

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Miroslav Katětov; Pavel Jedlička

Teorie katastrof: souvislosti a aplikace. II

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 24 (1979), No. 6, 313--326

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/138981>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1979

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Teorie katastrof: souvislosti a aplikace. II

Miroslav Katětov, Pavel Jedlička, Praha

Nynější druhá část článku navazuje dosti bezprostředně na první část [1], jež byla nedávno publikována v tomto časopise. Připomeneme proto podrobněji pojmy uvedené v [1] jen tam, kde to bude nezbytné, kdežto jinak budeme odkazovat na text první části, a to citacemi tvaru I 2, I 3.6 apod.; odkazy na nynější část budou mít tvar II 1, II 2.5 atd. Poznamenáváme, že literatura k teorii katastrof byla uvedena v první části článku; v jedné citaci došlo při tom k omylu: u knihy R. BRÖCKER, L. LANDER, *Differentiable germs and catastrophes*, Cambridge Univ. Press 1975 bylo nedopatřením vynecháno jméno druhého autora.

Nynější část má tři oddíly. Oddíl 1 navazuje na I 2 a týká se základů matematické teorie hystereze a jejích souvislostí s teorií katastrof. Druhý oddíl navazuje na I 3 a týká se matematického modelování roztroušené sklerózy; podobně jako v první části slouží zde tento výklad především k tomu, aby ilustroval některé obecnější úvahy. Konečně v oddíle 3 se zabýváme některými širšími otázkami aplikací teorie katastrof.

Oddíly 1 a 3 nynějšího textu napsal autor uvedený na prvním místě; oddíl 2 napsali oba autoři společně.

1.

1.1. Nejdříve uvedeme některé základní pojmy matematické teorie hystereze a pak budeme mluvit o jejích souvislostech s teorií katastrof. Tyto souvislosti nebyly dosud prozkoumány hlouběji, jsou však nepochybné a projevují se i v tom, že některé reálné děje lze modelovat, a to celkem rovnocenným způsobem, pomocí pojmů jedné i druhé teorie.

Hystereze, o níž nám jde (slova „hystereze“ se totiž používá, např. v biologii, i v jiném významu), se ve slovnících vymezuje asi takto: „závislost stavu objektu na jeho předcházejících stavech“, „zjev, že účinek vnějšího působení na objekt závisí na tom, zda jemu již byl vystaven dříve“. Kombinací a mírnou úpravou dostáváme „závislost stavu objektu nejen na současném vnějším působení, nýbrž i na předcházejícím průběhu působení“. To se již v podstatě dá vyjádřit matematicky, záleží však hodně na pojetí „závislosti na předcházejícím průběhu působení“. Vhodným a často užívaným, i když asi ne jediným, přístupem je pojetí v rámci dynamických systémů (ve smyslu popsáném v I 2.5; viz např. [2]) nebo jiných útvarů příbuzného rázu. Tímto způsobem se také fakticky postupuje při budování obecné matematické teorie hystereze v pracích M. KRASNOSELSKÉHO a dalších autorů (viz např. [3], kde se najdou další odkazy). Je třeba pozna-

menat, že matematické vyjádření četných konkrétních druhů hysterezních jevů je známo již dosti dlouho, ve zmíněných pracích však jde mimo jiné právě o vybudování dostatečně obecné teorie.

Měli bychom teď vlastně definovat pojem dynamického systému s hysterezí. Neučiníme to však, mj. proto, že je asi vhodné pojímat pro různé účely jako „hysterezní“ různé třídy dynamických systémů a podobných útvarů (např. „zobecněných dynamických systémů“, II 1.7); viz k tomu některé úvahy v [3]. Místo toho uvedeme příklady a probereme některé dosti typické vlastnosti systémů, jež lze intuitivně chápat jako hysterezní.

1.2. O dynamických systémech jsme mluvili v I 2.5; uvedli jsme tam příklady a pak shrnuli některé společné rysy, aniž bychom podávali definici. Shrnutí nyní opakujeme s některými úpravami.

O dynamickém systému mluvíme tehdy, když

(A) jsou dány (a) topologické prostory B, P ; (b) spojitě zobrazení $\pi : P \rightarrow B$; (c) jistá korespondence, která každému spojitěmu řídicímu průběhu, tj. zobrazení $g : [t_0, t] \rightarrow B$, a každému počátečnímu stavu $x_0 \in P$ takovému, že $\pi(x_0) = g(t_0)$, přiřazuje právě jeden stavový průběh, tj. zobrazení $f : [t_0, t] \rightarrow P$, které splňuje požadavek $f(t_0) = x_0$, $\pi(f(\tau)) = g(\tau)$ pro $t_0 \leq \tau \leq t$;

(B) zmíněná korespondence splňuje jisté přirozené požadavky, z nichž nejpodstatnější je tento: (*) jestliže $g_1 : [t_0, t_1] \rightarrow B$, $g_2 : [t_1, t_2] \rightarrow B$ jsou spojitě řídicí průběhy, přičemž $g_1(t_1) = g_2(t_1)$, a jestliže průběhu g_1 a bodu $x_0 \in P$ je přiřazeno f_1 , průběhu g_2 a bodu $f_1(t_1) \in P$ je přiřazeno f_2 , pak průběhu g , jenž vzniká spojením (ve zřejmém smyslu) průběhů g_1 a g_2 , odpovídá průběh f vznikající spojením průběhů f_1 a f_2 .

Poznamenáváme, že (1) obvykle máme $P \subset B \times M$, kde M je jistý prostor, a předpokládáme, že π je projekce P do B , (2) u zobrazení $f : [t_0, t] \rightarrow P$ se spojitost předem nepožaduje.

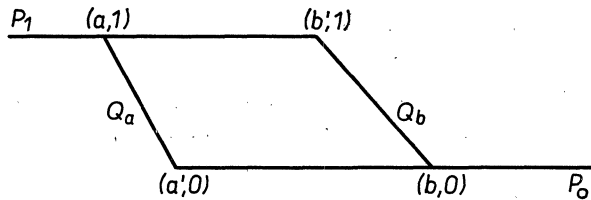
Body $u \in B$ nazýváme často řídicími body, o $g : [t_0, t] \rightarrow B$ mluvíme někdy jako o pohybu řídicího bodu. Pro g a x_0 splňující požadavky uvedené v (A c) budeme používat zkráceného názvu „přípustné g a x_0 “ apod. Názvy „stav“, „stavový bod“ mívají dvojnásobný význam: buď se tím míní bod $x \in P$, anebo jeho projekce do B , ovšem jen v obvyklém případě $P \subset B \times M$ (jinak řečeno, v takovém případě se míní stavem buď $x = (u, y) \in P$, anebo $y \in M$); o který význam jde, bude zpravidla jasné ze souvislosti. Totéž ovšem platí obdobně o výrazu „stavový průběh“ atd. Dodejme ještě, že pro $f(\tau)$, kde f je stavový průběh přiřazený určitému g a určitému $x_0 \in P$, použijeme občas symbolu $\Phi(g, x_0, \tau)$; všimněme si analogie s obdobným symbolem použitým v I 1.2 v souvislosti s diferenciálními rovnicemi.

