pěti zemí na obrázku se skládá ze dvou kusů — tato země není souvislá. Je to špatné? Stává se to v reálném světě? Jistě ano; např. stát Michigan se skládá ze dvou částí. Znamená to, že čtyři barvy nestačí k obarvení všech map? Ano, znamená, pokud mapy mohou obsahovat nesouvislé země. Zde opět obvyklá formulace problému čtyř barev tuto překážku předvídá a vylučuje ji: problém se týká pouze souvislých zemí.

Když náš příklad s pěti barvami není přijatelný, co by člověk měl udělat pro důkaz, že čtyři barvy nestačí k obarvení všech map? Zřejmá možnost naznačená předcházející diskusí je pokusit se znovu navrhnout mapu s pěti zeměmi, tentokrát však souvislými, aby se každá z nich stýkala se čtyřmi ostatními. Augustus de Morgan s užitím vtipných topologických úvah dokázal v r. 1852, že žádná taková mapa neexistuje (za topologické by jeho úvahy byly označeny alespoň ve dvacátém století) — ale to mu neumožňovalo přistoupit k závěru, že dokázal problém čtyř barev. Možná, že tu bylo určité pokušení k takovému závěru přistoupit, ale tento závěr by nebyl správný.

Věc je v tomto: říci, že n barev nestačí k obarvení určité mapy, to vůbec není totéž jako říci, že mapa obsahuje dílčí mapu s $n + 1$ zeměmi, v nichž každá se stýká s n ostatními. Abychom se o tom přesvědčili, dokonce pro případ $n = 3$ už prozkoumaný, uvažujme kruhovou mapu s pěti zeměmi ve tvaru kousků dortu (každý má ve středu kruhu úhel 72°). Tuto mapu lze obarvit třemi barvami: prostě postupujeme *ABCAB* kolem kruhu. Nyní ve středu kruhu vyřízneme otvor, tj. střed nahradíme dosti velkou kruhovou zemí. Výsledkem je mapa, v níž žádná dílčí mapa tvořená čtyřmi zeměmi nemá vlastnost, že každá z nich se stýká se všemi třemi ostatními — přesto však celou mapu nelze obarvit pouze třemi barvami. Tato úvaha opět prokazuje, že tři barvy vždy nestačí, ale nyní důkaz neužívá čtyř vzájemně se stýkajících zemí. To znamená: hodně stýkajících se zemí vyvolává potřebu hodně barev, ale ne obráceně — hodně barev může být zapotřebí z delikátnějších kombinatorických důvodů, což je jeden ze zdrojů obtížnosti problému čtyř barev.

V r. 1976 Apel a Haken předložili důkaz problému čtyř barev. Jejich hlavní úspěch spočíval v redukci problému na konečnou úlohu: ukázali, že jakmile je odpověď známa pro konečný seznam přesně určených map (ve skutečnosti velmi rozsáhlý seznam), je už známa pro všechny mapy. Zmíněná redukce je první krok jejich důkazu, druhý krok je počítání. Provedení redukce je standardní matematická úvaha — v zásadě (i když určitě ne v podrobnostech) byla dávno známa. Tedy: bylo známo, jaký druh redukce je potřeba a mnoho jejích kroků už bylo uděláno. Počítání pak bylo provedeno elektronicky, a když systematická vyčerpávající procedura (která spotřebovala přes 1 000 hodin strojového času při prvním spuštění), neohlásila žádné překážky, počítač vztyčil prapor a zatroubil fanfáru. Vítězství: odpověď je ano, čtyři barvy stačí.

Po ochladnutí nadšení se začaly ozývat reptající hlasy i vážnější stížnosti: program nikdy nebyl zkontrolován, někteří říkali, že se ani zkontrolovat nedá, dokonce se šířily černé zvěsti o obyčejných tradičních matematických chybách, mezerách v důkazu redukce. Reptání a fámy snad jako takové mohou být zajímavé, ale o ně právě teď nejde. Za předpokladu, že redukce je správná, za předpokladu, že program je správný, a za předpokladu, že elektronické součástky fungovaly zcela správně (ty tak fungují vždycky, není-liž pravda?), chci se zeptat: co jsme se z důkazu dozvěděli? Co nyní víme, aniž bychom to věděli dříve?

Nepovažuji to za lehkou otázku k zodpovědění. Abychom si rozuměli: nechystám se strávit svůj čas hledáním protipříkladů k tvrzení o čtyřech barvách. Sjetina z počítače měla alespoň jeden praktický význam: odradila od pokusů dokazovat nesprávnost tvrzení. S touto výjimkou však mám pocit, že my, lidstvo, jsme se z důkazu dozvěděli hrozně málo. Jsem takřka v pokušení říci, že jako matematici jsme se nedozvěděli vůbec nic. Nejasná zjevení — to nejsou užitečné matematické nástroje.

Nejproslulejší a nejtěžší otevřený matematický problém je Riemannova hypotéza. Existuje mnoho důležitých vět se sepsanými správnými důkazy, které mají tvar: „jestliže platí Riemannova hypotéza, potom …“. Bylo by dobře znát důkaz (nebo vyvrácení) Riemannovy hypotézy, ale pokud nic takového není objeveno, mohou věty, v nichž se objevuje jako předpoklad, být poučné a užitečné. Takové hodnocení však nemění můj názor na zjevení. Kdyby mi zjevení zvěstovalo, že Riemannova hypotéza je pravdivá, nemyslím, že by se tím slůvkem moje duše jakkoli obohatila.

Rozvoj matematiky zkracuje důkazy, přináší pochopení a prohlubuje porozumění objevováním stále nových pojmů a následným včleňováním a zařazováním starých pojmů do vhodné obecné teorie, jejíž výstavba znamená léta, desetiletí a někdy staletí práce. Technické termíny (Banachův prostor, Artinovský okruh, fibrovaný prostor) mohou děsit a odrazovat člověka, který v oboru nepracuje, ale jsou to jen krátké slovní obraty, které jsou zkratkou a zprůhledněním úsilí, práce a myšlení našich velkých předchůdců.

