

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Jiří Komrška

Proč Fourierova transformace dobře popisuje Fraunhoferovu difrakci

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 29 (1984), No. 6, 321--338

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/138849>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1984

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

K-teorii. Zájemce o souvislosti teorie rozšíření  $C^*$ -algeber s algebraickou topologií (Bottova periodičita, věty o indexu, vyšší signatury atd.) je nutno odkázat na časopiseckou literaturu druhé poloviny sedmdesátých let.

Vraťme se ještě ke klasifikaci esenciálně normálních operátorů. Nechť  $X \subset \mathbb{C}$  je kompaktní množina. Potom homomorfismus  $\gamma_X: \text{Ext}(X) \rightarrow \text{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$  (viz předchozí odstavec) je izomorfismem. Homomorfismus  $\gamma_X$  lze názorně definovat takto ([ ] značí třídu ekvivalence v  $\text{Ext}(X)$  nebo homotopickou třídu v  $\pi^1(X)$ ): je-li  $(\mathcal{E}, \varphi)$  rozšíření  $\mathcal{X}$  pomocí  $\mathcal{E}(X), f: X \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  spojitá funkce a  $A \in \varphi^{-1}(f)$ , potom

$$\gamma_X([\mathcal{E}, \varphi]) [f] = \text{index}(A).$$

První kohomotopická grupa  $\pi^1(X)$  je volná komutativní grupa, jejíž počet generátorů je roven počtu omezených komponent množiny  $\mathbb{C} \setminus X$ . Odtud je již snadno vidět, co to znamená pro rozšíření  $(\mathcal{E}_T, \varphi_T)$ , kde  $T$  je esenciálně normální operátor: obrazem třídy  $[(\mathcal{E}_T, \varphi_T)]$  při homomorfismu  $\gamma_X$  (kde ovšem  $X = \sigma_e(T)$ ) je indexová funkce operátoru  $T$ . Tim je věta BDF dokázána. Zde je nutno zdůraznit, že nejobtížnější tvrzení v důkazu jsme pouze konstatovali, ale nedokázali; omezili jsme se jen na hlavní myšlenku důkazu.

Přestože Halmos je optimista, pokud jde o zjednodušení důkazu věty BDF, jistě skutečnosti naznačují, že se asi nepodaří podat „čistě operátorový“ důkaz ani důsledku věty BDF, totiž uzavřenosti množiny  $\mathcal{N} + \mathcal{X}$ .

*(Viz ještě dodatek v Příloze, str. 24. Pozn. red.)*

## Proč Fourierova transformace dobře popisuje Fraunhoferovu difrakci\*)

*Jiří Komrská, Brno*

*Matematická teorie Fourierova integrálu a Fourierovy transformace v  $E_N$  má nepřeberné množství aplikací ve fyzice a technice. V  $E_1$  prokazuje neocenitelné služby elektrotechnice, zejména teorii zpracování signálu. Dvojměrné aplikace Fourierova integrálu se zasloužily o renesanci optiky, především v teorii tvorby a zpracování obrazu. Doménou aplikací trojrozměrné Fourierovy transformace je analýza struktury krystalů. Zásah této matematické disciplíny do fyzikálních a technických oborů byl tak plodný, že způsobil jejich přestavbu a vyvolal vznik nových odvětví. Výrazem toho je adjektivum fourierovský v názvech oborů, s nimiž ovšem prefekt Fourier*

---

\*) První část přednášky proslovené 21. 4. 1983 na jarní škole „Image processing and computer simulation in electron microscopy“, kterou pořádal IFE der AdW der DDR, Halle/Saale 18.–24. 4. 1983. Obrázky dodal autor.

nemohl mít nic společného. Příkladem je fourierovská optika. Někdy však dochází ke zbytečnému přejmenování — např. když se Fraunhoferova difrakce nazývá Fourierovou difrakcí. To už indikuje nebezpečí, že formalismus popisu zastiňuje podstatu jevů.

Specialisté příslušných oborů chtivě vyhlízejí každou novinku z oblasti numerických výpočtů s nadějí, že jim umožní zvládnout jejich stále složitější problémy. Proti svému vlastnímu oboru však hřeší aspoň ve dvou směrech: Na jedné straně přijímají za zaručené, že aparát Fourierovy transformace dokonale popisuje děje, jimiž se zabývají, zaměřují objekty a děje jejich fourierovským popisem a nestarají se o meze použitelnosti fourierovského formalismu. Na druhé straně však zase jako by nebrali na vědomí, že teorie Fourierovy transformace je rozvinutou matematickou disciplínou, neboť jí nevyužívají k přehledu obecných vlastností objektů a jevů, které studují.

Tato přednáška je dosti učiněním v pokání specialisty na Fraunhoferovu difrakci. Podrobně vymezuje podmínky, za nichž Fourierova transformace přesně charakterizuje Fraunhoferovu difrakci.

## 1. Úvod

Teorie difrakčních jevů vychází už od dob Fresnelových — tedy od první úspěšné kvantitativní interpretace — z Huygensova-Fresnelova principu. Toto pojetí zdomácnělo v literatuře zejména poté, co Kirchhoff odvodil difrakční integrál vyjadřující Huygensův-Fresnelův princip z vlnové rovnice. I když z matematického hlediska odvození bylo (a zůstalo) heuristické, jeho praktický význam je nesmírný. Je východiskem většiny jiných přístupů k difrakci (např. Youngovy-Rubinowiczovy okrajové vlny), hlavně a především však dává — aspoň v rámci tzv. optické difrakce — dokonalý souhlas teorie s experimentem. Je proto pochopitelné, že se v literatuře 20. století setkáváme se zřejmou snahou jednotně interpretovat všechny difrakční jevy právě z tohoto hlediska.

Nepřekonatelné — i když nepřiznávané — potíže se objevují, snažíme-li se takto interpretovat Fraunhoferovy difrakční jevy. Sekundární vlny v Huygensově-Fresnelově principu jsou totiž neodvolatelně kulové. Proto difrakční integrál vyjadřující Huygensův-Fresnelův princip má ve jmenovateli integrandu vzdálenost bodu pozorování od difrakčního stínítka. V případě Fraunhoferovy difrakce je ovšem tato vzdálenost nekonečná a příslušný limitní přechod difrakční integrál anulují. Kupodivu to uniká pozornosti autorů i velmi dobrých monografií a učebnic [1 až 4], kteří takto získávají z difrakčního integrálu vyjadřujícího Huygensův-Fresnelův princip Fourierův integrál. (Pouze výjimečně [5] zastírají anulování celého integrálu použitím Rayleighovy-Parsevalovy věty, tj. úvahou o toku prošlé energie.) Obdivuhodně dokonalý souhlas výpočtů s experimentem (viz např. obr. 1) pravděpodobně chrání takové odvození před odmítavou kritikou.

Holografie vnáší do teorie vlnění mnoho netradičního. Teorii difrakce ovlivňuje tím, že do ní zavádí přístup, který bychom mohli nazvat rozkladem do rovinných vln, neboť vlnění za difrakčním stínítkem vyjadřuje superpozici rovinných vln o vhodné amplitudě

šířících se všemi směry [6]. Je otevřenou otázkou, zda je takový přístup ekvivalentní nebo dokonce výhodnější než teorie založená na Huygensově-Fresnelově principu. Zatím se zdá, že difrakci poněkud omezuje, neboť předpokládá, že dopadající vlna je rovinná. Tak tomu ovšem je u Fraunhoferových difrakčních jevů, nemusí však tomu tak být u jevů Fresnelových. Budoucnost ukáže, do jaké míry je to limitujícím faktorem. Protože se zde nebudeme Fresnelovými difrakčními jevy zabývat, použijeme rozkladu do rovinných vln se všemi jeho výhodami i úskalími, jež přináší pro Fraunhoferovu difrakci.

Fraunhoferovou difrakci se nejčastěji rozumí „směrové rozložení difraktovaného vlnění“ nebo „difrakce v nekonečnu“ nebo „difrakce v ohniskové rovině spojné čočky“. Ztotožníme se s tímto pojetím, nebudeme však šetřit časem, abychom je precizovali. Především zdůrazníme celkem samozřejmý fakt, že sousloví „rozklad do rovinných vln“ je jen jiný slovní obrat pro „směrové rozložení“. Každá komponenta rozkladu do rovinných vln

$$\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = T(\mathbf{n}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})$$

( $\mathbf{n}$  je jednotkový vektor ve směru šíření,  $\mathbf{r}$  polohový vektor,  $k = 2\pi/\lambda$  a  $\lambda$  vlnová délka) totiž jednoznačně charakterizuje vlnění šířící se ve směru  $\mathbf{n}$ . Znalost amplitudy  $T(\mathbf{n})$  rozkladu difraktovaného vlnění do rovinných vln znamená tedy totéž, co znalost směrového rozložení (srov. odst. 3).