Pojem dynamického systému lze různým způsobem rozšiřovat a modifikovat: u korespondence $(g, x_0) \mapsto f$ stačí někdy požadavek, aby byla definována pro „skoro všechna“ g , popř. jen pro některá x_0 ; požadavek jednoznačnosti může být u ní poněkud oslaben; u g lze někdy upustit od požadavku spojitosti. Prostory B, P mohou být opatřeny vedle topologie (popř. místo ní) další strukturou. O jiném, velmi dalekosáhlém zobecnění mluvíme v II 1.7.

1.3. Někdy se předpokládá, že jsou dány též tzv. výstupy: budeme mluvit o dynamickém systému s výstupy, jestliže kromě dat zmíněných v II 1.2 je dán ještě jistý prostor V a zobrazení $\varphi : P \rightarrow V$ a je-li přípustnému g a x_0 přiřazeno jako „výstup“ (výstupní průběh) zobrazení $\varphi \circ f$, kde f je stavový průběh přiřazený tomuto g a x_0 .

1.4. Uvedeme nyní jednoduchý příklad, jenž má četné rysy typické pro hysterezní systémy.

Mějme reálná čísla a, a', b, b' , přičemž $a < a' < b' < b$. Nechť množina $P \subset R^2$ (viz obr. 1) je sjednocením polopřímek $P_1 = \{(x, y) : x \leq b', y = 1\}$, $P_0 = \{(x, y) :$



Obr. 1.

: $x \geq a', y = 0\}$ a dvou úsečkách: Q_a o koncových bodech $(a, 1)$, $(a', 0)$ a Q_b o koncových bodech $(b', 1)$, $(b, 0)$. Za řídicí prostor B vezmeme R a pro $(x, y) \in P$ položíme $\pi(x, y) = x$. Označíme \mathcal{F} množinu všech spojitých stavových průběhů $f : [t_0, t] \rightarrow P$ splňujících následující požadavky: (1) jestliže $t_0 \leq \tau \leq t$, $f(\tau) = (b, 0)$, pak pro dostatečně malá okolí V bodu τ v $[t_0, t]$ je buď $f(V) \subset P_0$, nebo $f(V \cap [t_0, \tau]) \subset Q_b$, $f(V \cap [\tau, t]) \subset P_0$; (2) obdobný požadavek týkající se případu $f(\tau) = (a, 1)$; tento požadavek již nebudeme explicitě vypisovat. Dodejme, že požadavek (1) znamená intuitivně „zákaz vstupu na Q_b z P_0 “ a zejména to, že bod, který se po Q_b dostal do $(b, 0)$, nemá již možnost vrátit se po Q_b zpět, nýbrž se pohybuje po P_0 , a na P_1 se může dostat jen po úsečce Q_a ; obdobný je ovšem intuitivní smysl požadavku (2).

Zavedeme nyní dynamický systém následujícím způsobem: spojitému řídicímu průběhu $g : [t_0, t] \rightarrow B = R$ a bodu $x_0 \in P$ takovému, že $\pi(x_0) = g(t_0)$, odpovídá spojitý stavový průběh $f : [t_0, t] \rightarrow P$ patřící do \mathcal{F} , tj. splňující požadavky (1), (2), a takový, že $\pi(f(\tau)) = g(\tau)$ pro všechny $\tau \in [t_0, t]$. Příklad: řídicímu průběhu $g : [0, \pi] \rightarrow R$, jenž je dán výrazem $g(\tau) = a + (b - a) \sin \tau$, je přiřazen průběh $(a, 1) \rightarrow (b', 1) \rightarrow (b, 0) \rightarrow (a', 0) \rightarrow (a, 1)$ (viz obr. 1).

Je ovšem třeba ověřit, zda opravdu máme dynamický systém, tj. zejména zda zmíněným způsobem je opravdu každému přípustnému g a x_0 přiřazeno jedno určité f . To se však zjistí okamžitě pro g po částech monotónní, a dokáže se dosti snadno pro obecný případ.

1.5. Z uvedeného příkladu lze dostat další hysterezní systémy tak, že vezmeme prostor S a zobrazení $\mu : P \rightarrow S$, jež splňuje podmínku $\pi x = \pi x' \Rightarrow \mu x = \mu x'$; bylo-li řídicímu průběhu g původně přiřazeno $f : [t_0, t] \rightarrow P$, přiřadí se mu nyní $\mu \circ f$. Upustíme zde od přesné obecné formulace a popíšeme konkrétní případ.

Nechť S je sjednocení polopřímek $S_1 = \{(x, y) : x \leq b, y = 1\}$, $S_0 = \{(x, y) : x \geq a, y = 0\}$. Pro $(x, y) \in P$ definujeme $\mu(x, y)$ takto: je-li $y = 0$ nebo $y = 1$, pak $\mu(x, y) =$

$= (x, y)$; je-li $0 < y < 1$, pak $\mu(x, y) = (x, 1)$ pro $x \in Q_b$, $\mu(x, y) = (x, 0)$ pro $x \in Q_a$. Dostáváme tak dynamický systém, který se shoduje (až na formální detaily) se systémem, jenž byl popsán v I 2.5 a byl znázorněn na obr. 3 v I. části článku. Intuitivní popis systému je velmi jednoduchý; stavový bod $f(\tau)$ se pohybuje v S tak, aby jeho první souřadnice se rovnala $g(\tau)$; dosáhne-li při pohybu bodu $(b, 1)$, přeskóčí do bodu $(b, 0)$; dosáhne-li bodu $(a, 0)$, přeskóčí do bodu $(a, 1)$. Tomuto systému, ke kterému se ještě budeme vracet, se často říká hysterezní relé anebo podrobněji statické hysterezní relé (o tzv. dynamickém hysterezním relé bude zmínka později); číslům a, b se pak říká „prahy“ relé.

1.6. Všimneme si teď některých důležitých vlastností systému z II 1.4: některé z nich má též systém z II 1.5 a také systémy, jež byly uvedeny v I 2.5.