Stále můžeme být daleko od nalezení „dobrého" důkazu věty o čtyřech barvách. Potřebujeme jednoduché porozumění nových složitých typů geometrie nebo spletité algebry a vzdálenost odtud k čistě pojmovému, existenčnímu důkazu věty o čtyřech barvách je pravděpodobně stejně velká. Předkládám však jako článek víry, že jsme už viděli a prošli větší vzdálenosti. Vzdálenost od Peanových axiómů k Atiyahově-Singerově větě o indexu by mohla být například jedna z nich. Věřím, že počítač (a v jiném příkladu, 10 000 stránek publikovaného důkazu řešení problému jednoduchých grup) se netrefily do správného pojmu a správného přístupu. Jejich doba přijde. Za sto let ode dneška budou obě věty (pro mapy a grupy) pouhá cvičení pro třetí ročník univerzity, s důkazy na několika stránkách pomocí vhodných pojmů, které v té době budou zcela běžné. Pryč se zjeveními, pravím, v matematice k ničemu nejsou.

Tímto autoritativním prohlášením však nemohu skončit. Poctivě bych měl oznámit, že Apel a Haken moje náboženství úplně nesdílejí. Když mluví o své práci, říkají: „Nyní víme, že se důkaz dá nalézt. Nevíme zatím (a možná nikdy nebudeme vědět), zda existuje důkaz, který je elegantní, stručný a zcela ověřitelný (lidským) matematickým myšlením."

Poslední slovo. Explozí míním hlasitý rámus, neočekávanou a vzrušující zvěst, ne však nutně dobrou věc. Některé exploze odkrývají nová teritoria a jsou příslibem budoucího rozmachu, jiné celou věc uzavírají a zdá se, že nevedou nikam. Mordellova domněnka, dále následující exploze, je prvního typu; věta o čtyřech barvách druhého.

Literatura: EDM 165.

Exploze 2: Mordellova hypotéza. Každé dítě ze základní školy ví, že $9+16 = 25$, nebo jinými slovy $3^2 + 4^2 = 5^2$. Okamžitě vidíme, že tato rovnice zůstane v platnosti, jestliže čísla 3, 4 a 5 jsou nahrazena čísly $3k$, $4k$ a $5k$, kde k je jakékoli číslo. Jestliže se zajímáme o celočíselná řešení rovnice $x^2 + y^2 = z^2$, pak skutečně není důvodu rozlišovat mezi čísly 3, 4, 5 a čísly 6, 8, 10. Účinný způsob, jak říci totéž, je vydělit rovnici členem z^2, čímž se obdrží $(x/z)^2 + (y/z)^2 = 1$, a pak nahradit zlomky x/z, y/z proměnnými x, y. Rovnice se tak upraví na tvar $x^2 + y^2 = 1$ s tím, že hledaná řešení jsou racionální čísla, ne nutně čísla celá. Z tohoto hlediska všechny kladné násobky číselné trojice 3, 4, 5 vedou k právě jednomu řešení v racionálních číslech.

Rovnice $x^2 + y^2 = 1$ má mnoho racionálních řešení, dokonce nekonečně mnoho — v geometrické řeči to znamená, že křivka definovaná touto rovnicí obsahuje nekonečně mnoho racionálních bodů. Tyto body se nazývají pythagorejské trojice a je snadné je všechny najít. Situace je zcela jiná pro Fermatovy rovnice vyššího stupně; slavný a zlopověstný Fermatův problém požaduje ukázat, že jestliže $n > 2$, pak křivka definovaná rovnicí $x^n + y^n = 1$ nemá žádné racionální body (s výjimkou triviálních případů, kdy $x = 0$ nebo $y = 0$).

Fermatův problém se dá začlenit do širšího kontextu, který navrhl Louis Mordell v roce 1922. Mordellova genialita se ve formulaci nové hypotézy projevila tak, že Fermatův problém byl učiněn současně obtížnějším i snadnějším. Obtížnějším proto, že množina uvažovaných křivek byla rozšířena (tak, aby obsahovala všechny algebraické křivky rodu vyššího než 1 nad racionálními čísly — tato charakteristika zahrnuje Fermatovy křivky stupně vyššího než 3). Snadnějším proto, že zeslabíme závěr, ke kterému máme dojít (a to tak, že připustíme existenci racionálních bodů, ale nanejvýš konečného počtu takových bodů). Mordellova hypotéza již není pouhou hypotézou — byla dokázána v roce 1983 Gerdem Faltingsem. Důsledek: Fermatova hypotéza může být stále ještě vyvrácena nalezením nečekaných řešení, ale v každém případě by počet takových řešení byl pro každou hodnotu exponentu pouze konečný.

Literatura: MI 6/2/41.

Vývojová etapa 1: Ergodická teorie. Když odehrajete kulečníkovou kouli kolmo ke straně kulečníkového stolu, odrazí se přímo zpátky k protější straně a pak se bude odrážet tam a zpátky mezi těmito stranami. Když ji ovšem odehrajete od středu jedné strany přímo do středu sousední strany, koule se odrazí pod stejným úhlem jako při dopadu, narazí na střed strany protější ke straně, kde jste začali, odrazí se ve středu čtvrté strany a stále bude takto cyklicky tuto dráhu probíhat. Pravděpodobně si umíte představit mnoho dalších takových obrazců — pečlivě zvolené počáteční namíření vytvoří periodický obrazec. Co se však stane, když odehrajete kouli v úhlu, který je ke stranám stolu v iracionálním vztahu, nebo, srozumitelněji řečeno, když odehrajete kouli v úhlu, který způsobí neperiodickou dráhu? Boltzmann, jeden ze zakladatelů ergodické teorie v minulém století, o takových věcech přemýšlel a mj. formuloval poznatek, kterému se začalo říkat ergodická hypotéza. Podle primitivní verze této hypotézy proběhne dráha (iracionálně namířené) kulečníkové koule v některém čase každým bodem kulečníkového stolu.

Malé zamyšlení nad topologií rovinného obdélníku a na druhé straně nad topologií křivky v tomto obdélníku vás asi přesvědčí o tom, že taková verze ergodické hypotézy není vůbec pravděpodobná — rozumné zákony mechaniky asi nevytvoří křivky vyplňující rovinu. Objevila se modifikovaná verze ergodické hypotézy: byla to domněnka, že se dráha kulečníkové koule, i když snad nebude procházet každým bodem, dostane v každém případě libovolně blízko ke každému bodu, tj. bude, jinak řečeno, v kulečníkovém stolu hustá.