Hlavní výhodou metody rozkladu do rovinných vln je, že vede přímo k vyjádření Fraunhoferovy difrakce Fourierovou transformací tzv. funkce propustnosti. Formálně totiž připomíná rovinná vlna  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})$  jádro Fourierovy transformace  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})$  (srov. Dodatek 1).  $\mathbf{n}$  ve výrazu pro rovinnou vlnu však značí jednotkový vektor, kdežto  $\mathbf{p}$  v jádru Fourierovy transformace značí vektor, jehož složky nabývají všech hodnot z intervalu  $(-\infty, \infty)$ . Už tento rozdíl naznačuje, že popis Fraunhoferovy difrakce Fourierovou transformací není samozřejmý a že je třeba vymezit podmínky, za kterých je adekvátní.

## 2. Funkce propustnosti

Představme si nějaký objekt dvojrozměrného charakteru (to znamená dostatečně tenký). Např. obraz registrovaný zpracovanou fotografickou emulzí, maska na výrobu integrovaných obvodů, textilie, otisky prstů, polymerová fólie apod.

Kritériem toho, že objekt je dvojrozměrný, tj. dostatečně tenký, je, že ho lze charakterizovat tzv. funkcí propustnosti  $t(\xi)$  definovanou v bodech  $\xi$  (zadní strany) roviny objektu. Funkci propustnosti lze zavést takto: Vycházíme ze samozřejmého předpokladu, že objekt je aspoň v některých místech transparentní pro nějaké vlnění. Předpokládejme, že toto vlnění prochází objektem a těsně za ním (tj. v rovině zadní strany objektu) je charakterizováno funkcí  $\psi(\xi)$ . Necht  $\psi_0(\xi)$  charakterizuje totéž vlnění v téže rovině za nepřítomnosti jakéhokoli objektu. Utvořme nyní podíl

$$(1) \quad t(\xi) = \psi(\xi)/\psi_0(\xi).$$

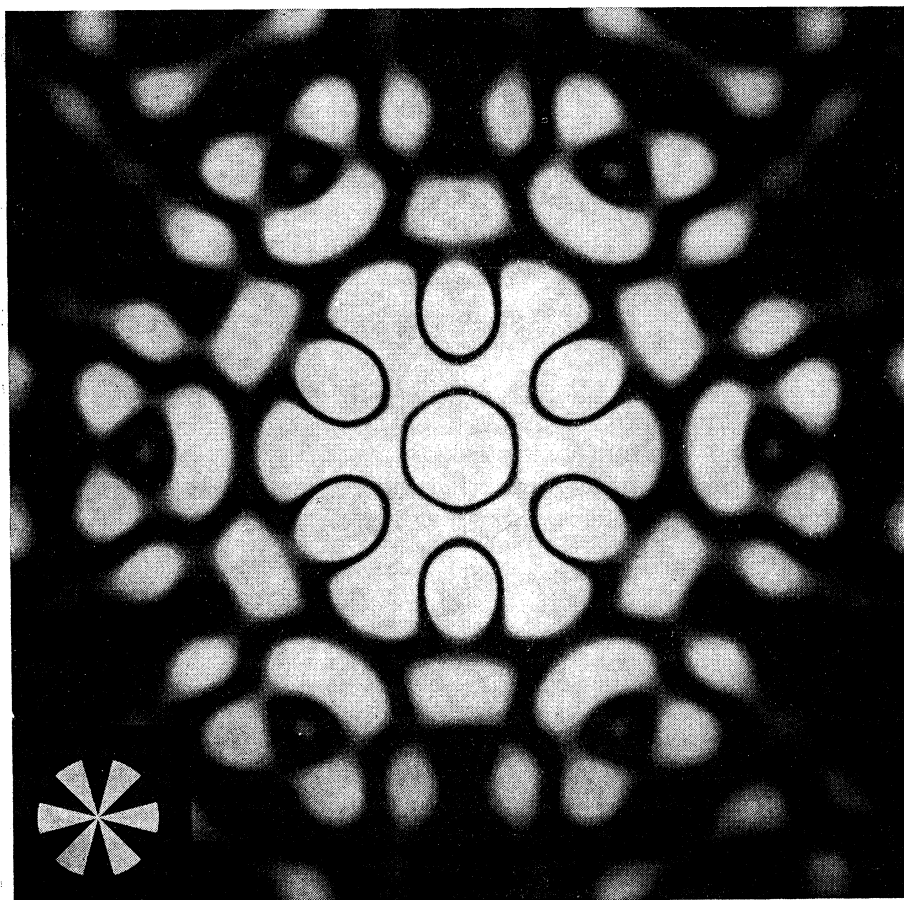
Je-li tento podíl v rozumných mezích nezávislý na tom, zda dopadající vlna je rovinná nebo kulová, na úhlu, pod nímž dopadá rovinná vlna, apod., můžeme příslušný objekt považovat za dvojrozměrný a charakterizovat jej funkcí propustnosti  $t(\xi)$ . (Rozumné meze vylučují případy jako téměř tečný dopad vlnění, kulovou vlnu se středem velmi blízko objektu apod.)

Je zřejmé, že funkce propustnosti je v obecném případě komplexní funkci. V praxi jsou však důležité některé zvláštní případy:

(a) Amplitudové objekty. Mají funkci propustnosti ve tvaru

$$(2) \quad t(\xi) = \tau(\xi) \exp(i\varepsilon_0),$$

kde  $\tau$  je reálná funkce a  $\varepsilon_0$  reálná konstanta. Např. funkci propustnosti objektu tvořeného prázdnými otvory v nepropustném stínítku (štěrbina nebo naopak nepropustný proužek) modelujeme charakteristickou funkcí otvorů, tj. funkcí, jež je rovna jedné v bodech otvorů a nule v bodech nepropustné části stínítka. Složitějším případem jsou obrazy registrované fotografickou emulzí, kdy nositelem informace je míra zčernání filmu. Pro optické zpracování takových obrazů by tedy bylo žádoucí, aby světlo procházející emulzí bylo absorbováno tak, jak to odpovídá zčernání filmu, a nedocházelo



Obr. 1a.

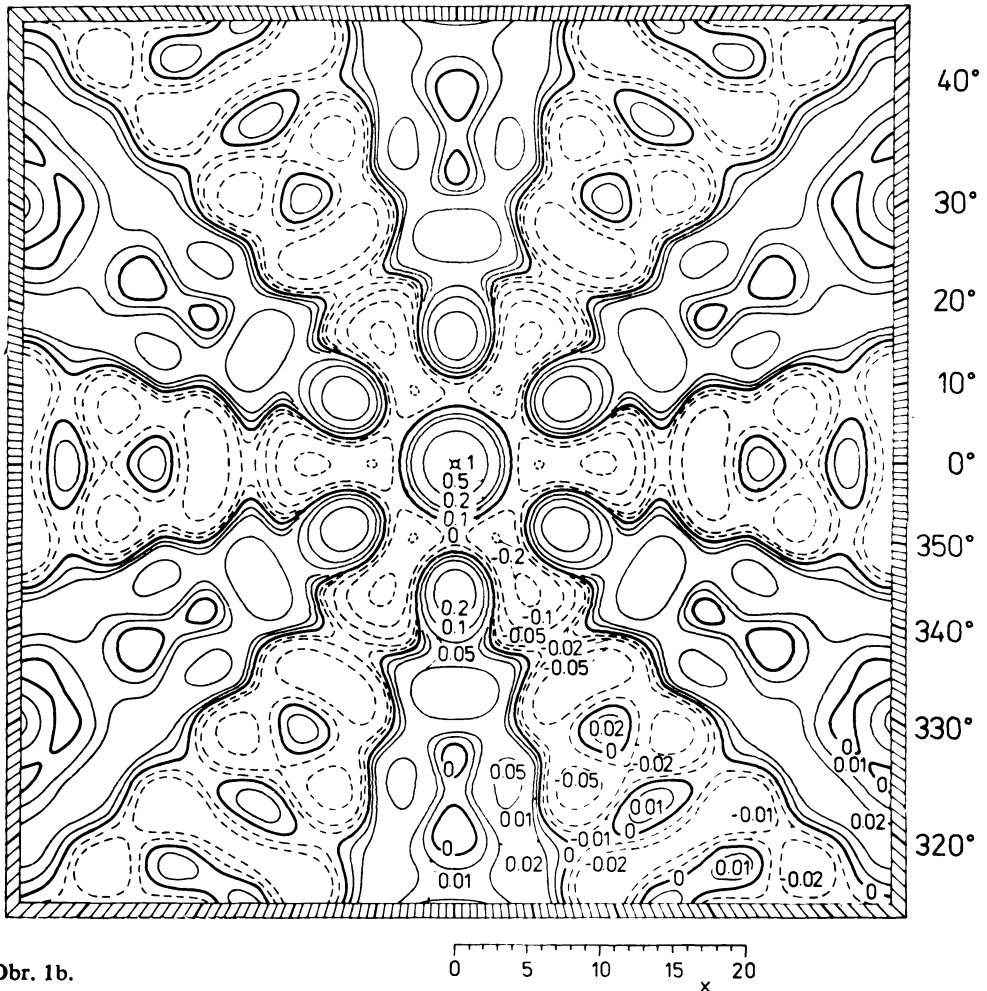
Obr. 1. Fraunhoferova difrakce na otvoru ve tvaru šestičetné Siemensovy hvězdice (a) v porovnání s Fourierovou transformací  $T(\mathbf{x})/T(0)$  charakteristické funkce otvoru (b). Čárkovane jsou vyznačeny záporné hodnoty.  $\mathbf{x} = kR\mathbf{p}$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $R$  je poloměr Siemensovy hvězdice,  $\mathbf{p}$  je proměnná Fourierovy