Nejdříve uvedeme jeden ze způsobů, jimiž lze precizovat intuitivní pojem hysterezní smyčky. Stavový průběh f , jenž odpovídá řídicímu průběhu $g : [t_0, t] \rightarrow B$ takovému, že $t_0 \neq t$, $g(t_0) = g(t)$, a bodu $x_0 \in P$, nazveme jednoduchou spojitou hysterezní smyčkou, jestliže (1) $f(t_0) = f(t)$, (2) po ztotožnění t_0 a t , čímž se z $[t_0, t]$ stane (topologicky) kružnice, je f homeomorfním zobrazením, (3) množina $g[t_0, t] \subset B$ je homeomorfní s úsečkou (pro $B = R$ je tento požadavek splněn triviálně, pokud g není konstantní).

Je zřejmé, že systém z II 1.4 má jednoduché spojitě hysterezní smyčky; jednu z nich jsme již fakticky popsali, viz obr. 1. Systém z II 1.5, u něhož mohou spojitým g odpovídat nespojitá f , zřejmě nemá takové hysterezní smyčky; má však „nespojitě hysterezní smyčky“, čímž míníme např. průběh $(a, 1) - (b, 1) - (\text{skok}) - (b, 0) - (a, 0) - (\text{skok}) - (a, 1)$.

Všimněme si, že z existence hysterezní smyčky plyne toto tvrzení: existuje přípustné $g : [t_0, t] \rightarrow B$ a $x_0 \in P$ tak, že pro vhodné hodnoty $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, t]$ platí $g(\tau_1) = g(\tau_2)$, $\Phi(g, x_0, \tau_1) \neq \Phi(g, x_0, \tau_2)$; připomínáme, že význam symbolu Φ byl popsán v II 1.2. Intuitivně řečeno, znamená uvedené tvrzení (jež je ostatně slabší než tvrzení o existenci hysterezní smyčky) toto: poloha řídicího bodu neurčuje ještě plně polohu stavového bodu, tj. informace o dosavadním řídicím průběhu se nedá redukovat na pouhou informaci o aktuální poloze řídicího bodu.

1.7. Navážeme na to ihned otázkou, zda informace o dosavadním celkovém průběhu se dá vždy redukovat na informaci o aktuálním stavu, tj. o hodnotě $f(t)$. Precizujeme-li tuto otázku, ukáže se, že možnost takové redukce je v podstatě ekvivalentní s požadavkem (*) z II 1.2. Ukazuje se však, že někdy je třeba zkoumat systémy, u nichž taková redukce není možná, jež tedy nejsou dynamickými systémy ve smyslu popsáném v II 1.2; jsou to systémy, které se podobají dynamickým, liší se však od nich, řečeno názorně, tím, že stavový bod si do jisté míry „pamatuje“ dosavadní průběh.

Formulujeme to teď přesněji. Provedme v popisu dynamického systému, uvedeném v II 1.2, následující změny: (1) je pevně dána jistá neprázdná množina $T^* \subset R$, a v úvahu se berou jen ty řídicí průběhy $g : [t_0, \tau] \rightarrow B$, u nichž $t_0 \in T^*$; za T^* se často bere jednorvková množina; (2) místo (*) se klade podstatně slabší požadavek: (**) jestliže $g_1 : [t_0, t] \rightarrow B$, $g_2 : [t_0, t] \rightarrow B$ jsou řídicí průběhy, $x_0 \in P$, $\pi(x_0) = g_1(t_0) = g_2(t_0)$, a f_1, f_2 jsou příslušné stavové průběhy, pak shodují-li se g_1, g_2 na jistém intervalu $[t_0, t'] \subset$

$\subset [t_0, t]$, shodují se na něm též f_1, f_2 . Dostáváme tak popis obecnějších útvarů, pro něž se ještě neustálil název; budeme mluvit prostě o zobecněných dynamických systémech anebo také o transduktorech (tohoto názvu, jenž je obdobou anglického „transducer“ a ruského „preobrazovatel“, se dosud asi nepoužívalo).

Velmi důležitým příkladem zobecněných dynamických systémů jsou dynamická hysterezní relé, viz II 1.10, a zejména II 2.9.

Pojem hystereze lze ovšem zavést též pro zobecněné dynamické systémy; od toho však zde upustíme.

Dodejme ještě, že malou úpravou popisu transduktoru (za základ se vezme N místo R , položí se $T^* = \{0\}$ a přidají se výstupy, viz II 1.3) se dostanou útvary, které se přesně shodují s automaty (v běžném matematickém smyslu).

1.8. Následující vlastnost dynamických systémů zde uvedeme spíše pro zajímavost; (T) jsou-li $g : [t_0, t] \rightarrow B$, $\bar{g} : [\bar{t}_0, \bar{t}] \rightarrow B$ řídicí průběhy a existuje-li spojitě neklesající zobrazení $h : [\bar{t}_0, \bar{t}] \rightarrow [t_0, t]$ takové, že $\bar{g} = g \circ h$, pak je $\Phi(g, x_0, h(\tau)) = \Phi(\bar{g}, x_0, \tau)$ pro každé $x_0 \in P$, pro něž $\pi(x_0) = g(t_0)$. Řečeno intuitivně, znamená (T), že v jistém smyslu stavový průběh nezávisí na rychlosti řídicího průběhu, nýbrž jen na tom, jakými hodnotami prochází řídicí bod a v jakém pořadí; dá se též říci, že stavový průběh je v podstatě určován jen topologickými vlastnostmi řídicího průběhu.

Z vlastnosti (T) plyne toto: (T_0) je-li řídicí průběh $g : [t_0, t] \rightarrow B$ konstantní, pak $\Phi(g, x_0, \tau) = x_0$ pro každé $\tau \in [t_0, t]$. V intuitivním pojetí to znamená, že daný systém nemá žádnou „vnitřní“ dynamiku; setrvává-li řídicí veličina na určité hodnotě, setrvává též řízený objekt ve svém stavu.

Snadno se zjistí, že systémy z II 1.4, II 1.5 mají vlastnost (T), kdežto např. systém z příkladu 1 v I 2.5 nemá ani vlastnost (T_0) .