Statistická mechanika se takovými úvahami zabývala do doby, kdy G. D. Birkhoff přišel v r. 1931 se svou zásadní prací. Birkhoff dokázal, že když si vezmete jakoukoli rozumnou podmnožinu stolu, např. pravou polovinu nebo vnitřek kruhu se středem ve středu stolu, prostě cokoli, je průměrný čas, který kulečníková koule v této podmnožině pobude, úměrný obsahu podmnožiny, a to nezávisle na výchozí poloze koule. Technicky obtížná část Birkhoffova výsledku spočívá v tom, že má vůbec smysl o průměrném čase mluvit, jinak řečeno, že limita schovaná ve formulaci tvrzení skutečně existuje. Překvapivá část Birkhoffova závěru tkví v tom, že průměrný čas je konstantní, nezávislý na výchozí poloze koule. Z tohoto závěru mj. vyplývá, že podíváte-li se na vnitřek libovolného kruhu vyznačeného na stole, není důležité, kde je vyznačen a není důležité, jak je velký či malý, kulečníková koule s jistotou bude vstupovat do tohoto kruhu znovu a znovu, takže zejména dráha koule je skutečně hustá.

Birkhoffova práce byla publikována před více než padesáti lety a od té doby se ergodická teorie stala důležitou matematickou disciplínou s bohatými vazbami na klasickou i moderní analýzu. Za posledních 75 let představuje tato disciplína rozhodně jeden z velkých kroků vpřed. (Poznámka k rodině: Garrett Birkhoff je syn G. D. Birkhoffa. Svého času oba působili na Harvardu.)

Literatura: EDM 146/B.

Vývojová etapa 2: Transcendentní čísla. Je číslo $2^{\sqrt{2}}$ racionální? Pokud ne, je alespoň algebraické (tj. kořenem polynomu s celočíselnými koeficienty)? Slavný sedmý Hilbertův problém se týkal této otázky a jejího obecného zázemí. Dobrý způsob jak formulovat obecnou otázku, je zeptat se, kdy jsou čísla tvaru α^{β} transcendentní. Pro $\alpha = 0$ je otázka nezajímavá a totéž platí pro $\alpha = 1$; podobně by nikoho nezajímal případ $\beta = 0$ nebo $\beta = 1$. Obecněji, když β je racionální, pak se otázka redukuje na snadné a všeobecně známé dílčí otázky týkající se algebraických čísel. Na druhé straně, když buď α, nebo β je transcendentní, hledaná odpověď se zdá být příliš blízko zadání. Se zřetelem na tyto poznámky „správně“ formulovaná otázka je tato: jsou-li α a β algebraická čísla, α různé od 0 i od 1 a β iracionální, je pak α^{β} transcendentní? Ukazuje se, že odpověď je kladná. Byla získána, víceméně současně a nezávisle, A. O. Gelfondem (rozlišujte od I. M. Gelfanda) a Theodorem Schneiderem v r. 1934. Zahrnuje otázku o $2^{\sqrt{2}}$: poněvadž $2 \neq 0$, $2 \neq 1$, a $\sqrt{2}$ je iracionální, $2^{\sqrt{2}}$ je transcendentní číslo.

Teorie se na tomto místě nezastavila. Zde je např. n-násobné zobecnění, vzorek z řady hlubokých výsledků získaných Alanem Bakerem v sérii článků z konce šedesátých let (za něž dostal Fieldsovu medaili). Jestliže $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou algebraická čísla různá jak od 0, tak od 1 a $\beta_1, \ldots, \beta_n$ jsou algebraická čísla taková, že $1, \beta_1, \ldots, \beta_n$ jsou lineárně nezávislá nad tělesem racionálních čísel, potom $\alpha_1^{\beta_1}\alpha_2^{\beta_2}\ldots\alpha_n^{\beta_n}$ je transcendentní.

Literatura: EDM 414/D.

Vývojová etapa 3: Hypotéza kontinua. V roce 1900 se konal Mezinárodní kongres matematiků v Paříži a tam předložil Hilbert svůj seznam 23 problémů. Prvním z těchto problémů byla hypotéza kontinua, původně formulovaná Cantorem. Nejjednodušší verze Cantorovy hypotézy kontinua (existují i jiné a obecnější verze, vzbuzující velký zájem) říká, že každá nespočetná množina reálných čísel je ve vzájemně jednoznačné korespondenci s množinou všech reálných čísel neboli (v Cantorově označení), že neexistuje kardinální číslo, které by leželo mezi $\aleph_0$ a $2^{\aleph_0}$.

Je hypotéza kontinua pravdivá? Otázka byla často přirovnávána k podobné otázce týkající se Euklidova postulátu o rovnoběžkách a odpověď na ni pohoršila a rozmrzela spoustu lidí, stejně jako Bolyaiovo a Lobačevského řešení problému rovnoběžek pohoršilo a rozmrzelo mnohé z našich pradědečků. V obou případech existuje více či méně příjemný systém axiómů (v našem případě je to Zermelova-Fraenkelova soustava axiómů teorie množin) a jeden méně příjemný, složitější a nikoli zřejmý dodatečný axióm. Jestliže dodatečný axióm je důsledkem základních axiómů, je pravdivý a vše je v pořádku; jestliže jeho negace je důsledkem základních axiómů, je nepravdivý, a ať už se nám to líbí nebo ne, otázka je definitivně zodpověděna. Odpověď, na kterou se čekalo dlouhou dobu, se ukázala být delikátním a hlubokým intelektuálním výkonem. Gödel dokázal v roce 1940, že hypotéza kontinua není nepravdivá — je slučitelná s ostatními axiómy teorie množin — a Paul Cohen dokázal v roce 1964, že není ani pravdivá — je nezávislá na ostatních axiómech; jinak řečeno, její negace je rovněž slučitelná s těmito axiómy.

