Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jiří Veselý; Ivan Netuka
Eduard Helly, konvexita a funkcionální analýza

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 29 (1984), No. 6, 301--312

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138846

Eduard Helly, konvexita a funkcionální analýza

Ivan Netuka, Jiří Veselý, Praha

S Hellyovým jménem bývají nejčastěji spojována dvě dnes již klasická tvrzení. První se týká posloupnosti stejně omezených reálných funkcí se stejně omezenými variacemi a říká, že z takové posloupnosti lze vybrat posloupnost bodově konvergentní (princip selekce). Druhé tvrzení říká, že průnik systému m konvexních množin v $\mathbb{R}^n$ je neprázdný, pokud $m > n$ a každých $n + 1$ množin z tohoto systému má neprázdný průnik. Zmíněné věty, z nichž první nalezla dalekosáhlá zobecnění i uplatnění v matematické analýze a teorii pravděpodobnosti a druhá v kombinatorické geometrii a konvexitě, by patrně samy o sobě stačily zajistit Hellymu dostatečnou známost. Helly se však značně zasloužil i o rozvoj funkcionální analýzy, avšak tento jeho přínos bývá často opomíjen. Abychom ho mohli čtenáři alespoň zčásti přiblížit, všimneme si některých aspektů vývoje funkcionální analýzy v prvních třech desetiletích tohoto století. Přitom volně navážeme na články [14], [15], které popisují některé etapy tohoto vývoje.

Život protagonisty našeho vyprávění byl natolik neobvyklý, že stojí za podrobnější zmínku. Eduard Helly se narodil 1. června 1884 ve Vídni. Již v době studií na císařském Maxmilianově gymnáziu v letech 1894—1902 se zajímal o matematiku. V době dalšího studia, které ukončil získáním doktorátu v r. 1907, poslouchal přednášky z matematiky a fyziky jak na vídeňské univerzitě, tak i na technice. Jeho učiteli byli např. F. Mertens (1840—1927), W. Wirtinger (1865—1945) a L. Boltzmann (1844—1906). Wirtinger, jeden z oponentů Hellyovy disertace, měl o něm tak dobré mínění, že mu umožnil na základě stipendia ve školním roce 1907/8 roční pobyt v tehdejším „středu" matematického dění — v Göttingen. Tam se Helly na Hilbertově semináři setkával např. s R. Courantem (1888—1972), A. Haarem (1885—1933), E. Hellingerem (1883—1950) a O. Toeplitzem (1881—1940). Z učitelů měl na Hellyho vliv nejen D. Hilbert (1862 — 1943), ale též např. F. Klein (1849—1925), H. Minkowski (1864—1909) a O. Runge (1865—1927).

Po návratu z Göttingen do Vídně nebylo Hellyovo postavení lehké — živil se kondicemi, učil též na gymnáziu a vypracoval několik souborů řešení ke středoškolským sbírkám příkladů. Byl také nějaký čas pokladníkem Vídeňské matematické společnosti (pro zajímavost: přednesl v ní za svého vídeňského pobytu celkem 17 přednášek). Hlavním Hellyovým zájmem bylo však další studium matematiky. Toto studium přináší výsledky: v r. 1912 publikuje práci [9], ke které se ještě vrátíme, o rok později objevuje (viz též dále) větu o průniku konvexních množin. Spolu s výsledky získává ani ne třicetiletý Helly matematickou reputaci. Až potud by mohl mít čtenář dojem, že se Helly může stát stálicí na hvězdném nebi matematiky; přichází však první světová válka.

Helly se dobrovolně hlásí do armády. V září r. 1915 je na rusko-rakouské frontě těžce raněn; své zranění (průstřel plic s komplikacemi, které vedly později k jeho srdečním obtížím), překonává v lazaretech v Kyjevě, Kursku a Voroněži. Později, jako zajatec na Sibiři, učí své druhy matematiku (byl mezi nimi i T. Radó (1895–1965)). Do Vídně se vrací velmi komplikovaně přes Dálný východ a Egypt až v listopadu r. 1920. Ihned po návratu začíná pracovat na své habilitační práci, kterou předkládá r. 1921; komise pověřuje vypracováním zprávy H. Hahna (1879–1934).