1.9. Popíšeme nyní poměrně jednoduchý, ale dosti obecný typ hysterezních systémů, které se dostanou ze souboru statických hysterezních relé (budeme jim teď říkat jen „relé“) fungujících paralelně. Prah (viz II 1.5) relé budeme značit α, β (případně s indexy apod.); relé s prahy α, β označíme $R[\alpha, \beta]$. Stavový průběh $f : [t_0, t] \rightarrow \{0, 1\}$ pro relé $R[\alpha, \beta]$, jenž je přiřazen řídicímu průběhu g a bodu x_0 , označíme $f[\alpha, \beta; g, x_0]$. Mějme nyní neprázdný soubor relé $(R[\alpha(k), \beta(k)] : k \in K)$, přičemž předpokládáme $\alpha(k) < \beta(k)$. Položme $M = \{0, 1\}^K$, takže prvky množiny M jsou soubory nul a jedniček indexované pomocí prvků množiny K ; položme $P = R \times M$. Průběhu $g : [t_0, t] \rightarrow R$ a bodu $x_0 = (t_0, (\varepsilon_k : k \in K)) \in P$, kde $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$, přiřadíme zobrazení $f^* : [t_0, t] \rightarrow P$ definované takto: $f^*(\tau) = (g(\tau), (f_k(\tau) : k \in K))$, kde $f_k(\tau) = f[\alpha(k), \beta(k); g, \varepsilon_k](\tau)$; názorně řečeno, stav systému v časovém okamžiku τ je dán souborem stavů jednotlivých relé. Snadno se zjistí, že tím je dán dynamický systém, a to hysterezní.

Mějme nyní míru μ na K a funkci $\lambda : K \rightarrow R$. Budeme předpokládat, že zobrazení $k \mapsto (\alpha(k), \beta(k))$ i funkce λ jsou měřitelné vzhledem k μ ; o otázkách měřitelnosti se jinak již zmiňovat nebudeme, abychom nekomplikovali výklad. Definujeme nyní výstup h , jenž odpovídá řídicímu průběhu neboli vstupu g , následujícím způsobem: $h(\tau) = \int \lambda(k) f_k(\tau) d\mu(k)$. Dostáváme tak dynamický systém s výstupy (viz II 1.3).

Korespondence, jež přiřazuje řídicímu průběhu g stavový průběh $(g(t), h(t))$ v prostoru R^2 , nesplňuje v obecném případě požadavky kladené na dynamický systém. Za určitých předpokladů a omezení však tato korespondence dynamický systém skutečně dává. Ukazuje se (a to je jedním z důležitých, byť poměrně jednoduchých výsledků matematické teorie hystereze), že jistá dosti široká a přirozená třída hysterezních systémů, u nichž $B = R$, $P = R^2$, se skládá právě z těch systémů, které se dají vyjádřit uvedeným způsobem.

1.10. Dynamická hysterezní relé, o nichž byla zmínka v II 1.5, se dají zavést tak, že u relé $R[\alpha, \beta]$ považujeme prvky α, β za proměnné, přičemž jejich hodnoty jsou určovány stavovým průběhem. Přesněji to řekneme až v II 2, kde tato relé budeme bezprostředně potřebovat jako komponenty modelujícího systému.

1.11. Souvislosti mezi teorií katastrof a hysterezními systémy lze charakterizovat dále uvedeným způsobem, jenž je však nutně neúplný, zejména proto, že tyto souvislosti nebyly ještě v dostatečné míře objasněny.

Již ta okolnost, že teorie katastrof úzce souvisí s dynamickými systémy (viz I 2), ukazuje, že tím spíše souvisí s hysterezními systémy; v jistém smyslu se totiž dá říci, že v dynamických systémech souvisejících s teorií katastrof je vždy obsažena hystereze (i když se fakticky často zkoumají a aplikují způsobem, při kterém hystereze nevystupuje). Statické hysterezní relé lze dostat, jak je zřejmé, z krajně jednoduchého systému s katastrofickými body, totiž ze systému, u něhož se vyskytnou dva tzv. záhyby (viz např. obr. 1 v první části článku). Statická relé jsou pak „stavebními kameny“, z nichž se dostane (viz II 1.9) dosti široká třída hysterezních systémů (s řídicím prostorem $B = R$ a stavovým prostorem $P = R^2$). Vzájemná souvislost v druhém směru je zatím méně zřetelná, zdá se však, že v případě $B = R$, $P = R^2$ je skutečně úzká – asi v tom smyslu, že si vzájemně odpovídají jisté kvalitativní typy (globální) soustav polí a jisté kvalitativní typy hysterezních systémů; to je ovšem jen neurčitá domněnka, která by se musela teprve upravit, precizovat a dokázat. V případě $B = R^p$, $p > 1$, $P = R^p \times R^n$ je situace ještě méně jasná již proto, že se pro tyto případy dosud asi plně neujasnilo vhodné matematické pojetí hysterezního systému.

V jistém smyslu nejzávažnější souvislost obou teorií je ovšem v tom, že některé reálné situace lze účelným způsobem modelovat jak s použitím pojmů teorie katastrof, tak i s použitím pojmů teorie hystereze. Konkrétní příklad bude stručně naznačen v II 2.

2.

2.1. Doplníme zde to, co bylo řečeno v I 3 o modelování roztroušené sklerózy, a pak stručně popíšeme jiný model, používající pojmů teorie hystereze. Pokud jde o průběh a podstatu roztroušené sklerózy, odkazujeme na I 3. Poznáváme jen, že jsme se tam zaměřovali hlavně na průběh primárně remitentní, tj. začínající atakami a remisemi a přecházející do chronicko-progresivního stadia; jiné průběhy, např. tzv. benigní (při němž se vyskytnou jen ataky se skoro úplnou remisí), jakož i otázky léčby jsme ponechali stranou.

Léčba může podstatně ovlivnit průběh onemocnění. Zdá se, že její vliv by mohl být modelován v rámci systému popsánoho v I 3; o tom mluvíme v odst. II 2.4–2.6.

2.2. Zopakujeme nyní v největší stručnosti schéma modelu průběhu roztroušené sklerózy, jež jsme uvedli v I 3.4 až I 3.7. Máme tři veličiny: z – intenzita zánětu, s – rozsah poškození axonů, resp. počet nefungujících axonů (popř. celkový stav pacienta), p – stupeň latentní deteriorace, jež spočívá v tom, že se zvyšuje citlivost axonů vůči účinkům zánětu a snižuje jejich regenerační schopnost. Vzájemný vztah veličin je dán rovnicí $H(p, z, s) = 0$, kde H se dostane vhodným difeomorfismem z „kanonického“ výrazu $H_0(p, z, s) = -s^3 + ps + z$. Průběh veličiny p je v zásadě určován průběhem veličiny s ; konkrétní způsob určení není v prvních stádiích modelování příliš důležitý. Pokud jde o časový průběh veličiny z , chápe se jako realizace jistého stochastického procesu, jak bylo podrobněji uvedeno v I 3.4.

Podotýkáme, že funkce $H(p, z, s)$, konkrétní stochastické zákonitosti pro veličinu z atd. jsou, obecně řečeno, různé u různých osob a pro různé areály nervové soustavy (různá ložiska).