Gödel i Cohen argumentovali tak, že zkonstruovali vhodný model, ale použili velmi rozdílné postupy. Gödel uvažuje některé universum množin, které splňuje Zermelovy-Fraenkelovy axiómy a ukazuje existenci poduniversa, které je rovněž splňuje a v němž navíc platí hypotéza kontinua. Cohenova argumentace je podobná, ale obtížnější. Podobá se konstrukci modelu Lobačevského roviny pocházející od Felixe Kleina, při níž se vezme otevřený euklidovský kruh a opatří se novou metrikou. Cohen, stejně jako Gödel, začíná s určitým modelem teorie množin a pak jej zvětšuje, přidává k němu nové objekty, a to tak, aby přinutil (*force*) hypotézu kontinua k neplatnosti. („Forcing" se stal důležitým technickým termínem v této problematice.)

V jakém stavu to zanechalo hypotézu kontinua? Mnozí lidé věří, stejně jako Gödel, že navzdory nezávislosti hypotézy kontinua je tato hypotéza v určitém legitimním smyslu buď pravdivá, nebo nepravdivá — že lidstvo ještě nepřišlo na ten pravý způsob, jak popsat plnou pravdu o teorii množin — a až vyjde plná pravda najevo, až budou nalezeny vhodné dodatečné axiómy a připojeny k těm současným, pak se hypotéza kontinua stane buď dokazatelnou, nebo vyvratitelnou. V obou směrech existují ideové školy a můžete se podle své chuti připojit k té, kterou pokládáte za přitažlivější. Ovlivnilo by vaše rozhodnutí, kdybyste věděli, co si přesně myslel Gödel? Ten si myslel, že by hypotéza mohla být vyvrácena.

Literatura: EDM 35/D.

Vývojová etapa 4: Lieovy grupy. Hilbertův pátý problém záležel v otázce, zda některé poměrně mírné požadavky kladené na topologické grupy stačí k vyvození silných závěrů. Topologická grupa je množina, která je současně grupou a topologickým prostorem, přičemž jsou obě struktury kompatibilní v tom smyslu, že grupové operace (násobení a inverze) jsou spojité.

Typickým příkladem je množina všech matic typu 2×2 a tvaru $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, kde $x > 0$; topologická struktura je struktura horní souřadnicové poloroviny (složené ze všech bodů (x, y), kde $x > 0$) a multiplikativní struktura je dána obyčejným násobením matic. Tento příklad má důležitou speciální vlastnost: je „lokálně euklidovský" v tom smyslu, že každý bod má okolí, které je homeomorfní s otevřenou koulí v dvojrozměrném euklidovském prostoru. (Jinými slovy: každý bod připouští „lokální souřadnicovou soustavu".) Ještě důležitější speciální vlastností tohoto příkladu je, že grupové operace, chápané jako funkce na vhodném euklidovském prostoru, jsou nejen spojité, ale dokonce analytické. To je hned zřejmé; jestliže matici $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ztotožníme s uspořádanou dvojicí (x, y), pak

$$(u, v)(x, y) = (ux, uy + v) \quad \text{a} \quad (x, y)^{-1} = \left(\frac{1}{x}, \frac{-y}{x}\right).$$

Jestliže grupa je lokálně euklidovská, tj. může být „opatřena souřadnicemi", pak je mnoho způsobů, jak zavést souřadnice; pokud alespoň jeden z těchto způsobů je takový, že grupové operace jsou při něm analytické; grupa se nazývá „Lieova grupa". Hilbertův problém zněl: je každá lokálně euklidovská grupa Lieovou grupou?

Problém je podobný jistému problému v teorii funkcí komplexní proměnné. Je poměrně elementární dokázat, že každá dvakrát diferencovatelná funkce je analytická; těžké je dokázat, že závěr platí za mnohem slabších předpokladů. Podobně bylo dlouhou dobu známo, že jestliže topologická grupa připouští dostatečněkrát diferencovatelné souřadnice, pak připouští i souřadnice analytické; Hilbertův problém požaduje dokázat totéž za mnohem slabších předpokladů.

Bezprostředně po objevu Haarovy míry využil von Neumann (1933) tuto míru k důkazu, že odpověď na Hilbertův problém je „ano" pro kompaktní grupy. O něco později Pontrjagin (1939) vyřešil abelovský případ a Chevalley (1941) vyřídil případ řešitelných grup. Obecný případ byl vyřešen v letech 1952 a 1953 Gleasonem a Yamabem a dvojicí Montgomery–Zippin; odpověď na Hilbertův problém je kladná. Gleason nabídl novou charakterizaci Lieových grup; Montgomery s Zippinem využili geometricko-topologické prostředky (a Gleasonův výsledek) k dosažení žádaného závěru.

Literatura: EDM 406/N.

Vývojová etapa 5: Jednoduché grupy. Každá grupa má dvě normální podgrupy, totiž samotnou grupu a potom podgrupu, která se skládá z jednotkového prvku. Grupa se nazývá jednoduchá, jestliže to jsou její jediné normální podgrupy.

Jednoduché grupy se podobají prvočíslům, a to ze dvou aspektů: nemají žádné vlastní části a každá konečná grupa může být sestrojena s jejich pomocí. Skutečně, uvažujme libovolnou konečnou grupu a v ní maximální normální podgrupu, tj. normální podgrupu, která není obsažena v žádné jiné vlastní normální podgrupě. Je-li daná grupa jednoduchá, pak se tato maximální normální podgrupa skládá pouze z jednotky. Ale v každém případě a nezávisle na tom, jak tato podgrupa vypadá, její maximalita znamená, že faktorová grupa dané grupy podle této podgrupy je jednoduchá. Vztah mezi grupou, normální podgrupou a faktorovou grupou se někdy popisuje slovy, že původní grupa je rozšířením faktorové grupy pomocí její podgrupy. V této terminologii je pak každá konečná grupa (s výjimkou triviální) rozšířením jednoduché grupy pomocí grupy menšího řádu. Toto tvrzení je grupově teoretickou obdobou číselně teoretického tvrzení, že každé kladné celé číslo (s výjimkou jedničky) je násobek prvočísla a menšího kladného celého čísla.