Brzo po předložení práce se Helly oženil s Elise Blochovou (získala doktorát z matematiky na vídeňské univerzitě r. 1915) a krátce nato byl 3. srpna 1921 jmenován soukromým docentem; od jeho doktorátu však uběhlo již 14 let a Hahn se domníval, že stálé místo (na vídeňské univerzitě) je třeba nabídnout někomu mladšímu. Kromě toho zde sehrály roli pravděpodobně též rasové důvody (srovnej [12]). Aby uživil rodinu, stává se Helly bankovním úředníkem. Pracovní doba mu neumožňovala, aby se více mohl věnovat matematice; navíc „černý pátek" r. 1929 vedl k úpadku banky a ke ztrátě tohoto zaměstnání. R. 1930 nastoupil jako pojistný matematik u pojišťovny „Phönix" (téhož roku se mu narodil syn; W. S. Helly získal doktorát z fyziky na M.I.T. v r. 1959 a stal se později profesorem v oblasti operačního výzkumu na polytechnickém institutu v Brooklynu). Zajímavé jsou nedávné vzpomínky Z. W. Birnbauma, který s Hellym ve „Phönixu" působil (viz [3]). Popisuje rozdíl v přístupu Hellyově a jeho dvou spolupracovníků k řešení nerutinních problémů: Helly dal problému matematickou formulaci a dosáhl řešení, které bylo možno opakovaně užívat v podobných případech. Ostatní dva zpracovali zvlášť numericky každý jednotlivý příklad metodou zkusmých oprav ťukáním na ruční Odhnerově počítačce. Mimochodem, dokonce i způsob jeho práce s počítačkou byl vtipný, obsahoval obraty, které vedly ke zkrácení výpočtu nebo k redukci počtu potřebných kroků.

Nedlouho nato r. 1933 ztrácí Helly jakékoli šance na získání místa na vídeňské univerzitě (je zajímavé, že tam vedl celkem tři disertační práce; poslední byla obhájena v r. 1938). Po anšlusu se Hellyova rodina rozhoduje opustit co nejrychleji říši a odchází do USA; strýc Hellyovy ženy tam pracoval jako inženýr a zařídil vízové formality.

V září r. 1939 připlouvá Helly s manželkou a osmiletým synem do New Yorku. Začátky byly krušné, opět bylo nutné získávat živobytí kondicemi. S pomocí přátel, mj. i A. Einsteina (1879–1955), získávali Helly a jeho žena přiměřené postavení. Přicházejí však zdravotní problémy – v r. 1942 prodělává Helly těžký infarkt. V září r. 1943 se však zdá, že se konečně vše v dobré obrátí: Helly získává místo hostujícího profesora a (relativně) královský plat na Illinois Institute of Technology (z doporučení H. Weyla (1895–1955) vybíráme: „... Sledoval jsem kariéru dr. Hellyho dlouhou dobu. (...) Je to laskavý, velmi skromný a kultivovaný člověk. (...) Dosáhl výjimečných výsledků v teorii reálných funkcí, zejména v teorii integrálních rovnic a lineárních rovnic s nekonečným počtem neznámých.") Ve svých 58 letech se tedy může Helly opět po dlouhé době plně věnovat matematice.

Životní osudy nemívají šťastný konec jako pohádky: Na výročním zasedání Americké matematické asociace Helly dne 28. listopadu 1943 v Chicagu druhému infarktu podlehl. Byl to podle svědectví přátel milý a jemný člověk. Krásně přednášel, dobře hrál šachy, miloval klasickou hudbu a literaturu a rád fotografoval. Především byl však talentovaným matematikem a zejména z této stránky ho chceme čtenáři přiblížit. I když seznam jeho prací čítá jen 11 položek a těch, které obsahují původní matematické výsledky, je vlastně jenom 6, stojí za to právě těmto pracím věnovat pozornost.

Dnes je možné napsat učebnici funkcionální analýzy bez zmínky o Hellym a také se to často stává. Jeho přínos zůstává pak v nedohlednu „zarovnán" hluboko pod mnoha vrstvami nejrůznějších zobecnění a nových verzí vět o rozšíření lineárních funkcionálů či vět o stejnoměrné omezenosti. Mnohý student pozná v učenostech o w^*-kompaktnosti omezených podmnožin duálu topologického vektorového prostoru spíše Tichonovovu větu o topologických součinech kompaktních prostorů než Hellyovu větu o selekci.

Na druhé straně je vcelku nemyslitelné napsat učebnici o konvexních množinách a opomenout větu, o níž jsme se v úvodu zmínili.

Nedávno na jedné konferenci v Oberwolfachu jeden z přednášejících vyslovil pozoruhodnou (nematematickou) větu: Matematika není nic jiného než dobré uspořádání trivialit. Ostatně každý matematik ze svého oboru potvrdí, že u zrodu „velkých" matematických vět bývá často překvapivě jednoduchý postřeh.

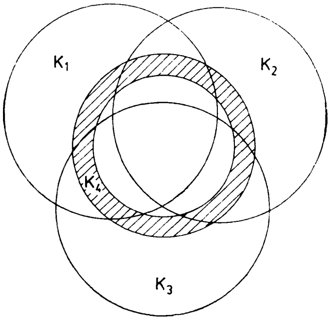
V práci [9] z r. 1912 Helly implicitně používá toto tvrzení: Systém $\mathscr{S}$ uzavřených omezených intervalů na reálné ose má neprázdný průnik, jestliže mají neprázdný průnik každé dva intervaly ze systému $\mathscr{S}$. Důkaz je zřejmý: Je-li $\mathscr{S} = \{\langle a_\alpha, b_\alpha\rangle; \alpha \in I\}$, pak $\sup\{a_\alpha; \alpha \in I\} \in \bigcap\mathscr{S}$. Mimochodem, přesně toto tvrzení se dnes stále využívá při důkazu Hahnovy-Banachovy věty (viz [18], str. 123; srv. též s [7]).