Dodejme pro informaci, že uvedené schéma bylo rozvinuto a konkretizováno (I. VRKOČ, Matematický ústav ČSAV) tak, že se za model bral souhrn tří systémů (odpovídajících třem ložiskům), z nichž každý funguje podle diferenciální rovnice tvaru $ds/dt = H(p, z, s)$, přičemž koeficienty v rovnicích se liší a také časový průběh veličiny z je pro různé systémy různý. Křivky, jež se takto získaly pomocí počítače, jsou v dobré kvalitativní shodě s klinickými průběhy. Podrobnosti zde neuvádíme, neboť se vymykají rámci tohoto článku.

2.3. Specifická léčba zaměřená přímo proti viru vyvolávajícímu onemocnění není zatím z řady příčin možná. Lze však dosti účinně potlačovat zánět nebo vydatně podpořit regenerační schopnosti anebo dlouhodobým způsobem omezovat možnost vzniku zánětu, popř. tlumit jeho účinky.

2.4. Protože destrukce nervové tkáně je způsobována až reakcí organismu na pomnožení viru, je možné zaměřit léčbu proti této reakci, i když virus sám zůstane neovlivněn. Při tom se používá jak léků a léčebných postupů tlumících zánět všeobecně, tak i různých druhů imunosupresivních léků, které potlačují imunologickou odpověď v různých jejích fázích a tak tlumí zánětlivý proces.

V modelu tomu odpovídá úprava průběhu veličiny z , zejména zmenšení nebo potlačení jejích výkyvů a snížení případné reziduální hodnoty $a(t)$, viz I 3.5, I 3.6. Jde tedy o změnu heteronomní dynamiky (ve smyslu uvedeném v I 2.5, I 2.6) při zachování základního pole, resp. přechodového metabolického systému (viz I 2.2).

2.5. Léčba tzv. kortizonoidy se vyznačuje vedle všeobecně protizánětlivých účinků též přímým působením na schopnost axonů vést vzruch. Pravděpodobně podporuje mechanismy jejich restituce, takže způsobuje regeneraci a zároveň omezuje a oddaluje vznik vláken trvale poškozených. Ukazuje se, že dosti často vede tato léčba k rychlému zlepšení, někdy v průběhu několika hodin.

Tyto rychlé účinky lze modelovat krátkodobou změnou $H(p, z, s)$ na $H(p, z, s) - R(p, z, s)$, kde $R(p, z, s)$ vyjadřuje intenzitu jakýchsi krátkodobých, ale velmi vydatných regeneračních pochodů. Po krátké době máme zase původní pole $H(p, z, s)$, mezitím však bod reprezentující stav nemocného přešel z dolní části křivky (viz obr. 4 v první části článku) na horní část a tam setrvá ve stabilní poloze. Dodejme, že reálný průběh je asi poněkud složitější a že uvedená modelová představa nebyla ještě konfrontována s empirickými zjištěními; ukazuje však některé další modelovací možnosti systémů opřených o pojmy teorie katastrof.

2.6. Obtížným problémem je prevence zánětu, popř. poškození axonů způsobovaného zánětem. Provádí se dlouhodobým podáváním malých dávek kortizonů a imunosupresivních léků; léčba nemůže být příliš intenzivní, aby se nepotlačila veškerá imunita.

Účinky takové léčby lze modelovat dvěma současnými změnami: jistou úpravou průběhu veličiny z (viz II 2.4) a dlouhodobou, avšak (na rozdíl od II 2.4) poměrně mírnou změnou funkce $H(p, z, s)$ na $H^*(p, z, s) = H(p, z, s) - R(p, z, s)$. Tato změna by patrně znamenala určitý posun plochy $H(p, z, s) = 0$ (a tedy posun izoklin způsobem opačným k tomu, jenž je naznačen v I. části na obr. 5), který by však byl pravděpodobně spojen s jistou deformací. To naznačuje, že pro modelování účinků této léčby by možná nevystačila plocha $H(p, z, s) = 0$, nýbrž bylo by nutné přejít k varietám vyšší dimenze a ke katastrofickým bodům vyššího typu. Tyto úvahy jsou ovšem poměrně subtilní a zatím jen spekulativní. Uvádíme je zde jen jako upozornění na tu zajímavou okolnost, že v rámci metody katastrof může modelování léčby vyžadovat složitější prostředky než modelování vlastního průběhu onemocnění. Tak je tomu např. při modelování tzv. mentální anorexie, jímž se zabýval E. C. ZEEMAN, přičemž dospěl k poměrně konkrétnímu náčrtku modelu; bohužel jsme nenašli v literatuře další rozvinutí těchto úvah a známe příslušný model vlastně jen ze stručného výkladu v Zeemanově populárním článku v *Scientific American*, April 1976, pp. 65–83.

2.7. Nutnost použití vyšších typů katastrof se může objevit i v jiném aspektu. Jak již jsme říkali, v našem modelu konkrétní tvar výrazu $H(p, z, s)$ spolu se zákonitostmi pro časový průběh $z(t)$ a některými dalšími charakteristikami určuje možné průběhy onemocnění u určitého jedince. Přitom výrazy $H(p, z, s)$ se ovšem od jedince k jedinci liší. Je dosti nasnadě (ale není nijak samozřejmá a vyžadovala by ověření) domněnka, že každá „individuální“ funkce $H(p, z, s)$ se dostane z jediné „obecné“ funkce, řekněme $G(u, p, z, s)$, dosazením vhodné hodnoty za u , přičemž u je proměnná veličina dosti nízké dimenze, možná jednorozměrná. Řečeno spíše intuitivním způsobem, jde o domněnku, že celkovou dispozici jednotlivce, pokud jde o reaktivitu axonů na zánětlivý proces vystupující při roztroušené skleróze, lze v rámci celé populace charakterizovat pomocí jednoho, popř. několika málo čísel.

Je-li uvedená domněnka skutečně oprávněná, pak se ovšem může objevit nutnost zkoumat model, jenž by obsahoval katastrofu vyššího typu, vystihující takové přechody jako např. kvalitativní rozdíl mezi dispozicí k benignímu a k primárně remitentnímu (viz II 2.1) průběhu, mezi dispozicí k tomuto průběhu a k průběhu, jenž je od počátku chronicko-progresivní, atd.

2.8. Model průběhu roztroušené sklerózy opřený o pojmy teorie hystereze se dostane na základě následující skoro samozřejmé poznámky. Můžeme předpokládat, že změny stavu axonu probíhají na kratších časových úsecích zhruba tak, že překročí-li intenzita zánětu z jistou mez β , jež je charakteristická pro daný axon (a daný časový úsek), pak nastane poškození a ztráta schopnosti vést vzruch; poklesne-li v dalším průběhu zmíněná intenzita pod jistou jinou charakteristickou hodnotu α (menší než β), dojde k restituci. Přitom α , β jsou proměnné, a jejich změna vyjadřuje latentní deterioraci; u různých axonů mohou být různé.