přítom k posuvu fáze, jenž by byl funkcí polohy v rovině filmu. Funkce propustnosti by pak měla tvar (2). Jenže při běžném vyvolání filmu přísluší různému zčernání různá tloušťka emulze a různé tloušťce emulze nežádoucí fázový posuv prošlého vlnění. Pak je třeba vkládat film do imerzního oleje mezi dvě planparalelní destičky.

(b) Fázové objekty. Mají v propustných částech funkci propustnosti ve tvaru

$$(3) \quad t(\xi) = \tau_0 \exp [i\epsilon(\xi)],$$

kde  $\tau_0$  je konstanta a  $\epsilon(\xi)$  reálná funkce polohy. V nepropustných částech je  $t(\xi) = 0$ . Příkladem mohou být ideálně propustné optické elementy, nejčastěji čočka, jež absorbují světlo jen nepatrně, avšak velmi podstatně ovlivňují fázi vlnění.



Obr. 1b.

transformace, její velikost má význam sinu difrakčního úhlu. Fourierova transformace je v tomto případě reálnou funkcí.

### 3. Rozklad do rovinných vln

Nechť tedy na objekt charakterizovaný funkcí propustnosti  $t(\xi)$  dopadá ve směru  $\mathbf{n}_0$  rovinná vlna – nejčastěji kolimovaný svazek světla. Její vlnová funkce má tvar

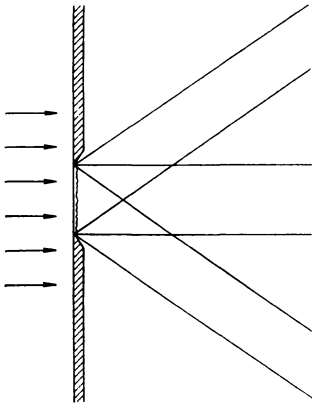
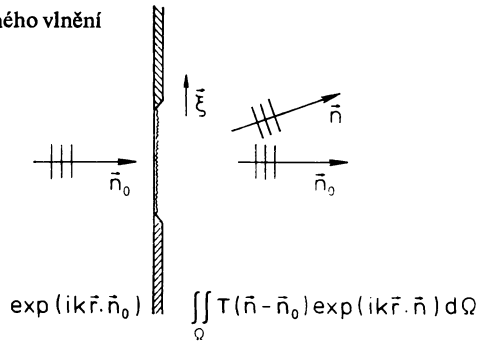
$$(4) \quad \psi_0(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_0)$$

(viz obr. 2). Propustnými částmi objektu – říká se mu někdy transparent – projde vlnění. Přitom dochází k difrakci, takže za objektem už není vlnění prostou rovinnou vlnou. Objevuje se difraktované vlnění. Toto difraktované vlnění vyjádříme jako superpozici rovinných vln šířících se různými směry  $\mathbf{n}$  (viz obr. 2), tj. integrálem

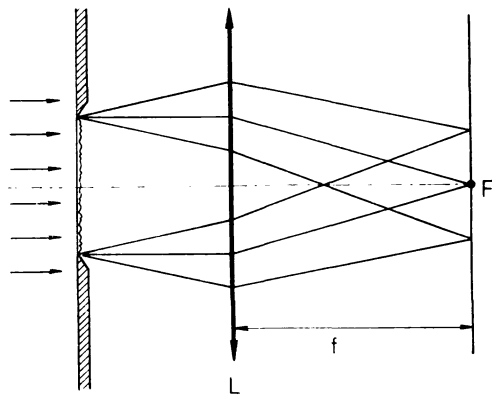
$$(5) \quad \psi(\mathbf{r}) = \iint_{\Omega} T(\mathbf{n} - \mathbf{n}_0) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}) d\Omega,$$

kde amplituda  $T(\mathbf{n} - \mathbf{n}_0)$  rozkladu závisí na odchýlení  $\mathbf{n} - \mathbf{n}_0$  směrů  $\mathbf{n}$  od primárního směru  $\mathbf{n}_0$  a  $\Omega$  značí obor prostorových úhlů možných směrů  $\mathbf{n}$ .

Obr. 2. Rozklad difraktovaného vlnění do rovinných vln.



Obr. 3. Fraunhoferova difrakce jako difrakce v nekonečnu.



Obr. 4. Fraunhoferova difrakce v zadní ohniskové rovině spojité čočky  $L$ .

Směrové rozdělení difraktovaného vlnění udává tedy amplituda  $T(\mathbf{n} - \mathbf{n}_0)$ . Ta je ovšem určena objektem  $t(\xi)$ . Základní úlohou Fraunhoferovy difrakce je nalézt při zadaném objektu  $t$  amplitudu  $T$ . (Je-li toto základní úloha Fraunhoferovy difrakce, není to zdaleka úloha jediná. V praxi se často žádají dedukce o funkci propustnosti  $t(\xi)$  ze znalosti funkce  $|T|^2$ , kterou získáváme fotografováním – kvadratickou detekcí – Fraunhoferovy difrakce. To je matematicky obtížné. Mnohé závěry však lze učinit na základě obecných vlastností Fraunhoferových difrakčních jevů.)

Směrové rozložení difraktovaného vlnění je jen jiný název pro difrakční obrazec v nekonečnu, neboť směřům přísluší body nevlastní roviny. V tomto smyslu se rozumí pod Fraunhoferovou difrakcí obrazec v nekonečnu (nebo aspoň velmi daleko – v anglosaské literatuře se často Fraunhoferova difrakce nazývá „far field diffraction“).

Označení difrakce v nekonečnu nebo difrakce ve vzdálené oblasti bychom však neměli chápat jako návod, jak postupovat při experimentální realizaci Fraunhoferovy difrakce. Jen ve školských příkladech má totiž naději na úspěch takto (bez použití čoček) Fraunhoferovu difrakci skutečně pozorovat. Fraunhoferova difrakce je v tomto případě vytvářena (prokreslována) rovnoběžnými svazky vlnění (světla), jejichž šířka odpovídá průměru oblasti, v níž je funkce propustnosti různá od nuly (viz obr. 3). To v praxi znamená, že oblast s nenulovou funkcí propustnosti musí být velmi malá ( $< 1 \text{ mm}^2$ ), abychom dostali dostatečně kvalitní difrakční obrazce rozumné velikosti ( $< 1 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ ) při  $\lambda \doteq 6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ . Chceme-li získávat Fraunhoferovy difrakční obrazce z oblastí o velikosti  $1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ , musíme použít spojné čočky a rovinu v nekonečnu zobrazit do její zadní ohniskové roviny (viz obr. 4).