Jestliže maximální normální podgrupa je netriviální, pak právě použitá procedura může být použita znovu; výsledkem bude maximální normální podgrupa maximální normální podgrupy; větší normální podgrupa se tak opět stane rozšířením jednoduché grupy pomocí normální podgrupy. Postup může být opakován tak dlouho, dokud produkuje netriviální podgrupy; nakonec se dostane sestupný řetězec (kompoziční řada) podgrup původní grupy s vlastností, že každá faktorová grupa získaná „vydělením" členu řetězce následujícím jeho členem je jednoduchá grupa. Velká část problému, jak popsat všechny konečné grupy, se tím redukuje na problém určení jednoduchých konečných grup.

Abelovské grupy se mezi jednoduchými konečnými grupami určí snadno — je pouhým cvičením ukázat, že jsou to právě všechny cyklické grupy prvočíselného řádu. To je však jediná snadná část problému. Obtížné je najít všechny neabelovské jednoduché grupy. Pro některé příklady jednoduchých grup nemusíme chodit daleko: například mezi grupami permutací jsou nejznámější alternující grupy stupně 5 a vyššího. Po dlouhou dobu se známé jednoduché grupy nechtěly podřizovat jakýmkoli pravidlům a dokonce i nejjednodušší otázky o těchto grupách odolávaly všemu úsilí. Například Burnside vyslovil v roce 1911 hypotézu, že každá konečná neabelovská jednoduchá grupa je sudého řádu a tato hypotéza zůstala otevřena po více než 50 let.

Ve velkolepé demonstraci grupově teoretické síly vyřídili Feit a Thompson (v roce 1963) Burnsideovu hypotézu — ukázali, že platí. Důkaz zabírá celé číslo (přes 250 stran) časopisu *Pacific Journal*. Je to technicky náročná teorie grup a teorie charakterů. Od té doby byla provedena některá zkrácení důkazu, ale nikdo neobjevil krátký nebo snadný důkaz. Výsledek má mnoho důsledků a použité metody byly využity také ke zdolávání mnoha jiných problémů v teorii konečných grup: obor, který kdysi mnozí pokládali za odumřelý, se ukázal být schopným nového a temperamentního života. Takže například Burnsideův sen se nyní zcela naplnil: gigantickým společným úsilím mnoha matematiků na celém světě se podařilo najít všechny konečné jednoduché grupy a všechny je explicitně popsat.

Literatura: EDM 160/D.

Vývojová etapa 6: Atiyahova-Singerova věta. Jak se může stát, že k lineární transformaci konečněrozměrného vektorového prostoru neexistuje inverzní transformace? Zřejmě to nastane ve dvou případech: buď transformace není injektivní (tj. není prostým zobrazením), nebo není surjektivní (tj. není zobrazením na celý prostor). První případ znamená existenci netriviálního jádra a druhý případ existenci netriviálního „kojádra". Jádro transformace T (označované ker T) je ovšem její nulový prostor, tj. vzor nulového vektoru. Kojádro (označované coker T) je, zhruba řečeno, doplněk oboru hodnot nebo přesněji kvocient celého vektorového prostoru podle oboru hodnot. Je dobře známo z lineární algebry, že obě překážky pro existenci inverzní transformace vystupují vždy současně a že dokonce numerické hodnoty obou překážek, tj. dimenze jádra a kojádra, jsou si vždy rovny.

Pro nekonečněrozměrné prostory se mají věci jinak. Jestliže například T označuje „posunutí o jedno místo doprava" v prostoru l^2 nekonečných posloupností, tj. transformaci definovanou vzorcem

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) = (0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots),$$

pak jádro je triviální podprostor (0), ale obor hodnot je podprostor všech posloupností s nulou na prvním místě; odtud $\dim \ker T = 0$ a $\dim \operatorname{coker} T = 1$.

Index lineární transformace T je nyní definován formulí

$$\operatorname{index} T = \dim \ker T - \dim \operatorname{coker} T,$$

pokud má tato formule smysl (tj. pokud vpravo není neurčitý výraz typu $\infty - \infty$). Pro lineární transformace konečněrozměrných prostorů je index vždy nulový, ale na nekonečněrozměrných prostorech může dát index zajímavou informaci.

Atiyahova-Singerova věta hovoří o „analytickém" indexu, jak byl právě definován. Prvním příkladem, ke kterému se většina z nás uchýlí, je speciální případ Cauchyova integrálního vzorce použitý pro výpočet indexu (uzavřené rovinné) křivky. Jiným příkladem je Riemannova-Rochova věta. Kompaktní Riemannovy plochy, jako jsou sféra a anuloid, vystupují v teorii funkcí komplexní proměnné a Riemannova-Rochova věta (která se objevuje v Rochově práci z r. 1865) hovoří o dimenzi jistých vektorových prostorů meromorfních funkcí na takových Riemannových plochách; je to vlastně vzorec pro tuto dimenzi. Obecná Atiyahova-Singerova věta je zobecněním Riemannovy-Rochovy věty. Pojednává o hladkých kompaktních varietách, které jsou obecnější než Riemannovy plochy. Eliptické diferenciální operátory pro hladké funkce definované na takových varietách dávají vždy dva číselné invarianty. Jeden z nich je analytický index, definovaný výše uvedeným způsobem, a druhý z nich je topologický index, což je něco jiného. Topologický index souvisí s K-teorií a obzvláště, ve spíše klasickém kontextu, s Eulerovou charakteristikou. Výsledkem Atiyahovy-Singerovy věty (1963) je, že tyto dva indexy mají stejnou hodnotu, což jinými slovy znamená, že vlastnost velké analytické důležitosti a s čistě analytickou definicí je vlastně téměř celá určena topologickými vlastnostmi příslušné variety.

Rovnice, o které jsme právě hovořili, je pouze malou částí společné práce Atiyaha a Singera. Výsledky této spolupráce patří v matematice k těm nejhlubším, k těm s nejširším záběrem. Pro mne jako zpravodaje pak šlo o zdaleka nejtěžší úkol. Nejde zdaleka jen o věty, ale o teorii, o kontext, o hledisko, které ovlivňuje mnoho oblastí matematiky a je jimi zpětně ovlivňováno. Když Osserman psal o pozoruhodných úspěších výzkumu v diferenciální geometrii za posledních padesát let, nazval Atiyahovu-Singerovu větu „velkou syntézou analýzy, topologie a geometrie, která vede obzvláště k novému způsobu nazírání na Gaussovu-Bonnetovu větu: ne jako na izolovaný výsledek, ale jako na případ včleněný do širší souvislosti jevů". Tato syntéza byla pravděpodobně hlavním důvodem, proč byl Michael Atiyah v Anglii povýšen do šlechtického stavu a Isadore Singer obdržel v USA prezidentskou medaili.