To ihned vede k modelujícímu systému, jenž je souborem konečného počtu paralelních dynamických hysterezních relé. Pojem dynamického relé, o kterém jsme mluvili zběžně v II 1.10, teď popíšeme.

2.9. Dynamické hysterezní relé pojímáme jako zobecněný dynamický systém (viz II 1.7) s řídicím prostorem R a stavovým prostorem $R \times \{0, 1\}$. Popíšeme, jak se u dynamického hysterezního relé přiřazuje stavový průběh (stavy teď míníme – ve shodě s úmluvami v II 1.2 – prvky 0 a 1) řídicímu průběhu z a počátečnímu stavu.

Jsou dána čísla α_0 , β_0 , jež chápeme jako prahy relé v okamžiku $t = 0$, a tedy předpokládáme $\alpha_0 < \beta_0$, a funkcionály F_t , G_t , $t > 0$, definované na prostoru měřitelných funkcí $s : [0, t] \rightarrow \{0, 1\}$. Je-li dán řídicí průběh $z : [0, t] \rightarrow R$ a počáteční stav $s(0)$, pak přiřazený stavový průběh $s : [0, t] \rightarrow \{0, 1\}$ se určí na základě těchto pravidel: (1) $\alpha(t) = F_t(s(\tau) : 0 \leq \tau < t)$; (2) $\beta(t) = G_t(s(\tau) : 0 \leq \tau < t)$; (3) pro skoro všechna $\tau \in [0, t]$ (tj. až na množinu nulové míry) platí: je-li $z(\tau) > \beta(\tau)$, pak $s(\tau) = 0$, a je-li $z(\tau) < \alpha(\tau)$, pak $s(\tau) = 1$; (4) $s(\tau)$ je zleva spojitá; ke skokům funkce s dochází právě tehdy, když setrvání na dosavadní hodnotě by nebylo možné bez porušení pravidla (3). Uvedená pravidla se ovšem musí poněkud precizovat, a hlavně je třeba učinit některé předpoklady o F_t , G_t – asi v tom smyslu, že dostáváme vždy $\alpha(\tau) < \beta(\tau)$, že $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ jsou vždy nerostoucí funkce a že čím „horší“ je průběh $s(\tau)$, tím rychlejší je pokles $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$; je také účelné předpokládat, že dostáváme vždy spojitě funkce $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$.

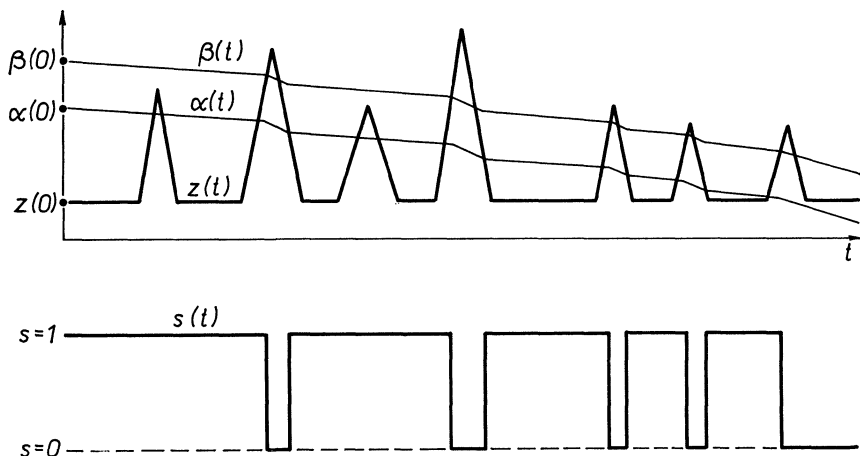
Popis je, jak je patrné, dosti složitý, to však je dáno hlavně tím, že $s(\tau)$ je vlastně řešením dosti složitě soustavy rovnic a vztahů.

2.10. Pro konkrétní modelování se musí specifikovat funkcionály F_t , G_t : postačí zvolit poměrně jednoduchý tvar, při němž $\alpha(t) = f(S(t))$, $\beta(t) = g(S(t))$, kde f , g jsou klesající funkce, $S(t)$ je vhodná lineární kombinace doby, po níž je relé ve stavu 0, a doby, po níž je ve stavu 1.

Pokud jde o řídicí průběh $z(t)$, pojímá se jako realizace jistého stochastického procesu, tj. stejně jako u modelu popsáného v I 3.

Příklad dynamického relé tohoto typu je znázorněn na obr. 2.

2.11. Utvoříme-li nyní soubor takových dynamických relé způsobem zcela obdobným tomu, který jsme popsali v II 1.9 pro statická hysterezní relé, dostáváme modelující systém, přičemž rozsah poškození axonů (veličina s v II 2.2) je nyní vyjádřen počtem, resp. celkovou „váhou“ těch relé, která jsou ve stavu 0.



Obr. 2. Nahoře je znázorněn průběh veličiny z a průběhy $\beta(t) = \beta(0) - S(t)$, $\alpha(t) = \alpha(0) - S(t)$. Dole je průběh $s(t)$.

2.12. Od modelového schématu, v němž vystupuje soubor dynamických hysterezních relé, se při konkrétním uplatnění modelu přechází k souboru automatů; popis toho, jak a proč lze dynamické relé nahradit vhodným automatem (v běžném matematickém smyslu), zde vynecháváme.

Učiní-li se ještě některé zjednodušující předpoklady a zvolí-li se účelně stochastický proces, dostanou se snadno na počítači rozmanité průběhy, jež jsou kvalitativně v uspokojivé shodě s reálnými průběhy (sestavěnými způsobem, jež jsme popisovali v I 3).

2.13. To, že model dává uspokojivou imitaci skutečných křivek průběhu, je zde podstatné potud, že tím (a obdobnými výsledky zmíněnými v II 2) je prokázána přiměřenost obou modelů, i když zatím jen částečně. Máme tedy příklad situace, kdy určitý druh reálných dějů má jak model opřený o pojmy (ostatně dosti elementární) teorie katastrof, tak i hysterezní model, a oba modely jsou více méně rovnocenné, ač matematicky i způsobem modelování jsou zcela odlišné.

Dodejme ještě, že v našem případě jsou, jak se zdá, oba typy modelů ekvivalentní v tom smyslu, že každý konkrétní „katastrofický“ model se dá sám modelovat vhodným hysterezním modelem a obráceně. Intuitivně je dosti jasné, že za určitých omezujících předpokladů to tak musí být. Formulování příslušné dostatečně obecné matematické věty však není banálním úkolem, a její důkaz by možná také nebyl právě triviální.

3.