#### 4. Vztah mezi funkcí propustnosti a amplitudou rozkladu do rovinných vln

Jde nyní o to najít vztah mezi funkcí propustnosti  $t(\xi)$  a amplitudou  $T(\mathbf{n} - \mathbf{n}_0)$  rozkladu difraktovaného vlnění do rovinných vln. Využijeme k tomu skutečnosti, že na zadní straně preparátu můžeme vlnění vyjádřit dvěma různými způsoby. Podle definice funkce propustnosti charakterizujeme zde vlnění při dopadající vlně (4) funkcí

$$(6) \quad \psi(\xi) = t(\xi) \exp(ik\xi \cdot \mathbf{n}_0).$$

Podle vztahu (5) charakterizuje v téže rovině vlnění výraz

$$(7) \quad \psi(\xi) = \iint_{\Omega} T(\mathbf{n} - \mathbf{n}_0) \exp(ik\xi \cdot \mathbf{n}) d\Omega.$$

Z rovnosti pravých stran vztahů (6) a (7) vyplývá

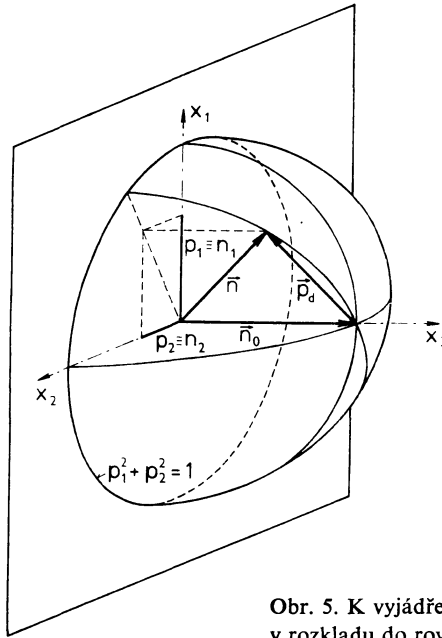
$$(8) \quad t(\xi) = \iint_{\Omega} T(\mathbf{n} - \mathbf{n}_0) \exp[ik\xi \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{n}_0)] d\Omega.$$

Zavedme kartézskou soustavu souřadnic  $x_1, x_2, x_3$  s osou  $x_3$  kolmou k rovině objektu a označme souřadnice  $x_1, x_2$  v rovině objektu  $\xi_1, \xi_2$  (takže  $\xi(\xi_1, \xi_2)$  má stejně jako dřív význam polohového vektoru v rovině objektu).



Předpokládejme, že rovinná vlna dopadá kolmo na rovinu objektu. Vektor  $\mathbf{n}_0$  má tedy souřadnice  $\mathbf{n}_0(0, 0, 1)$ . Odchylku od primárního směru označme  $\mathbf{n} - \mathbf{n}_0 = \mathbf{p}_d$ , takže jednotkový vektor  $\mathbf{n}$  ve směru šíření jednotlivých rovinných vln má komponenty (srov. obr. 5)

$$\mathbf{n}(p_1, p_2, \sqrt{[1 - (p_1^2 + p_2^2)]}) .$$



Obr. 5. K vyjádření integračního oboru  $\Omega$  v rozkladu do rovinných vln.

Integrace přes všechny možné směry vektoru  $\mathbf{n}$  odpovídá integraci po polokouli  $n_3 = \sqrt{[1 - (p_1^2 + p_2^2)]}$ . Element prostorového úhlu je tedy  $d\Omega = dp_1 dp_2 / \sqrt{[1 - (p_1^2 + p_2^2)]}$ . Integrál (8) tím nabude tvaru

$$(9a) \quad t(\xi) = \iint_{p_1^2 + p_2^2 \leq 1} T(p_1, p_2) \exp [ik(p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2)] \frac{dp_1 dp_2}{\sqrt{[1 - (p_1^2 + p_2^2)]}} ,$$

tj. přidržíme-li se vektorové symboliky a zavedeme-li dvojrozměrný vektor  $\mathbf{p}(p_1, p_2)$ ,

$$(9b) \quad t(\xi) = \iint_{p^2 \leq 1} T(\mathbf{p}) \exp (ik\mathbf{p} \cdot \xi) \frac{d^2\mathbf{p}}{\sqrt{(1 - p^2)}} .$$

Rovnice (9) představuje vztah mezi funkcí propustnosti objektu  $t(\xi)$  a amplitudou rozkladu  $T(\mathbf{p})$  difraktovaného vlnění do rovinných vln. Vidíme tedy, že tento vztah není dán Fourierovou, resp. inverzní Fourierovou transformací, jak se všeobecně tvrdí. Od Fourierova integrálu se liší dvěma jednotlivostmi:

- (i) Podle očekávání vyšlo, že obor integrace je omezen na jednotkový kruh a není celou nekonečnou rovinou jako u Fourierova integrálu.
- (ii) Vztah (9) obsahuje ve srovnání s Fourierovým integrálem navíc výraz  $\sqrt{(1 - p^2)}$  ve jmenovateli.

Vyvstává otázka, za jakých podmínek můžeme integrál (9) ztotožnit s Fourierovým integrálem. Z matematického hlediska je odpověď nasnadě: Tehdy, když funkce  $T(\mathbf{p})$  je různá od nuly jen v malém okolí bodu  $\mathbf{p} = 0$ . Fyzikálně to znamená tehdy, když je difrakce omezena na malý úhlový obor kolem primárního směru. Kdy to však nastává a má to vůbec nějaký smysl? Zde musíme přerušit matematické odvozování a uchýlit se ke zkušenosti, tj. k fyzice. Tedy smysl tento případ má a nastává za podmínek optické difrakce. Dříve než se jimi budeme zabývat, upozorníme, že v difraktografické praxi se proměnné  $p_1, p_2$  chápou v poněkud odlišném smyslu, než jak jsme jich dosud užívali.

## 5. Význam proměnných $p_1, p_2$

Z toho, co bylo dosud uvedeno, je zřejmý základní význam integračních proměnných  $p_1, p_2$  amplitudy  $T$  rozkladu (5) do rovinných vln: Jsou to směrové kosiny směrů  $\mathbf{n}$ , v nichž příslušné rovinné vlny postupují. Označíme-li tedy  $\alpha_1, \alpha_2$  úhly, které svírá vektor  $\mathbf{n}$  s osami souřadnic  $x_1, x_2$ , platí

$$(10) \quad p_1 = \cos \alpha_1, \quad p_2 = \cos \alpha_2.$$

V difraktografické praxi však není zvykem používat těchto úhlů, nýbrž úhlů doplňkových

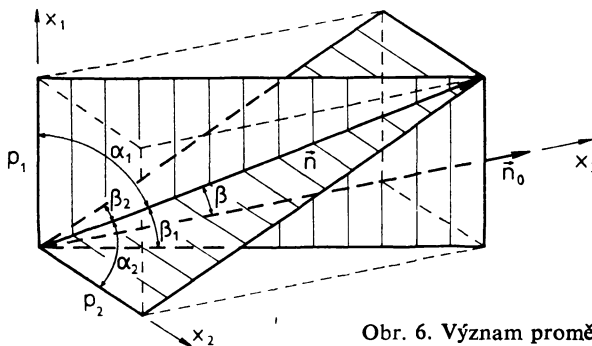
$$(11) \quad \beta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1, \quad \beta_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2.$$

Z obr. 6 je vidět, že  $\beta_1$  je úhel, jež svírá směr  $\mathbf{n}$  se svým průmětem do roviny  $x_1 = 0$ , podobně  $\beta_2$ . Z (10) a (11) plyne

$$(12) \quad p_1 = \sin \beta_1, \quad p_2 = \sin \beta_2$$

a pro úhel  $\beta$  směru  $\mathbf{n}$  difraktované vlny a primárního směru  $\mathbf{n}_0$  platí vztah

$$(13) \quad \sin \beta = \sqrt{(\sin^2 \beta_1 + \sin^2 \beta_2)} = \sqrt{(p_1^2 + p_2^2)} = p.$$



Obr. 6. Význam proměnných  $p_1, p_2$ .

V praxi se úhlem  $\beta$  dává přednost před úhly  $\alpha$  pravděpodobně proto, že bezprostředněji vyjadřují úhel mezi difraktovaným a primárním směrem. Pro malé úhly  $\beta$  platí

$$(14) \quad p \doteq \beta, \quad p_1 \doteq \beta_1, \quad p_2 \doteq \beta_2,$$

takže proměnné  $p_1, p_2$  mají přímo význam těchto „difrakčních úhlů“.

