František Kuřina

O jazycích školské matematiky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 31 (1986), No. 5, 277--281

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/138960`

vyučování

O JAZYCÍCH ŠKOLSKÉ MATEMATIKY

František Kuřina, Hradec Králové

Ve 4. čísle XXIX. ročníku Pokroků uveřejnil J. Šedivý úvahu prof. Griffithse o problému tří jazyků ve vyučování matematice. Jazyk matematiky a hovorový jazyk se považují za břehy řeky, zatímco jazyk učitele matematiky má plnit úlohu mostu mezi nimi.

Jazyk žáků a jazyk učebnic

Bezprostředním podnětem k napsání této poznámky byla knížka V. Richtra, *Žákovské perličky* (Melantrich, 1984), v níž jsem našel pěkné doklady toho, jak žáci základní školy „plavou" v oné jazykové řece, o níž jsem se zmínil výše. Ocitujme nejdříve z Richtrovy knihy několik ukázek.

- Jedna a jedna je někdy dvě a někdy jedenáct.
- Číslo nula je nula tehdy, když nic nestojí před ní ani za ní.
- Polovina třetiny je v matematice jedna šestina a v hokeji 10 minut.
- Každé město má více čtvrtí než čtyři.
- Abychom mohli sestrojit pravoúhlý trojúhelník, potřebujeme tři prvky: pravítko, kružítko a křídu.
- Lichoběžník je čtverec, který má všechny strany jinak dlouhé.

  Jedna polovina z pěti je dvě a druhá tři.
- Válec má tvar nafouklého obdélníku.

Na ukázkách je vidět, že žáci běžně uvažují v různých oblastech zároveň (sport a matematika, matematika a jazyk matematiky) a s jazykem zacházejí velmi volně. Mají rovněž smysl pro realitu, k níž autoři matematických úloh přistupují někdy příliš akademicky:

„Když čtyři družstevníci pokosí louku za osm hodin, tak osm brigádníků už kosit nemusí, protože není co."

Někdy projeví žáci i smysl pro formální zacházení s jazykem:

„Rovnice je ženský rod od rovníku."

Autor perličky „Algebra je pro mne cizí řeč" vystihl velmi dobře situaci, která při vyučování matematice často nastává. Žáci si skutečně postupně osvojují algebru jako nový jazyk, který se zpočátku vyskytuje především ve vzorcích. Aby mohl žák překládat do symbolického zápisu a manipulovat s výrazy, aby se naučil algebraickému kalkulu, potřebuje nutně i „jazyk kolem vzorců". Jen tak se pro něho algebra postupně stává účinným nástrojem pro řešení úloh.

Svébytnou jazykovou kategorií je, zdá se, jazyk učebnic matematiky. Dosti často to není jazyk matematiky, ale není to ani jazyk, který by byl žákům dobře srozumitelný.

Uveďme v této souvislosti aspoň dvě ukázky z učebnic pro třetí a pátý ročník naší základní školy:

»Násobky čísla 100 sečteme tak, že součet počtu set násobíme stem.«

»Velikost násobku každého úhlu, určeného polopřímkami úhloměru, se rovná témuž násobku jeho velikostí.«

Vyjadřování žáků je spontánní a přirozené. Přirozený by měl být i jazyk školních učebnic. Jazyk teorie množin k zjednodušení jazyka školské matematiky na naší škole nepřispívá dosud dosti účinně. Již samo zavedení množinového vyjadřování je těžkopádné, jak lze doložit např. těmito ukázkami z učebnic pro čtvrtý a pátý ročník:

»$L = \{$jedle, šípek, javor, smrk, borovice, maliník, ostružiník, lípa, bříza, kaštan, dub, borůvčí, zajíc$\}$. Zapište množinu všech listnatých nebo jehličnatých stromů množiny L.«

»Doplňte za proměnou y ve větě: „y je přítokem Labe“ z množiny řek oboru proměnné y, $y \in \{$Úpa, Metuje, Orlice, Dunaj, Volha, Loučná, Don, Chrudimka, Váh, Vltava, Ohře$\}$ tak, aby věta byla pravdivá.«

Matematika by měla rozvíjet v žácích smysl pro přesnost. Tomu patrně nepřispívají např. takovéto formulace (6. ročník ZŠ):

»Jakou částí stokoruny je (zapište zlomkem):

a) 1 padesátikoruna	d) 3 pětikoruny
b) 1 koruna	e) 12 dvoukorun
c) 2 desetikoruny	f) 2 padesátikoruny«

»Zobecněním vztahu $č = 600\, p$ dostaneme vzorec $č = z\, .\, p$, kde $č$ je část základu odpovídající danému počtu procent, z je základ a p je počet procent odpovídající dané části vyjádřený desetinným číslem.«

Zde si lze domyslet pouze z kontextu a z příkladů, které výklad doprovázejí, že p je setina počtu procent.