3.1. Aplikace teorie katastrof v různých vědních oborech, od fyziky až po sociologii, jsou již dosti četné, viz např. [4], [5]. Je však kolem nich dosti nedorozumění a někdy také vyvolávají dosti ostrou kritiku; viz např. článek [6], jenž je sice na řadě míst

problematický, ale byl jistě užitečný tím, že výrazně upozornil na některé slabiny. Je proto nutný stručný rozbor některých rysů konkrétních aplikací opřených o teorii katastrof. Předěšleme mu několik úvah o širším přínosu metody katastrof. Přitom v celém výkladu ponecháváme stranou fyzikální a podobné aplikace, o nichž by se vlastně mělo mluvit v samostatném článku, a budeme v podstatě mluvit jen o aplikacích v biologických a příbuzných oborech. K ilustraci používáme skoro výhradně modelu z I 3, II 2; byly by na místě další ilustrace, ale pak by byl nutný rozsáhlý výklad jejich věcné podstaty.

3.2. V pracích R. THOMA, zejména v monografii [7], se metodě katastrof (viz I 1.1) a spjatému s ní celkovému přístupu příkládá mimořádně široký a pronikavý význam; chápe se jako velmi obecná zásadní metodologická koncepce. Tím se zde nebudeme zabývat; zaměříme se na jednotlivé stránky konceptuálního významu metody katastrof (odst. II 3.3–3.5) a pak na některé rysy jejího konkrétního uplatňování.

3.3. Matematická disciplína má jistě aplikační význam, jakmile umožňuje vyjádření nebo lepší vystižení platných zákonitostí reálných jevů a dějů, popř. umožňuje nebo zpřesňuje predikci; vystižení i predikce mohou přitom mít kvalitativní povahu. Domníváme se, že je vhodné ještě širší pojetí: aplikační význam je dán již tehdy, když matematické prostředky umožňují nový pohled na jevy a hlubší vhléd do souvislostí, poskytují nové možnosti vytváření hypotéz, vyzvedají důležité strukturální rysy a umožňují jejich lepší chápání.

3.4. Popíšeme přínos metody katastrof po stránce, kterou jsme teď uvedli a kterou stručně nazveme konceptuální. Omezíme se na některé rysy, jež uvádíme bez pořadí důležitosti.

Metoda katastrof zdůraznila význam stability (viz I 1.5) při matematickém vyjadřování reálných dějů. Zároveň zdůraznila zkoumání vzniku a vývoje tvarů a možnost jeho vyjádření na bázi kontinuálních změn. Příklad, byť matematicky dosti banální, máme v modelu z I 3, pokud jde o přechod z remitentního do chronicko-progresivního stadia; méně triviální, avšak zatím spekulativní příklad máme v II 2.7, kde však nejde o časovou změnu, ale o různé formy vyskytující se v populaci.

Metoda katastrof dává nové možnosti matematického vystižení dat, která jsou nepřesná a poněkud neurčitá anebo podle své povahy udávají jen odstupňování (pořadí); takovou povahu má v našem případě stupnice zmíněná v I 3.1.

Jak jsme již uvedli v I 1.8, je metoda katastrof účinným prostředkem, byť jistě ne jediným, pro vystižení kvalitativních, náhlých, popř. nespojitých změn v sepětí se změnami kvalitativními, povlovnými, spojitými. Je třeba dodat (neboť v těchto otázkách někdy dochází k nedorozumění), že v oblastech, v nichž se dá uplatnit metoda katastrof, je často setřen rozdíl mezi náhlou, rychlou, ale spojitou změnou a změnou „skokem“. To je často způsobeno přítomností blíže neurčených fluktuací; po matematické stránce je „rovnocennost“ skoků a rychlých spojitých změn podložena větami Tichonovova typu (týkajícími se konvergence řešení ve smyslu popsáném v I 2.1).

Důležitá je též skutečnost, že metoda katastrof přispívá k vystižení té důležité okolnosti, že u biologických soustav se často v jednom systému vyskytují děje, jež mají

podstatně různou rychlost, přičemž tato „hierarchie“ dějů má podstatný věcný význam; viz k tomu poznámky o pomalé a rychlé dynamice v I 2.4 a situaci u roztroušené sklerózy, kde máme (při atakách a remisích a zejména v některých případech léčby) rychlou změnu veličiny s , zatímco změny veličiny p jsou vždy podstatně pomalejší (viz I 3.4).

Poznamenejme ještě, že pozoruhodným rysem metody katastrof je úloha geometrie (v širokém smyslu) a geometrické intuice. U katastrof vyššího typu překračuje ovšem meze přímé názornosti; není vyloučeno, že lepší intuitivní zvládnutí těchto katastrof by rozšířilo možnosti jejich aplikací.

3.5. Udat striktní pravidla pro aplikaci teorie katastrof není ovšem možné, i když lze uvést dílčí heuristické pokyny, viz např. [8]. Zde uvedeme jen schéma nejběžnějšího postupu při vytváření modelu na základě elementární teorie katastrof.

3.6. Nejdříve se uváží celková vhodnost metody katastrof ve zkoumané situaci. Je-li plausibilní, neplyne z toho ještě vhodnost použití tzv. elementární teorie katastrof. Fakticky se však zatím takto postupuje v naprosté většině případů. Teorie negradientových soustav polí (viz I 1.9) je totiž zatím rozvinuta mnohem méně. Dá se však očekávat, že zkoumání negradientového případu bude jedním z hlavních směrů dalšího vývoje teorie katastrof.

3.7. Akceptuje-li se použití elementární teorie katastrof, pak se podle celkové povahy dějů, souhry rychlých a pomalých změn atd. utvoří hypotéza o možných typech katastrofických bodů; v našem případě roztroušené sklerózy se prakticky jednoznačně rýsoval typ „cusp“ (viz např. [9]), tj. typ daný soustavou polí $ds/dt = H_0(p, z, s) = -s^3 + ps + z$. Pak se obvykle přejde – což znamená, že zavádíme další hypotézu – k systému s jediným katastrofickým bodem předpokládaného typu; vyskytují se ovšem také modely s několika katastrofickými body.

Poznamenejme, že v aplikacích se nejvíce uplatňuje „cusp“; je znám již velmi dlouho, ovšem bez explicitního zdůraznění a zařazení do souvislosti. Proto při jeho použití je přínos teorie katastrof spíše konceptuální a heuristický než bezprostředně matematický.

Zmíněný přechod k systému s jediným katastrofickým bodem má ovšem zpravidla ryze heuristický charakter a nemusí být vždy přiměřený. Systémy s mnoha katastrofickými body jsou ovšem složitější a příslušná teorie, která by měla „globální“ charakter, zatím neexistuje, jak se zdá, ani v hrubých rysech.