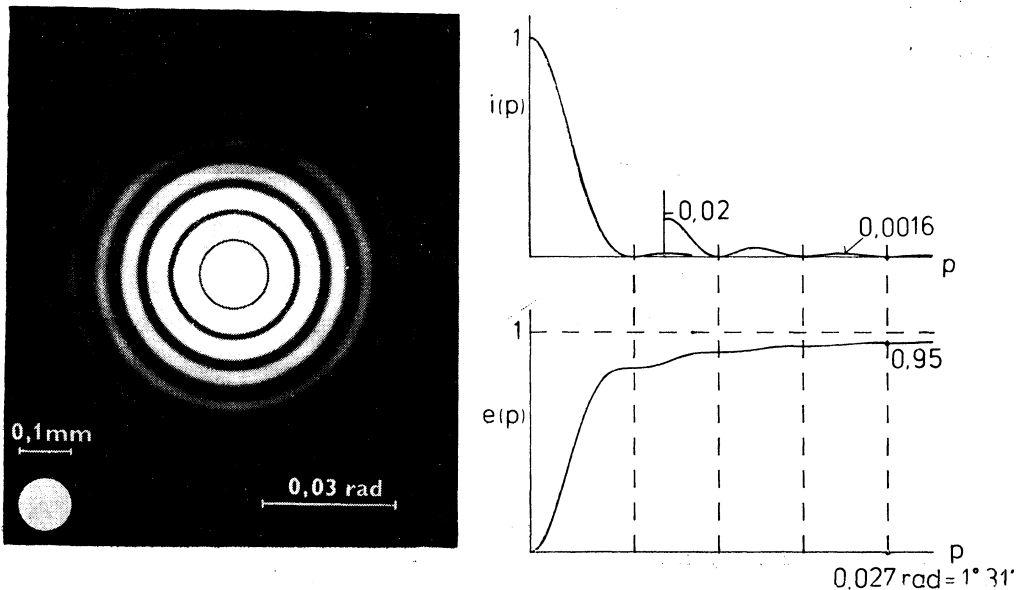
(Dodatečně se omlouvám, že jsem využil přerušení v odvozování a vsunul výklad této geometrické triviality. Z vlastní zkušenosti však vím, že neškodí si ji občas připomenout. Většinou totiž měříme vzdálenosti  $r$  a  $f$  podle obr. 9 a klademe  $p \doteq r/f$  místo přesného  $p = (r/f)/\sqrt{1 + (r/f)^2}$ . Pro malé úhly  $\beta$  nevede tato záměna tangenty a sinu k rozporům, a tak denní zvyk pomáhá zapomenout, že proměnná  $p$  má význam sinu difrakčního úhlu.)

## 6. Optická difrakce

Podmínky optické difrakce působí v teorii difrakce podobně jako deus ex machina v Euripidových tragédiích: Dostane-li se odvozování do úzkých, omezíme se vhodnými podmínkami na obor, v němž je možné odvození dokončit (viz např. [2], str. 58, [5]). Souboru těchto podmínek se říká podmínky optické difrakce.

Hlavní a pro potřeby Fraunhoferovy difrakce jedinou podmínkou je tato podmínka: Funkce propustnosti musí mít vlastnost, že obor proměnných, v němž je nenulová, lze rozdělit na části, jejichž lineární rozměry jsou velké ve srovnání s vlnovou délkou vlnění a v nichž se její amplituda  $\tau$  i fáze  $\varepsilon$  mění jen nepatrně, tj.  $\Delta\tau/\tau \ll 1$ ,  $\Delta\varepsilon \ll 2\pi$ ,  $\tau \neq 0$ . Nejjednodušším příkladem jsou prázdné otvory v nepropustném stínítku. Pro difrakci světla má uvedená podmínka dvojitý význam. Především způsobuje, že nedochází ke změnám polarizace světla, a tím dovoluje aplikovat skalární teorii difrakce na difrakci vektorového elektromagnetického vlnění. Za druhé — a o to nám jde — způsobuje, že difrakční úhly jsou malé. Ukážeme to na příkladě.

Nechť objektem je nepropustné stínítko s otvorem o průměru  $2R = 0,1$  mm a vlnová délka  $\lambda = 6,3 \cdot 10^{-4}$  mm (takže  $k = 2\pi/\lambda = 1 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ ). Příslušný Fraunhoferův difrakční jev ukazuje obr. 7. Rozložení relativní intenzity je dáno funkcí  $i(p) = [2J_1(kRp)/(kRp)]^2$ , kde  $J_1$  značí Besselovu funkci 1. řádu. Z jejího grafu je vidět, že už pro  $p > 2 \cdot 10^{-2}$  rad nabývá funkce  $i(p)$  jen nepatrných hodnot. To však samo o sobě mnoho neznamená. Důležité je, jaká část  $e(p)$  celkové energie difrakto-



Obr. 7. Difrakce na kruhovém otvoru o průměru 0,1 mm, rozložení relativní intenzity  $i(p)$  a část  $e(p)$  celkové energie obsažené ve vzdálenosti menší než  $p$  od primáru  $p = 0$ .

vaného vlnění je uvnitř kužele s vrcholovým úhlem  $p$  a s osou v primárním směru. Ta je dána integrálem (viz např. [5], str. 398)

$$e(p) = \frac{(kR)^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^p i(p) p \, dp \, d\varphi = (kR)^2 \int_0^p \left[ \frac{2J_1(kRp)}{kRp} \right]^2 p \, dp = \\ = 1 - J_0^2(kRp) - J_1^2(kRp).$$

Graf funkce  $e(p)$  je rovněž na obr. 7. Z něho je vidět, že v kuželi o vrcholovém úhlu  $2,7 \cdot 10^{-2}$  rad =  $1^\circ 31'$  je obsaženo 95% energie difraktovaného vlnění.

Tento příklad a podobné dovolují akceptovat tvrzení, že difrakční úhly bývají velmi malé, takže už od hodnot  $p \ll 1$  můžeme položit  $T(\mathbf{p}) = 0$ .

(V teorii difrakce, která zahrnuje i Fresnelovy ohybové jevy, bývá nutné přijmout ještě další podmínku optické difrakce, jež omezuje shora lineární velikost  $d$  oboru proměnných, pro něž je  $t(\xi) \neq 0$ . Obvykle se požaduje (srov. např. [1], [5]), aby vzdálenost zdroje vlnění i bodu pozorování od objektu byly velké ve srovnání s  $d$ . Poněvadž nám jde o Fraunhoferovy difrakční jevy, kdy obě zmíněné vzdálenosti jsou nekonečné, nemusíme se touto podmínkou zabývat.)

## 7. Fraunhoferova difrakce jako Fourierova transformace funkce propustnosti

Podmínka optické difrakce tedy zaručuje, že

$$(16) \quad T(\mathbf{p}) \neq 0, \quad \text{jen když } p \ll 1.$$

Pak můžeme vztah (9) mezi funkcí propustnosti  $t(\xi)$  objektu a amplitudou  $T(\mathbf{p})$  rozkladu do rovinných vln pozměnit tak, aby (9) byl Fourierovým integrálem. Především položíme

$$(17) \quad T(\mathbf{p})/\sqrt{(1-p^2)} \doteq T(\mathbf{p})$$

a přitom si uvědomíme, že odvahu použít tohoto vztahu i v blízkosti  $p = 1$  nám dává experimentální zkušenost vyjádřená podmínkou (16). Ta také dovoluje rozšířit integrační obor v (9) z jednotkového kruhu na celou nekonečnou rovinu  $(p_1, p_2)$ .