Literatura: EDM 236/H.

Vývojová etapa 7: Fourierovy řady. Historická rána osudu (kvůli které se šlo dalších takřka 200 let po falešné stopě) je skutečnost, že Fourierovy řady byly objeveny před konvergencí. Fourierovy řady jsou životnou partií klasické i moderní analýzy, jsou důležité pro abstraktní teorii i pro konkrétní aplikace. Objevují se v topologických grupách a v teorii operátorů, svůj původ mají v problémech kmitajících strun a vedení tepla.

Ve své nejklasičtější podobě se Fourierovy řady týkají číselných (nejlépe komplexních) 2π-periodických funkcí na reálné ose integrovatelných na intervalu $[0,2\pi]$. Fourierova řada takové funkce je nekonečná lineární kombinace exponenciálních funkcí $e^{inx}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ s koeficienty určenými integrováním zadané funkce vzhledem k těmto exponenciálám. (Ve Fourierově řadě se mohou užít siny a cosiny a pak n probíhá jen jedním směrem; s komplexním tvarem se však algebraicky lépe pracuje.)

Trigonometrické polynomy (v reálném či komplexním tvaru) jsou dobře známé objekty a jsou z početního hlediska přístupné. Určitě nic špatného nemohlo vzejít z vyjádření složitějších funkcí limitami takových polynomů. Proto se zdálo přirozené doufat, že „součet" Fourierovy řady příslušející funkci f se bude „rovnat" f, a v každém případě se ptát, pro jaké funkce to nastává. Žilo se v naději na odpověď, že dobré funkce budou mít dobré řady, a historie této části matematiky byla touto nadějí silně ovlivněna.

Když se začalo rozumět limitám, slova „součet" a „rovnat se" byla interpretována ve smyslu bodové konvergence; plodnější a použitelnější pojem slabé konvergence a konvergence v normě se objevily až poté, kdy se matematické společenství nenapravitelně upnulo směrem k bodové konvergenci.

Jak dobrá musí dobrá funkce být? Diferencovatelnost je dobrá dostatečně, ale ukazuje se, že spojitost není. Existují spojité funkce, jejichž Fourierova řada diverguje v jistém bodě (du Bois Reymond, 1876) a ve skutečnosti v mnoha bodech. Musí Fourierova řada spojité funkce konvergovat skoro všude? Toto byl po mnoho let neřešený problém.

Kolmogorov ukázal, že když se předpokládá pouze integrovatelnost f na $[0,2\pi]$, pak se může stát, že Fourierova řada funkce f diverguje skoro všude (1923) či dokonce všude (1926). Nejzávažnější otázka v tomto směru byla položena Luzinem a zůstala po 50 let nezodpovězena: konverguje pro f integrovatelnou s kvadrátem na $[0,2\pi]$ její Fourierova řada skoro všude? Opakované neúspěchy získat pozitivní odpověď v padesátých a šedesátých letech přerostly mezi experty k přijetí oficiálního náboženského přesvědčení, že odpověď musí znít ne.

Odpověď zní ano. První důkaz pochází od Carlesona (1966). Pozoruhodným rysem Carlesonova výsledku je to, že neužívá žádných neznámých postupů; jenom lépe využívá ty známé. Spočívá na vtipném a vyváženém způsobu výběru dílčích intervalů. Jako by Carleson měl mimořádnou moc nahradit číslo ε kohokoli jiného číslem ε^2, a v tom ten trik spočíval.

Literatura: EDM 167/H.

Vývojová etapa 8: Diofantické rovnice. Hilbertův desátý problém se zabývá řešitelností diofantických rovnic. Problém vyžadoval nalezení algoritmu, výpočetní procedury, která by určila, zdali libovolně předepsaná polynomiální rovnice s (kladnými) celočíselnými koeficienty má (kladná) celočíselná řešení. (Omezíme-li se na kladný případ, je to technicky výhodné a není to na úkor obecnosti.)

Co máme na mysli, řekneme-li, že existuje algoritmus na rozhodování o řešitelnosti? Rozumný způsob, jak zodpovědět tuto otázku, je nabídnout definici vyčíslitelnosti pro množiny a funkce a potom definovat algoritmus v pojmech vyčíslitelnosti. Pojmu vyčíslitelnosti bylo věnováno mnoho pozornosti; má několik různých, ale logicky rovnocenných definic, které jsou všechny ve shodě s intuitivním smyslem, který toto slovo napovídá.

Předpokládejme nyní, že $\{E_1, E_2, E_3, \ldots\}$ je nějaké efektivní uspořádání všech uvažovaných polynomiálních rovnic do posloupnosti, a nechť S je množina těch indexů, pro které má rovnice E_k řešení. Hilbertův problém (existuje algoritmus?) může být vyjádřen ve tvaru otázky, zda je S vyčíslitelná množina. Odpověď je záporná. Na odpověď se čekalo dlouho: je to výsledek nashromážděného úsilí J. Robinsona (1952), M. Davise (1953), H. Putnama (1961) a J. Matijaseviče (1970).

Ústřední myšlenkou důkazu je pojem diofantické množiny a hlavní krok záleží v důkazu, že každá vyčíslitelná množina je diofantická. Postup důmyslně využívá elementární teorie čísel (např. Čínské zbytkové věty a části teorie Fibonacciho čísel). Důkaz poskytuje zajímavé diofantické množiny, jejichž diofantický charakter není ani zdaleka zřejmý (např. mocniny dvojky, faktoriály a prvočísla).

Jedním ze způsobů, jak dokázat, že S (podmnožina indexů všech řešitelných rovnic) není vyčíslitelná, je důkaz sporem. Kdyby byla množina S vyčíslitelná, vyplynulo by odtud (s využitím několika málo dalších argumentů), že každá partikulární diofantická množina (tj. množina řešení každé jednotlivé rovnice zvlášť) je vyčíslitelná a odtud (s využitím zmíněného „hlavního kroku“) pak, že doplněk každé diofantické množiny je diofantická množina. Spor se odvodí tak, že se sestrojí diofantická množina, jejíž doplněk není diofantický.