Syntaxe a sémantika

Vzhledem k tomu, že při práci s abstraktními matematickými pojmy pracuje žák často se symboly, vyvstává při studiu jazyka matematiky otázka vztahu mezi označením pojmu a pojmem samotným. Na prvním stupni základní školy se to projeví vztahem mezi číslem a jeho zápisem a obvykle to tam nečiní potíže, neboť jde nejčastěji o prosté zobrazení množiny čísel a množiny symbolů používaných k jejich zápisu. Žáky tak vedeme ke globálnímu pohledu, při němž je označení pojmu jeho součástí.

Od pátého ročníku je u nás zaváděn z didaktických důvodů obor desetinných čísel jako část oboru čísel racionálních. Zpracování této kapitoly v učebnici může vést u žáků k nesprávným představám, že desetinným číslem je jakékoliv číslo, v jehož zápisu se vyskytuje desetinná čárka, tedy že je tento pojem zaveden syntakticky. Pak by ovšem např. 0,5 bylo číslo desetinné, ale $1/2$ by bylo racionální číslo, které desetinným číslem není. Žák šestého ročníku sice pochopí, že naše zelené zlato není zlato, není však zvyklý na takováto metaforická vyjádření v matematice a bude považovat (dokonce možná i jeho učitel tomu podlehne) desetinná čísla periodická (jak jsou zavedena v učebnici *Matematika* 6, 1 na str. 150) za čísla desetinná. Pak by ovšem obor čísel racionálních splýval s oborem čísel desetinných.

Zdá se, že zlomek je vykládán spíše syntakticky, racionální číslo obsahově, sémanticky; rovnost zlomků je ovšem definována opět z hlediska obsahového. Vedeme žáky k tomu, že při výčtu prvků „musí být každý prvek zapsán právě jednou a právě jedním symbolem“, ale v šestém ročníku (*Matematika* 6, 1, str. 102) si dovolíme takovouto „vědu“:

»Kterýkoliv zlomek z množiny všech sobě rovných zlomků $\{1/2, 2/4, 5/10, 10/20, 3/6 \ldots\}$ vyjadřuje totéž racionální číslo.«

Tendence k zdůrazňování syntaktického přístupu k matematickým pojmům se dosti výrazně projevuje v učebnicích základní školy od 6. ročníku např. v zavedení pojmu výraz (*Matematika 6, 1*, str. 193).

»1. Výrazem nazveme každou proměnnou, každé racionální číslo, jeho absolutní hodnotu.

2. Z těchto výrazů utvoříme nový výraz, použijeme-li znaku početní operace, popř. absolutní hodnoty.«

Podle mého názoru by zde mělo být jasně řečeno, že výraz je prvkem matematického jazyka, tedy označením určitého matematického objektu, např. zápisem čísla, ne číslem. Vzhledem k tomu, že na základní škole se již dále uvedené vymezení pojmu výraz nerozvíjí, je i pro její potřeby úzké, neboť nezahrnuje např. výraz sin x.

V nové učebnici matematiky pro 1. ročník gymnázia (1. vydání z r. 1984) zavádějí autoři pojem rovnice syntakticky (str. 31):

»Rovnice je zápis rovnosti dvou výrazů, v němž je třeba určit hodnotu proměnné z daného číselného oboru tak, abychom po dosazení vypočítané hodnoty za proměnnou dostali pravdivý výrok.«

Autoři se tedy zabývají rovnicemi pouze jako úlohami k řešení a nepřipravují ani vyjádření „funkce daná rovnicí", kterého se používá ve 2. ročníku, ani vyjádření „rovnice geometrického útvaru", který se patrně bude vyskytovat v analytické geometrii. Z tohoto hlediska se mi jeví vhodnější klasické vymezení pojmu rovnice, které uvádí např. prof. K. Hruša:

»Rovnice o neznámé x je úloha určit všechna x z určité množiny, pro něž se dva výrazy $l(x)$ a $p(x)$ rovnají.«

Zavádění pojmů

Problematika zavádění nových pojmů, jíž jsme věnovali pozornost v předcházejícím odstavci, je vážnou didaktickou otázkou, která souvisí s jazykem školské matematiky.