### 7.1. Difrakce v nekonečnu

Těmito dvěma nikterak elegantními a spíše dosti hrubými úpravami dosahujeme toho, že vztah (9) mezi funkcí propustnosti  $t(\xi)$  objektu a amplitudou  $T(\mathbf{p})$  směrového rozkladu difraktovaného vlnění – tedy funkcí charakterizující Fraunhoferovu difrakci – nabude tvaru inverzní Fourierovy transformace

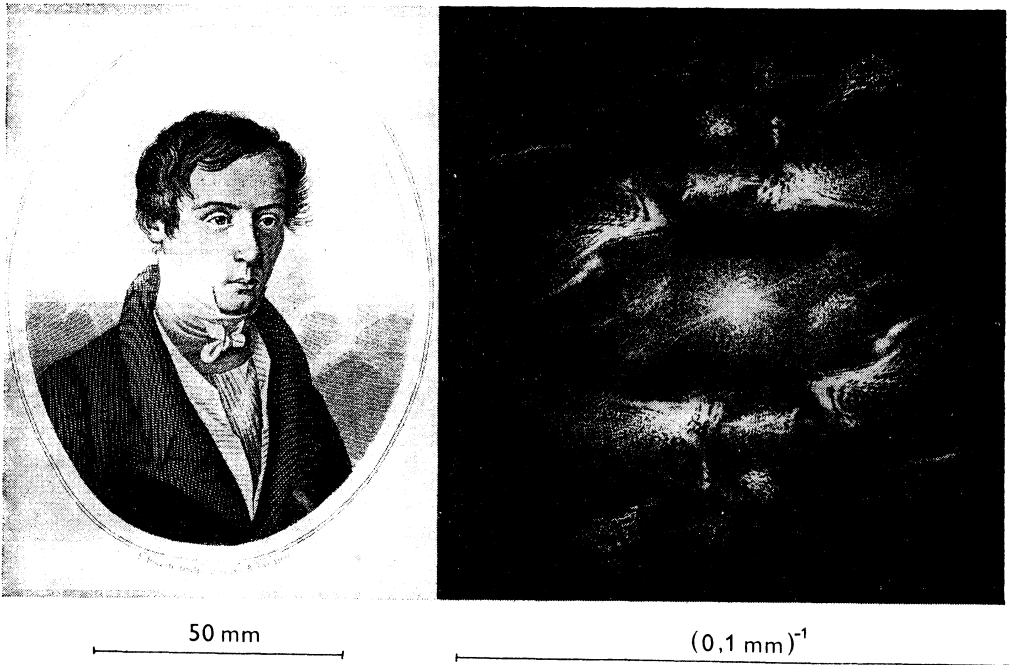
$$(18) \quad t(\xi) = \iint_{-\infty}^{\infty} T(\mathbf{p}) \exp(ik\mathbf{p} \cdot \xi) \, d^2\mathbf{p} = F^{-1}\{T(\mathbf{p})\}.$$

Podle vztahů (1–4) až (1–6) v Dodatku 1 (integrál (18) je v  $E_2$  a  $B^2 = 1$ , takže  $A^2 = (k/2\pi)^2 = 1/\lambda^2$ ) má Fourierova transformace příslušející k (18) tvar

$$(19) \quad T(\mathbf{p}) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} t(\xi) \exp(-ik\mathbf{p} \cdot \xi) \, d^2\xi = F\{t(\xi)\}.$$

A to je hledaný vztah vyjadřující Fraunhoferovu difrakci  $T(\mathbf{p})$  při zadané funkci propustnosti  $t(\xi)$ .

Proměnnými funkce  $T(\mathbf{p})$  jsou difrakční úhly, tedy veličiny přímo měřené při experimentu. Je zřejmé – ať už ze vztahu (19) nebo z fyzikálního názoru – že funkce  $T(\mathbf{p})$  závisí nejen na funkci propustnosti  $t(\xi)$ , ale také na vlnové délce  $\lambda = 2\pi/k$  vlnění, kterého bylo použito při difrakčním experimentu. Pro optickou analýzu obrazu a podobné aplikace však není důležité, za jakých podmínek byla analýza prováděna. Upřímně řečeno, nejde o Fraunhoferovu difrakci, ale o tzv. spektrum prostorových frekvencí, které s funkcí propustnosti jedno-jednoznačně koresponduje (viz Dodatek 2 a obr. 8).



Obr. 8. Fresnelův portrét zdobící titulní stránku jeho sebraných spisů (*Oeuvres complètes d'Augustin Fresnel, tome 1*, Imprimerie impériale, Paris 1866) a obraz (přibližně čtverec modulu) spektra prostorových frekvencí tohoto portréту získaný Fraunhoferovou difrakcí.

Uvedeme tedy ještě, jak souvisí Fraunhoferova difrakce  $T(\mathbf{p})$  se spektrem prostorových frekvencí.

Za tím účelem přepíšeme oba poslední vztahy s použitím označení

$$(20) \quad T_0(\mathbf{p}/\lambda) = T(\mathbf{p})/\lambda^2$$

a  $k = 2\pi/\lambda$ :

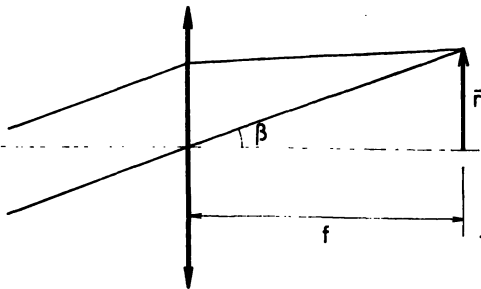
$$(21) \quad T_0\left(\frac{\mathbf{p}}{\lambda}\right) = \iint_{-\infty}^{\infty} t(\xi) \exp\left(-i 2\pi \frac{\mathbf{p}}{\lambda} \cdot \xi\right) d^2\xi = F\{t(\xi)\},$$

$$(22) \quad t(\xi) = \iint_{-\infty}^{\infty} T_0\left(\frac{\mathbf{p}}{\lambda}\right) \exp\left(i2\pi \frac{\mathbf{p}}{\lambda} \cdot \xi\right) d^2\left(\frac{\mathbf{p}}{\lambda}\right) = F^{-1}\left\{T_0\left(\frac{\mathbf{p}}{\lambda}\right)\right\}.$$

Z těchto vztahů je zřejmé (srov. Dodatek 2), že podíl  $\mathbf{p}/\lambda$  má význam prostorové frekvence funkce propustnosti  $t(\xi)$  a že Fraunhoferova difrakce  $T(\mathbf{p})$  chápána jako difrakce v nekonečnu souvisí se spektrem prostorových frekvencí  $T_0(\mathbf{p}/\lambda)$  vztahem (20).

## 7.2. Difrakce v ohniskové rovině spojné čočky

V experimentální praxi pozorujeme většinou Fraunhoferovu difrakci v zadní ohniskové rovině spojné čočky. To znamená, že zjišťujeme rozložení amplitudy  $T_f(\mathbf{r})$  jako funkci polohy  $\mathbf{r}(r_1, r_2)$  v této rovině. Potřebujeme tedy vztah mezi funkcí propustnosti  $t(\xi)$  a rozložením amplitudy  $T_f(\mathbf{r})$ .



Obr. 9. Souvislost difrakčního úhlu  $\beta$  s polohovým vektorem  $\mathbf{r}$  v zadní ohniskové rovině spojné čočky.

Pomocí paprsku procházejícího středem čočky (jenž, jak známo z geometrické optiky, nemění při průchodu čočkou svůj směr, srov. obr. 9) a vztahu (13) shledáme, že

$$\frac{r}{f} = \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = \frac{p}{\sqrt{1 - p^2}},$$

takže

$$p = \frac{r/f}{\sqrt{1 + (r/f)^2}}.$$

U vědomí přiblížení, jimiž jsme převedli vztah (9) na Fourierův integrál, bez rozpaků použijeme

$$(23) \quad p = r/f.$$

Rozložení amplitudy  $T_f(\mathbf{r})$  v ohniskové rovině tedy souvisí s funkcí  $T(\mathbf{p})$  vztahem

$$(24) \quad T(\mathbf{p}) = T\left(\frac{\mathbf{r}}{f}\right) = T_f(\mathbf{r}).$$

Vztahy (19) a (18) nabudou s použitím (23) a (24) tvaru

$$(25) \quad T_f(\mathbf{r}) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} t(\xi) \exp\left(-i \frac{k}{f} \mathbf{r} \cdot \xi\right) d^2\xi = F\{t(\xi)\},$$

$$(26) \quad t(\xi) = \frac{1}{f^2} \iint_{-\infty}^{\infty} T_f(\mathbf{r}) \exp\left(i \frac{k}{f} \mathbf{r} \cdot \xi\right) d^2\mathbf{r} = F^{-1}\{T_f(\mathbf{r})\}.$$

Podle vztahu (25) můžeme tedy vypočítat rozložení amplitudy  $T_f(\mathbf{r})$  ve Fraunhoferově difrakci pozorované v zadní ohniskové rovině spojné čočky při zadané funkci propustnosti  $t(\xi)$ .

Funkce  $t(\xi)$  i  $T_f(\mathbf{r})$  udávají amplitudu vlnění jako funkci polohy v rovině. Mají tedy stejný rozměr. Proto také koeficienty před integrály ve Fourierově transformaci (25) a inverzní Fourierově transformaci (26) mají též rozměr. Velikostí se však liší o mnoho řádů: Při běžném experimentu bývá  $\lambda = 2\pi/k = 6 \cdot 10^{-7}$  m,  $f = 6$  m, takže koeficient u Fourierovy transformace (25) je o 14 řádů větší než koeficient u inverzní Fourierovy transformace (26).