3.8. Systém (s jediným katastrofickým bodem) se nejčastěji vezme nejdříve v „kanonickém“ tvaru, tedy v našem případě např. ve tvaru $ds/dt = H_0(p, z, s)$. Často je pak třeba hledat vhodnou difeomorfní transformaci a přihlížet k tomu, aby nové proměnné měly přiměřenou věcnou interpretaci (v našem případě to zatím v podstatě odpadá: proměnným z, s se dal dosti jasný smysl a pracovalo se přímo s nimi). Podaří-li se to provést, máme náčrtek modelu, modelové schéma. Někdy tím postup končí; náčrtek může být – pokud je v souladu s platnými poznatky aplikačního oboru – přínosem po konceptuální stránce, o které jsme mluvili na konci odst. II 3.3, někdy však je tak vágní anebo způsob konfrontace s empirickými zjištěními je tak nejasný, že se z náčrtku stává povrchní ilustrace.

3.9. Jindy postup pokračuje a hledá se vhodná autonomní nebo heteronomní dynamika (viz I 2.4, I 2.5, I 3.7) nebo jiný způsob konkretizace. Při tomto postupu (příkladem je též hledání rovnic pro šíření nervového vzruchu, viz [10]) se často musí využívat dosti hlubokých poznatků příslušného oboru, používat dosti náročných nebo pracných matematických postupů a leckdy pracovat metodou zkoušek a omylů.

Konkretizace schématu bývá zpočátku jen částečná: na parametry se položí určité požadavky; u nás se týkaly např. stochastického procesu – viz I 3.4. Již po částečné konkretizaci lze někdy získat závěry porovnatelné s konkrétními empirickými zjištěními; v našem případě by šlo o narůstání frekvence atak (viz I 3.5).

Úplná konkretizace, tedy udání hodnot všech parametrů, je ovšem nezbytná, chceme-li získat zcela konkrétní údaje, v našem případě křivky imitující reálné průběhy (srv. II 3.4); na přesné volbě hodnot však přitom příliš nezáleží. Tato volnost je dosti typická pro konkrétní aplikace teorie katastrof a bývá v souladu s obdobnou povahou empirických dat.

3.10. Uvedeným postupem se nakonec může — ale nemusí — dojít ke konkrétnímu modelu, jenž je v uspokojivé shodě se skutečností. Pak přijde na řadu jeho využití pro predikci, vytváření hypotéz atd. (viz II 3.3).

Někdy se také může ukázat účelným přechod k modelu jiného druhu (v našem případě hystereznímu), který je po nějaké stránce vhodnější; to však zde nebudeme rozebírat.

3.11. Skutečný postup může být jiný a uvedené kroky se mohou prolínat. Postup má však vždy výrazně heuristický charakter, a teorie katastrof poskytuje jen celkový rámec, jehož „vyplnění“ není vůbec rutinní záležitostí.

3.12. Na závěr bychom měli zodpovědět základní otázku, jaký je nebo může být přínos metody katastrof; otázku zde zúžíme na biologické a příbuzné obory. Aplikace matematiky v těchto oborech jsou vlastně ještě v počátcích a účinné specifické metody se teprve hledají. Zdá se, že jednou z nich by mohla být metoda katastrof; nasvědčují tomu četné okolnosti, které jsme uvedli. To však je pouze domněnka; její správnost by byla vítána, ale nelze říci, že by byla již prokázána.

Za prokázaný lze považovat jen širší konceptuální význam, totiž to, že teorie katastrof může napomáhat pochopení věcné problematiky. Konkrétních aplikací propracovaných až k plnému ověření je však ještě příliš málo na to, aby byly spolehlivým dokladem. Ptáme-li se však, zda je účelné snažit se aplikovat teorii katastrof, pak lze i po zvážení všech nedostatků dát kladnou odpověď. Tyto aplikace jsou účelné, i když stále jako jistý experiment. Praxe tohoto experimentování dá pak odpověď na otázku po rozsahu přínosu metody katastrof.

Literatura

- [1] KATÉTOV, M., JEDLIČKA, P.: *Teorie katastrof: souvislosti a aplikace I*. PMFA 24 (1979), 1—20.
- [2] KALMAN, R. E., FALB, P. L., ARBIB, M. A.: *Topics in mathematical system theory*. Mc Graw-Hill, New York 1969.

- [3] KRASNOSELSKIJ, M. A., POKROVSKIJ, A. V.: *Operatory gisterezisnych nelinejnostej*. Ve sborníku *Teoriya operatorov v funkcionalnych prostranstvach*, Nauka, Novosibirsk 1977.
- [4] ZEEMAN, E. C.: *Catastrophe theory: selected papers (1972—1977)*. Addison—Wesley 1977.
- [5] POSTON, T., STEWART, I. N.: *Catastrophe theory and its applications*. London and San Francisco, Pitman 1978.
- [6] SUSSMAN, H., ZAHLER, R.: *Catastrophe theory as applied to the social and biological sciences: a critique*. *Synthese* 37 (1978), 117—216.
- [7] THOM, R.: *Stabilité structurelle et morphogénèse*. W. A. Benjamin, Reading, Mass. 1972.
- [8] ZEEMAN, E. C.: *Levels of structure in catastrophe theory illustrated by applications in the social and biological sciences*. Proc. Int. Congr. Math., Vancouver 1974, vol. 2, pp. 533—546; Canad. Math. Congr., Montreal 1975.
- [9] KOWALSKI, O.: *Thomova věta o sedmi elementárních katastrofách*. *PMFA* 22 (1977), 302—316.
- [10] ZEEMAN, E. C.: *Differential equations for the heartbeat and nerve impulse*. Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. of Bahia, Salvador 1971), pp. 683—741. Academic Press, New York, 1973.

Americká matematika od roku 1940 do předvčerejška*)

(Dokončení)

J. H. Ewing, W. H. Gustafson, P. R. Halmos,

S. H. Moolgavkar, W. H. Wheeler, W. P. Ziemer

Lieovy grupy. Již jsme řekli dost o algebře a o jejím spojení s geometrií. Tato část, která spojuje algebru s topologií, už leží na cestě k pozdějším analytickým tématům. Výsledek, který zde uvedeme, podobně jako několik jiných vynikajících matematických výsledků, budí dojem, že jsme získali něco z ničeho nebo přinejmenším, že jsme získali mnoho za neuvěřitelně nízkou cenu. Jeden z neznámějších výsledků tohoto druhu se vyskytuje

*) Dokončení překladu článku *American Mathematics from 1940 to the Day before Yesterday*, *American Mathematical Monthly* 83 (1976) No. 7, pp. 503—516. První část překladu byla otištěna v minulém čísle.