Celkový současný trend didaktiky matematiky – zpřesňovat matematické vyjadřování a definovat pokud možno všechny studované pojmy – je nutno považovat za pozitivní rys. Z druhé strany je však třeba si uvědomit, že žák, zvláště žák základní školy, si osvojuje pojmy činností, řešením úloh, vyjadřováním, aplikacemi atp. Definice každého pojmu by měla být náležitě připravena a měla by být výsledkem, relativním vyvrcholením poznávacího procesu. Přesně formulovaná definice pojmu nemusí znamenat jednoznačně kladný didaktický přínos. Definice mohou hrát více méně formální roli, neboť žák může fakticky pracovat s pojmy, které si vytváří sám jinak. V praxi vyučování může práce s definicemi dokonce i škodit, zaměří-li se učitelé na jejich nácvik bez hlubšího porozumění ze strany žáků.

Na rozdíl od víceméně formálního zavedení pojmu výraz v učebnici pro 6. ročník, o němž jsme se již zmínili, můžeme uvést pěkný přístup k témuž pojmu v učebnici matematiky pro 1. ročník gymnázia (1. vydání z r. 1977).

Po řadě ilustračních příkladů a úloh následuje tato výstižná formulace (str. 119):

»Výrazem budeme rozumět každý zápis, který je správně utvořen podle úmluv o zápisech čísel, proměnných, výsledků operací a hodnot funkcí.«

Pak následují další příklady, formuluje se definice rovnosti dvou výrazů a zavádí se další operace s nimi.

Při formulaci definic matematických pojmů bychom se měli snažit soustředit se spíše na popis postupu vytváření pojmu než na popis formálního výsledku poznávacího procesu.

Nepovažuji tedy za vhodné např. tyto formulace:

»Přímá úměrnost je množina všech takových uspořádaných dvojic $[x, y]$, že $y = kx$, kde k je pro všechna x stále stejné číslo.« (*Matematika 7, 1*, str. 150).

»Posunutí v rovině je množina všech souhlasně uspořádaných dvojic bodů v rovině určujících úsečky téže délky.« (*Matematika 7, 1*, str. 76).

Námitka, že bez „množinových" definic uvedených pojmů nelze budovat moderní školskou matematiku, neobstojí. Vždyť např. akademik Jarník vystačil pro univerzitní kurs matematické analýzy s touto definicí:

»Budiž M nějaká množina reálných čísel. Jestliže každému x množiny M je přiřazeno určité číslo y, říkáme, že y je funkcí x. Grafem funkce $f(x)$ je množina všech bodů v rovině, jež mají tvar $[x, f(x)]$, kdež $x \in M$.« (V. Jarník: *Úvod do počtu diferenciálního*, str. 162).

Symbolika

Ožehavou otázkou vyučování matematice je symbolika. Ta by měla zjednodušovat vyjadřování a tím přispívat k porozumění matematickým pojmům.

Výrazným nedostatkem současné symboliky našich učebnic je její složitost a „jemnost". Obojí je z hlediska provozu školy nevýhodné. Má-li učitel dosáhnout toho, aby žáci užívali správně např. geometrickou symboliku, musí jejímu nácviku věnovat takovou péči a úsilí, které nejsou úměrné výsledkům.

Uveďme aspoň dva příklady:

»Zápis $\mathcal{S}(S)\colon \mapsto MA \to \mapsto NP$ (*Matematika 7, 1*, str. 81) znamená: ve středové souměrnosti se středem S je obrazem polopřímky MA polopřímka NP.«

»Jsou dány body $O[0, 0]$, $O'[a, b]$. Zápis

$$P[O, O'] : X[x, y] \to X'[x + a, y + b]$$

znamená: posunutí P, které převádí bod O do bodu O', zobrazuje bod X na bod X'.« (*Matematika 8, 1*, str. 49).

Přitom typ šipky zavedený pro označení polopřímky v 7. ročníku se v osmém ročníku používá při zápisu funkce:

$$x \mapsto -2x^2 + 3x + 1.$$

Snaha po „čistotě" jazyka školské matematiky silně přispěla ke komplikacím ve vyjadřování velikostí geometrických útvarů.