Souvislost prostorových frekvencí a jejich spektra  $T_0$  s polohovým vektorem  $\mathbf{r}$  a funkcí  $T_f(\mathbf{r})$  plyne ze vztahů (20), (23) a (24):

$$(27) \quad T_0\left(\frac{\mathbf{r}}{f\lambda}\right) = T_f(\mathbf{r})/\lambda^2.$$

Uvedeme pro úplnost ještě tvar příslušné Fourierovy transformace

$$(28) \quad T_0\left(\frac{\mathbf{r}}{f\lambda}\right) = \iint_{-\infty}^{\infty} t(\xi) \exp\left(-i 2\pi \frac{\mathbf{r}}{f\lambda} \cdot \xi\right) d^2\xi = F\{t(\xi)\},$$

$$(29) \quad t(\xi) = \iint_{-\infty}^{\infty} T_0\left(\frac{\mathbf{r}}{f\lambda}\right) \exp\left(i 2\pi \frac{\mathbf{r}}{f\lambda} \cdot \xi\right) d^2\left(\frac{\mathbf{r}}{f\lambda}\right) = F^{-1}\left\{T_0\left(\frac{\mathbf{r}}{f\lambda}\right)\right\}.$$

Již ze vztahu (27) je zřejmé (vztahy (28) a (29) to jen potvrzují), že při pozorování Fraunhoferovy difrakce v zadní ohniskové rovině spojné čočky má veličina  $\mathbf{r}/f\lambda$  význam prostorové frekvence funkce  $t(\xi)$ . Vztah (27) také udává souvislost amplitudy  $T_f(\mathbf{r})$  Fraunhoferovy difrakce se spektrem  $T_0$  prostorových frekvencí funkce propustnosti  $t(\xi)$ .

## 8. Závěr

Je-li splněna podmínka optické difrakce, charakterizuje Fourierova transformace Fraunhoferovu difrakci. Souhlas je tak dokonalý, že optický difraktograf můžeme považovat za analogový počítač pro výpočet čtverce modulu Fourierovy transformace. V tomto smyslu se Fraunhoferovy difrakce používá v mnoha oborech: Elektroní mikroskopici získávají Fraunhoferovou difrakcí spektrum prostorových frekvencí svých snímků a z něho objektivně stanovují rozlišení snímků, stav zaostření, astigmatismus a indikují posuv preparátu během expozice. Biologové zasahují do Fraunhoferovy difrakce a následnou rekonstrucí obrazu objektu odstraňují šum, zvyšují kontrast,

a tak si pomáhají, aby na elektronově mikroskopických snímcích uviděli strukturní detaily svých objektů v oblasti desetin nanometru [7]. Ostatně většina metod optického zpracování obrazu a dat [8, 9] je založena na tom, že Fraunhoferovou difrakcí se realizuje Fourierova transformace. Množství a úspěch těchto aplikací způsobují, že považujeme za samozřejmé, že Fraunhoferova difrakce je realizací Fourierovy transformace, a ani tento fakt nezdůvodňujeme.

V této části přednášky jsem se snažil vyjádřit něco právě opačného: Je zcela podivuhodné, že Fourierova transformace tak dobře popisuje Fraunhoferovu difrakci, a stojí za to jejich vzájemné relaci rozumět.

## Poděkování

Paním Z. KUČEROVÉ a J. TÁBORSKÉ děkuji za všestrannou pomoc při přípravě textu. Za kritické připomínky děkuji rovněž dr. M. FOJTÍKOVÉ, ing. J. MRNUŠTÍKOVÍ, dr. M. ROZSÍVALOVI a p. M. ŽELEZNÉMU.

## Dodatek 1. Fourierova transformace ve tvaru vhodném pro aplikace

Matematici si nedělají s konkrétním tvarem Fourierovy transformace mnoho starostí. Často definují Fourierovu transformaci a inverzní Fourierovu transformaci ve tvaru, jemuž říkají symetrický [10, 11]

$$(1-1) \quad F\{g(\xi)\} = G(\mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int g(\xi) \exp(-i 2\pi \mathbf{p} \cdot \xi) d^N \xi,$$

$$(1-2) \quad F^{-1}\{G(\mathbf{p})\} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int G(\mathbf{p}) \exp(i 2\pi \mathbf{p} \cdot \xi) d^N \mathbf{p}.$$

Přitom předpokládají, že  $g$  a  $G$  jsou absolutně integrovatelné komplexní funkce reálných proměnných  $\xi$ ,  $\mathbf{p} \in E_N$ . Používají i jiných definic, které se liší konstantními faktory před integrály a v exponenciálách [12, 13], vzájemnou ekvivalenci těchto definic však není obtížné prokázat. Podstatné je, že v bodech spojitosti funkce  $g(\xi)$  platí

$$(1-3) \quad F^{-1}\{F\{g(\xi)\}\} = g(\xi),$$

a v bodech, v nichž má  $g(\xi)$  konečnou nespojitost, se levá strana vztahu (1-3) rovná střední hodnotě funkce  $g$  v infinitezimálním okolí bodu nespojitosti.

Jakkoli je z matematického hlediska tato nejednotnost v definici Fourierovy transformace bezproblémová, je — mírně řečeno — nepohodlná z hlediska aplikací. Např. údaje v různých slovnících Fourierových transformací i tvrzení vět (např. Rayleighovy-Parsevalovy věty, věty o konvoluci) závisí na definici Fourierovy transformace. Používání těchto příruček vycházejících z různých definic si pak vynucuje věnovat neustálou pozornost různým konstantním faktorům.

Rozmanitost aplikací vede k tomu, že bychom rádi používali případ od případu různých definic podle toho, jak to vyhovuje studovanému problému. Příkladem může být právě Fraunhoferova difrakce. Jednou ji chápeme jako směrové rozložení difraktovaného vlnění  $T(\mathbf{p})$  (viz (19)), tj. jako difrakci v nekonečnu, jindy jako rozložení amplitudy  $T_f(\mathbf{r})$  (viz (25)) v ohniskové rovině spojné čočky. Tyto dvě funkce se od sebe matematicky podstatně liší (ostatně i fyzikálně, neboť mají různý rozměr). A přece bychom rádi každou z nich považovali za Fourierovu transformaci funkce propustnosti  $t(\xi)$  objektu.



Z těchto a podobných důvodů je účelné zobecnit — nebo přiměřeněji řečeno opatřit vhodnými konstantami — definici Fourierovy transformace tak, aby speciální volba těchto konstant dovolila ztotožnit se s tou či onou definicí užívanou v matematické literatuře nebo s nějakou dvojicí funkcí vyskytující se v aplikacích. Konkrétně se zdá být účelné zavést do definice Fourierovy transformace tři nenulové konstanty  $A, B, k$

$$(1-4) \quad F\{g\} = G(\mathbf{p}) = A^N \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int g(\xi) \exp(-ik\mathbf{p} \cdot \xi) d^N \xi,$$

$$(1-5) \quad F^{-1}\{G\} = g(\xi) = B^N \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int G(\mathbf{p}) \exp(ik\mathbf{p} \cdot \xi) d^N \mathbf{p}.$$

Pouze dvě z těchto konstant jsou nezávislé, neboť podmínka  $F^{-1}\{F\{g\}\} = g$  vede ke vztahu

$$(1-6) \quad AB = \frac{|k|}{2\pi},$$

jehož odvození je naznačeno na konci Dodatku 1. Konstanty  $A$  a  $B$  mohou být komplexní, konstanta  $k$  musí být ovšem reálná.

Vhodnou volbou konstant  $A, B, k$  (při splnění vztahu (1-6)) lze ztotožnit vztahy (1-4) a (1-5) s každou definicí Fourierovy transformace, jež se v literatuře vyskytuje. Vždy je nejdříve třeba volit konstantu  $k$ , která může být někdy kladná, jindy záporná, neboť jádra Fourierovy a inverzní Fourierovy transformace jsou někdy zvolena opačně ve srovnání s (1-1), (1-2) (srov. např. [3] str. 399, [4] str. 30, [6] str. 80, [12]). Vhodnou volbou konstanty  $k$  také dosahujeme toho, že proměnná  $\mathbf{p}$  ve Fourierově transformaci má význam té které fyzikální veličiny (např. úhlu, souřadnice, prostoro-ové frekvence).