Poslední krok využívá jisté verze známé Cantorovy diagonální konstrukce. Postup je takový, že se nejprve „efektivně“ uspořádají všechny diofantické množiny, např. do tvaru posloupnosti $\{D_1, D_2, D_3, \ldots\}$, dále se dokáže, že množina $D^* = \{n; n \in D_n\}$ je diofantická (což vyžaduje určitou argumentaci) a konečně se ukáže, že doplněk množiny D^* není diofantický — a právě zde se využije Cantorova konstrukce.

Literatura: EDM 100.

Vývojová etapa 9: Banachovy báze. V kalkulu (s počátky v 17. století) se učíme hledat maxima a minima číselných funkcí definovaných na dobře známých definičních oborech, jako jsou intervaly na reálné ose nebo obdélníky v rovině. V pozdější matematické disciplíně, které se říká variační počet (s počátky v 18. století), se snažíme nalézt maxima a minima číselných funkcí, jejichž definičními obory jsou množiny funkcí. Nejslavnější příklad: pro každou dráhu spojující dva body v prostoru je potřeba určitá doba k tomu, aby po této dráze částice sklouzla z jednoho bodu do druhého — jaké je minimum všech takových časů? (Minimálního času se nabývá pro proslulou dráhu nazývanou brachystochrona — *brachysto* kvůli nejkratší a *chrona* kvůli času.) Takové úlohy se vyskytovaly mezi problémy, které daly vznik funkcionální analýze, té části analýzy, v níž definiční obory studovaných funkcí jsou množiny funkcí, podmnožiny prostorů funkcí a v nichž se bohatě užívají algebraické a topologické metody.

Z jiného hlediska lze na funkcionální analýzu pohlížet jako na nekonečně rozměrné zobecnění lineární algebry. První myšlenkou bylo nahradit vektory funkcemi a násobení vektorů maticemi nahradit integrováním funkcí vynásobených jádry. První systemizace disciplíny (okolo r. 1920) byla předložena Banachem a Wienerem (nezávisle)

— výsledkem byla teorie Banachových prostorů a mnoha jejich směle zobecněných odnoží. Studium Banachových prostorů je typickým příkladem axiomatické metody v matematice — je abstraktní a obecné a má přitom kořeny v konkrétním a speciálním. Někdo ho nazývá příliš obecným, jiný nedostatečně obecným. V každém případě je to stále živá partie matematiky a největší pokrok v ní byl učiněn relativně nedávno.

Jednou z prvních otázek v Banachových prostorech byl problém báze položený samotným Banachem v jeho knize (1932). Posloupnost prvků Banachova prostoru je Schauderova báze prostoru, pokud každý vektor má jednoznačné vyjádření ve tvaru nekonečné lineární kombinace členů posloupnosti. Ze spočetnosti zabudované do definice slova „posloupnost" vyplývá, že pokud Banachův prostor bázi má, pak je separabilní (tj. obsahuje hustou spočetnou množinu). Problém báze, který byl otevřený po 40 let, spočíval v obrácení: má každý separabilní prostor bázi? Každý prostor, který se kdy v analýze vynořil, bázi měl, a přesto důkaz, že tomu tak musí být, stále unikal.

Důležitý klasický pojem vyskytující se při studiu Banachových prostorů je pojem kompaktního (totálně spojitého) operátoru, tedy lineárního zobrazení mezi Banachovými prostory takového, že obraz jednotkové koule je kompaktní. Přirozené kompaktní operátory jsou konečněrozměrné operátory (tj. operátory s konečněrozměrným oborem hodnot); další přirozené kompaktní operátory jsou (stejnorozměrné) limity konečněrozměrných operátorů. Je-li Banachův prostor „rozumný", pak každé jeho kompaktní zobrazení do sebe je takovou limitou (říkáme, že prostor má aproximační vlastnost); tuto aproximační vlastnost má zejména každý Banachův prostor s bází.

Problém báze byl vyřešen v r. 1973 Perem Enfloem. Ukázalo se, že řešení je negativní: existuje separabilní Banachův prostor, který nemá aproximační vlastnost. Důkazová technika závisí na konstrukci: je to kombinatorický postup umožňující sestrojit a spojit nekonečně mnoho konečněrozměrných Banachových prostorů.

Literatura: EDM 39/A.

Vývojová etapa 10: Variety. Dvojrozměrná varieta je topologický prostor, který se lokálně chová jako dvojrozměrný euklidovský prostor (tj. každý bod má okolí homeomorfní s otevřeným kruhem v rovině) s tím, že lokálně euklidovské kousky jsou vzájemně slepeny spojitě a že jich není příliš mnoho (což znamená, že celý prostor je separabilní). Definice variet dimenze 3, 4, 5 atd. (zkrácené označení: 3-varieta, 4-varieta, atd.) jsou přesně stejné — pouze nahradíme rovinu prostorem příslušné dimenze 3, 4, 5, atd.

2-varieta může být velká (může to být například celá rovina) a dokonce i když nevypadá velká, může být stále „vnitřně" velká v tom smyslu, že v ní mnoho parametrizovaných křivek konverguje k bodům ležícím vně variety, jako je tomu v případě otevřeného kruhu. Variety, jejichž zkoumání vypadá slibněji, jsou kompaktní variety.

Je možné vyjmenovat všechny kompaktní 2-variety? Ano, je to možné, a nejjednodušší seznam dostaneme pro tzv. orientabilní variety. Jedna z nich je jednoduše souvislá (sféra), další má rod 1 (anuloid neboli torus), další má rod 2 (preclík se dvěma otvory), atd. — a všechny možné orientabilní 2-variety vypadají podobně (ve smyslu homeomorfismu). Problém klasifikace kompaktních 2-variet je klasický a byl vyřešen již dávno. (1-rozměrný případ lze docela dobře uložit za domácí cvičení.)