Aplikovat Pythagorovu větu ve tvaru $[d(MU)]^2 = [d(SM)]^2 - [d(SU)]^2$ (*Matematika 7, 2*, str. 15) je velmi těžkopádné.

Na základě doporučení terminologického semináře JČSMF z května 1985 lze očekávat, že se tato symbolika zjednoduší. Zejména je přijatý jako závazný symbol $|AB|$ pro délku úsečky místo dosavadního $d(AB)$.

Podle mého názoru bychom měli být velkorysí a vrátit se v symbolice k tomu, že nebudeme rozlišovat úsečku a její délku a úhel a jeho velikost. Považuji tedy za přípustné např. zápisy $AB = 3$ cm, $\sphericalangle AVB = 30°$. Jsem přesvědčen, že to v praxi nepovede k omylům a vyučování to prospěje, neboť to zjednoduší vyjadřování. Množina úseček a množina jejich délek jsou sice disjunktní, ale vzhledem k morfismu mezi grafickým sčítáním úseček a sčítáním jejich délek bychom si takovýto ústupek preciznosti mohli dovolit.

Svým příspěvkem chci upozornit na některé otázky matematického vyjadřování v době, kdy se upravují některé učebnice matematiky pro naše školy a píší učebnice nové.

Omlouvám se, že jsem někde vytrhl části z kontextu učebnic a citoval jsem i z materiálů, které se už nepoužívají. Vím, že autoři příslušných partií museli respektovat již dříve přijaté konvence a neměli často možnost formulovat věci lépe. Na citovaná místa upozorňuji, abych jimi konkrétně doložil, že je možné a potřebné zlepšit jazyk našich učebnic matematiky.

Článek chápu jako podnět k diskusi. Byl bych rád, kdyby se učitelé všech škol, ale i profesionální matematici, zamýšleli nad otázkami vyjadřování v matematice, a to nad jazykem žáků, nad jazykem učitelů i nad jazykem učebnic. Poučný by byl patrně i rozbor jazyka vysokoškolských učebnic a skript.

K VYTVÁŘENÍ PERSPEKTIVNÍ KONCEPCE FYZIKÁLNÍHO VZDĚLÁNÍ NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

J. Vachek - L. Pekárek - Z. Kluiber, Praha

Základní výzkum v oblasti fyzikálního vzdělávání se v této pětiletce realizuje v rámci dílčího úkolu státního plánu základního výzkumu *VIII-6-6/3 „Moderní matematicko-přírodovědné vzdělání a podmínky jeho účinného výchovného působení“*. Řešitelským pracovištěm celého tohoto úkolu je matematicko-fyzikální fakulta UK Praha, za řešení problematiky v oblasti fyzikálního vzdělávání odpovídá Kabinet pro výzkum vzdělávání ve fyzice Fyzikálního ústavu ČSAV. Řešitelskou radou stěžejního směru bylo stanoveno, aby do konce r. 1983 byla zpracována teoreticko-analytická studie, která by vytyčila perspektivní koncepci vnitřně integrovaného matematicko-přírodovědného vzdělání.

Na přípravě podkladových materiálů a na zpracování studie se podílel široký kolektiv řešitelů (téměř 150 pracovníků z oblasti matematicko-přírodovědného vzdělávání). Hlavní metodou práce byla analýza rozsáhlého materiálu, komparace a rozbor učebních osnov i učebnic a konečně zobecnění získaných výsledků.

Teoreticko-analytická studie [1] má pět kapitol. První kapitola formuluje pojem a obsah koordinovaného matematicko-přírodovědného didaktického systému a podmínky pro jeho realizaci. Druhá kapitola obsahuje shrnutí zkušeností z realizace experimentálních učebních osnov a učebnic vypracovaných podle dílčího projektu dokumentu; další rozvoj československé výchovně vzdělávací soustavy z r. 1976. Třetí kapitola podává přehled o vzdělávání v matematice a přírodovědných předmětech v socialistických státech. Čtvrtá kapitola je věnována problematice přírodovědného obrazu světa a pátá kapitola stanovení výchovně vzdělávacích cílů a obsahu výuky perspektivního matematicko-přírodovědného vzdělání. Závěr studie shrnuje výsledky a hlediska vytváření socialistického vědomí mládeže a formuluje návrhy dalšího postupu práce.

Jeden ze základních přístupů pro tvorbu perspektivního koordinovaného matematicko-přírodovědného didaktického systému vychází ze specifického postavení