Tomu, kdo se zabývá aplikacemi Fourierovy transformace, se vyplatí přepsat si dobrou matematickou příručku a vyjít při tom ze vztahů (1-4) až (1-6).

Ve vztahu (1-6) může překvapovat absolutní hodnota konstanty  $k$ . Abychom ozřejmili její původ, naznačíme odvození vztahu (1-6): Ve výrazu  $F^{-1}\{F\{g\}\}$  zaměníme pořadí integrace

$$(1-7) \quad \begin{aligned} F^{-1}\{F\{g\}\} &= \\ &= B^N \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \left[ A^N \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int g(\xi') \exp(-ik\mathbf{p} \cdot \xi') d^N \xi' \right] \exp(ik\mathbf{p} \cdot \xi) d^N \mathbf{p} = \\ &= (AB)^N \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int g(\xi') \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \exp[ik\mathbf{p} \cdot (\xi - \xi')] d^N \mathbf{p} \right\} d^N \xi'. \end{aligned}$$

Pro vnitřní integrál platí

$$(1-8) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \exp[ik\mathbf{p} \cdot (\xi - \xi')] d^N \mathbf{p} = \left( \frac{2\pi}{|k|} \right)^N \delta(\xi - \xi'),$$

neboť pro jednu proměnnou je

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ikp(\xi - \xi')] dp &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x \exp[ikp(\xi - \xi')] dp = \\ &= \frac{2}{k} \lim_{kx \rightarrow \infty} \frac{\sin[kx(\xi - \xi')]}{\xi - \xi'} = \frac{2}{k} \delta(\xi - \xi') \pi \operatorname{sgn} k = \frac{2\pi}{|k|} \delta(\xi - \xi'). \end{aligned}$$

Dosazením (1-8) do (1-7) vypočteme

$$F^{-1}\{F\{g\}\} = \left(\frac{2\pi}{|k|}\right)^N (AB)^N \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int g(\xi') \delta(\xi - \xi') d^N \xi' = \left(\frac{2\pi}{|k|} AB\right)^N g(\xi).$$

Z požadavku  $F^{-1}\{F\{g\}\} = g$  plyne

$$\frac{2\pi}{|k|} AB = 1,$$

což je dokazovaný vztah (1 – 6).

## Dodatek 2. Prostorová frekvence

Pro kvantitativní vyhodnocování difrakčních obrazců je účelné připojit k nim měřítko, které udává velikost difrakčního obrazce nezávisle na dodatečných zvětšeních podobně jako úsečka vyznačující jednotku délky objektů na mikroskopických snímcích (viz obr. 8). Fyzici v rozporu s vlastními proklamacemi nic takového většinou nedělají. Biology však k tomu praxe již přivedla (srov. difrakční obrazce např. v knize [7]). Nebudeme se zde otázkou měřítka difrakčních obrazců zabývat. Uvedeme jen, že není účelné, aby měřítko charakterizovalo přímo měřenou veličinu (difrakční úhel, polohu v ohniskové rovině), neboť ta závisí na parametrech experimentu (vlnové délce, ohniskové vzdálenosti). V aplikacích je totiž Fraunhoferova difrakce většinou pouze prostředkem, jak získat Fourierovu transformaci funkce propustnosti objektu. Je tedy vhodné, aby se měřítko vztahovalo k veličině, která jednoznačně souvisí s jednotkou délky na objektu. Takovou veličinou je prostorová frekvence. Ji proto věnujeme tento dodatek.

Především připomeneme, že pojem frekvence se vždy vztahuje k sinu, kosinu nebo komplexní exponenciální funkci reálných proměnných.

V jednorozměrném případě jsme na tento pojem zvyklí, zejména když proměnná má význam času. Má-li proměnná význam prostorové souřadnice, postupujeme obdobně jako u času: Nazveme základní periodou  $X$  funkce  $\exp(i 2\pi\mu x)$  nejmenší kladnou délku, pro niž je

$$\exp [i 2\pi\mu(x + X)] = \exp (i 2\pi\mu x).$$

Odtud je zřejmé, že prostorová frekvence  $\mu$  funkce  $\exp(i 2\pi\mu x)$  je reciprokou hodnotou základní periody

$$\mu = \frac{1}{X}.$$

Jde-li o obecnou funkci  $g(x)$ , vyjádříme ji Fourierovým integrálem ve tvaru

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\mu) \exp(i 2\pi\mu x) d\mu$$

a nazveme každou hodnotu  $\mu$ , pro niž  $G(\mu) \neq 0$ , prostorovou frekvencí funkce  $g(x)$ . Funkci  $G(\mu)$  nazýváme spektrem prostorových frekvencí funkce  $g(x)$ .

Podobně v  $E_N$  se pojem prostorové frekvence vždy vztahuje k funkci  $\exp(i 2\pi\mu \cdot \mathbf{x})$ : Základní periodou  $\mathbf{X}$  této funkce nazveme nejkratší vektor takový, že  $\mu \cdot \mathbf{X} > 0$  a platí

$$\exp [i 2\pi\mu \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{X})] = \exp (i 2\pi\mu \cdot \mathbf{x}).$$

Je tedy zřejmé, že

$$(2-1) \quad \mu \cdot \mathbf{X} = 1.$$

Poněvadž  $\mathbf{X}$  je nejkratší vektor splňující (2 -- 1), musí být

$$(2-2) \quad \mu = \frac{1}{X}, \quad \mu \parallel \mathbf{X}.$$

Prostorová frekvence  $\mu$  funkce  $\exp(i 2\pi\mu \cdot \mathbf{x})$  je tedy vektor, jenž je rovnoběžný se základní periodou  $\mathbf{X}$  této funkce a jehož velikost je rovna reciproké hodnotě velikosti základní periody.

Jde-li o obecnou funkci  $g(\mathbf{x})$  v  $E_N$ , vyjádříme ji Fourierovým integrálem ve tvaru

$$g(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int G(\boldsymbol{\mu}) \exp(i 2\pi\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{x}) d^N \boldsymbol{\mu}$$

a nazveme každé  $\mu(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ , pro něž  $G(\boldsymbol{\mu}) \neq 0$ , prostorovou frekvencí funkce  $g(\mathbf{x})$ . Funkci  $G(\boldsymbol{\mu})$  říkáme spektrum prostorových frekvencí funkce  $g(\mathbf{x})$ .

Z Lerchovy věty vyplývá, že funkce  $g(\mathbf{x})$  je svým spektrem  $G(\boldsymbol{\mu})$  prostorových frekvencí jednoznačně určena (až na nulovou funkci).

Ze vztahu

$$\exp(i 2\pi\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \delta(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}') \exp(i 2\pi\boldsymbol{\mu}' \cdot \mathbf{x}) d^N \boldsymbol{\mu}'$$

je zřejmé, že spektrem funkce  $\exp(i 2\pi\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{x})$  je funkce  $\delta(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}')$ .

## Literatura

- [1] SOMMERFELD A.: *Optik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Geest & Portig K.-G., Leipzig 1959, 182—184.
- [2] GOODMAN J. W.: *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill, New York 1968, 59—61.
- [3] HECHT E., ZAJAC A.: *Optics*. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1974, 336, 411.
- [4] COWLEY J. M.: *Diffraction Physics*. North-Holland, Amsterdam 1975, 22—23.
- [5] BORN M., WOLF E.: *Principles of Optics. 3rd ed.* Pergamon Press, Oxford 1965, 382—386.
- [6] COLLIER R. J., BURCKHARDT CH. B., LIN L. H.: *Optical Holography*. Academic Press, New York 1971, 104—106.
- [7] MISELL D. L.: *Image analysis, enhancement and interpretation*. North-Holland, Amsterdam 1978.
- [8] CASASENT D. (ed.): *Optical Data Processing*. Springer Verlag, Berlin 1978.
- [9] LEE S. H. (ed.): *Optical Information Processing*. Springer Verlag, Berlin 1981.
- [10] SCHWARTZ L.: *Matematické metody ve fyzice*. SNTL, Praha 1972, 203.
- [11] STEIN E. M., WEISS G.: *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press, Princeton, N. J. 1975, 2.
- [12] DAVIES B.: *Integral Transforms and Their Applications*. Springer Verlag, New York 1978, 89.
- [13] CHAMPENEY D. C.: *Fourier Transforms and their Physical Applications*. Academic Press, London 1973, 9, 40.