Ve vyšších dimenzích je všechno hůře vidět a hůře se dokazuje. Je ovšem překvapující, že pro dimenzi pět a vyšší dimenze je velká část odpovědi známa — jednoduše souvislé 5-variety jsou dobře pochopeny a klasifikovány pomocí homotopické teorie. Pro 3-variety je problém nevyřešen — toho se týká slavná Poincarého hypotéza. 4-variety tvoří zvláštní kapitolu. Dvou velkých vítězství bylo dosaženo Michaelem Friedmanem a Simonem Donaldsonem v roce 1982 (a každý z nich dostal na kongresu v Berkeley v roce 1986 Fieldsovu medaili).

Ukazuje se, že každé orientované 4-varietě je přiřazena některá celočíselná matice („průseková matice") s determinantem rovným ± 1 a Friedman ukázal, že všechny takové matice se skutečně vyskytnou jako hodnoty. Korespondence mezi maticemi a varietami je z půlky vzájemně jednoznačná a z druhé půlky taková, že jedna matice odpovídá pouze dvěma varietám. Konečným výsledkem je úplná klasifikace všech jednoduše souvislých (kompaktních) orientovaných 4-variet. Jestliže považujeme míč (povrch sféry) za dvojrozměrný objekt (nezáleží na tom, že jej obvykle vidíme vložený do trojrozměrného prostoru), pak Friedmanovy práce nám dávají stejně dobrou představu o čtyřrozměrných míčích, jakou máme o těch pravých a nefalšovaných.

Donaldson naproti tomu ukázal, že jestliže jednoduše souvislá a orientovaná 4-varieta má hladkou diferencovatelnou strukturu a jestliže její matice je pozitivně definitní, pak tato matice musí být ekvivalentní s jednotkovou maticí. To je velmi silný závěr; ukazuje to, že teorie topologických 4-variet a diferencovatelných 4-variet jsou podstatně různé.

Když John Milnor hovořil o Friedmanově práci, řekl, že důkazy jeho výsledků jsou mimořádně obtížné. Když Michael Atiyah hovořil o díle S. Donaldsona, řekl, že otevřelo zcela novou oblast výzkumu a dále prohlásil, že Donaldsonovo mládí a matematická síla jsou „znamením, že matematika neztratila svou jednotu ani životnost".

Literatura: MI 5/3/39.

Vývojová etapa 11: Bieberbachova domněnka. Některé problémy nejsou zajímavé pro svou zajímavost, nýbrž proto, že je nelze zdolat. Nejlepší ilustrací toho je pravděpodobně Fermatův problém. Ve skutečnosti nikdo nechce znát pouhou odpověď na tuto otázku. Matematici chtějí vědět, *proč* neznají odpověď. Bieberbachova domněnka o prostých holomorfních funkcích byla naprosto přirozená pro specialisty v oboru, většině nezasvěcenců však připadala jen jako podivná formální drobnost, která se těšila věhlasu hlavně proto, že zůstávala nezodpověděná.

Bieberbachova domněnka se týká těch funkcí vyjádřených mocninnou řadou tvaru

$$z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n,$$

které jsou prosté (klasickým jazykem řečeno: univalentní) v otevřeném jednotkovém kruhu. Tato třída tvoří „normální systém" (má vlastnost kompaktnosti). Odtud vyplývá, že pro každé n zůstává koeficient a_n omezený pro všechny funkce z dané třídy. Při studiu funkcí uvedeného typu dokázal Bierberbach v r. 1916, že pro ně ve skutečnosti platí odhad $|a_2| \leqq 2$. Jedna konkrétní funkce z naší třídy, tzv. Koebeho extremální funkce, definovaná vztahem $a_n = n$, ukazuje, že horní hranice 2 je nejlepší možná (a ve skutečnosti jí i dosáhne). Bieberbachova domněnka spočívala v tom, že obecněji platí $|a_n| \leqq n$ pro každé n.

Loewner dokázal v r. 1923, že domněnka platí pro $n = 3$; v r. 1955 ji Garabedian a Schiffer dokázali pro $n = 4$; v r. 1968 ji Pedersen a Ozawa dokázali pro $n = 6$; v r. 1972 ji Garabedian, Pedersen a Schiffer dokázali pro $n = 5$; a v r. 1973 ji Ozawa a Kubota dokázali pro $n = 8$. Pokrok byl pomalý a nikterak slibný.

Průlom, který domněnku proměnil v matematickou větu, přišel v r. 1984, kdy Louis de Branges předložil důkaz obecného případu. Důkaz na několik set stránek byl založen na jeho teorii mocninných řad, pro něž čtverce absolutních hodnot koeficientů mají konečný součet. Jeho původní důkaz obsahoval menší chyby, které byly opravitelné a byly brzo opraveny. Odborníci byli stále tak trochu nesví, ale jejich nepokoj netrval příliš dlouho. Nelíbilo se jim, že důkaz spočíval na metodách funkcionální analýzy, která zdánlivě nemá s věcí nic společného. Konečně Leningradský seminář geometrické teorie funkcí vypracoval důkaz, který by se skoro jistě Bieberbachovi líbil. Důkaz je kratší a průzračnější než jeho speciálnější předchůdci pro případy $n = 5$ a $n = 6$. Mocninné řady, pro něž čtverce absolutních hodnot koeficientů mají konečný součet, vypadly ze hry, de Brangeovy pronikavé pohledy do podstaty však zůstávají tím, co uvedlo události do pohybu. Díky předchozí slávě nebudou všechny zapomenuty.

Literatura: MI 8/1/40

Epilog: Odpovědí na otázku uvedenou v názvu článku je nesporné a rozhodné ne.

Deterministické fyzikální soustavy s chaotickým chováním

Luděk Pekárek, Pavel Kolařík, Praha

1. Úvod

Slovo chaos chápeme obyčejně jako synonymum pro naprostý zmatek a spojujeme ho většinou s nepředvídatelným chováním nebo s náhodným pohybem. Označujeme jím

RNDr. Luděk Pekárek, DrSc. (1924) je vedoucím vědeckým pracovníkem Fyzikálního ústavu ČSAV, Na Slovance 2, 180 00 Praha 8. RNDr. Pavel Kolařík (1959) je odborným asistentem MFF UK, Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2.