Intervaly jsou ovšem (jediné) konvexní množiny na reálné ose $\mathbb{R}$. Připomeňme, že podmnožina M vektorového prostoru (nad tělesem reálných čísel) se nazývá konvexní, jestliže s každými dvěma body obsahuje i úsečku tyto body spojující. To znamená, že platí tato podmínka: Je-li $x, y \in M$ a $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$, potom $\lambda x + (1 - \lambda) y \in M$. Z definice je zřejmé, že průnik libovolného systému konvexních množin je konvexní množina — může být ovšem prázdná. Je-li $\mathscr{S} = \{(0,1/n); n \in \mathbb{N}\}$ nebo $\mathscr{S} = \{\langle n, \infty); n \in \mathbb{N}\}$, pak $\bigcap\mathscr{S} = \emptyset$ a přitom každé dva intervaly z $\mathscr{S}$ mají neprázdný průnik.

K podstatnému zobecnění výše uvedeného postřehu o neprázdnosti průniku systému jednorozměrných intervalů dospěl Helly v r. 1913.

Hellyova věta. *Nechť $\mathscr{S}$ je systém alespoň $n + 1$ konvexních podmnožin prostoru $\mathbb{R}^n$. Nechť systém $\mathscr{S}$ je buď konečný, nebo každá množina z $\mathscr{S}$ je kompaktní. Jestliže každých $n + 1$ množin ze systému $\mathscr{S}$ má neprázdný průnik, pak průnik všech množin ze systému $\mathscr{S}$ je neprázdný.*

Poznamenejme, že každé dvě strany trojúhelníku v rovině mají neprázdný průnik a průnik všech tří stran je ovšem prázdný. Obecněji: Číslo $n + 1$ ve větě nelze nahradit menším. Také předpoklad konvexity množin je podstatný, jak ukazuje „školní" příklad na obr. 1: Každé tři z množin K_1, K_2, K_3, K_4 mají neprázdný průnik, přesto však průnik všech těchto množin je prázdný. V tomto příkladě je podstatné, že množina K_4 (vyšrafované mezikruží) není konvexní. Také jsme již v případě $\mathbb{R}$ viděli, že bez předpokladu kompaktnosti věta neplatí pro nekonečné systémy. Je však užitečné zdůraznit, že důkaz „kompaktního" případu lze standardním obratem převést na případ konečně mnoha množin. Podstata Hellyovy věty je ve skutečnosti kombinatorického a ne topologického charakteru.



Obr. 1

Helly svůj důkaz publikoval až deset let po objevení věty v [11]. (Překlad této práce do ruštiny byl uveřejněn v jednom z prvních ročníků Uspěchi mat. nauk.) Před otištěním článku [11] uveřejnil důkaz Hellyovy věty v r. 1921 J. Radon (1887–1956) a v r. 1922 D. König (1884–1944). König se o Hellyově větě dozvěděl z Radonova článku a jeho důkaz se v zásadě neliší od důkazu Hellyova. Radon se s tvrzením (bez důkazu) seznámil při předválečné přednášce, kterou Helly proslovil ve Vídeňské matematické společnosti. Radonův důkaz se opírá o větu, kterou níže uvádíme – patří dnes k základním větám o konvexních množinách. Není bez zajímavosti, že Radonův důkaz byl znovu objeven v r. 1940 (a později publikován) studentem univerzity v Minsku J. Dukorem. Tento mladý matematik zahynul na frontě ve druhé světové válce.

Připomeňme zde ještě pojem konvexního obalu. Je-li M libovolná podmnožina vektorového prostoru X, pak konvexní obal conv M množiny M je, podle definice, průnik všech konvexních množin obsahujících M. Není těžké dokázat, že M je přesně množina všech konvexních kombinací bodů z M. Tedy bod x padne do conv M, právě když existuje $k \in \mathbb{N}$, body $x_1, \ldots, x_k \in M$ a nezáporná čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tak, že $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1$ a $x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j$.

Radonova věta. *Nechť konečná množina $M \subset \mathbb{R}^n$ obsahuje alespoň $n + 2$ bodů. Pak existují M_1, M_2 tak, že $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ a* $\operatorname{conv} M_1 \cap \operatorname{conv} M_2 \neq \emptyset$.

Ještě se chvilku zdržíme u konvexních kombinací. Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ a $x \in \operatorname{conv} M$, pak se x dá napsat jako konvexní kombinace konečného (obecně velkého) počtu bodů z M. V této souvislosti je zajímavá následující věta, kterou Carathéodory dokázal v r. 1907.

Carathéodoryova věta. *Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$, pak každý bod z* conv M *lze vyjádřit jako konvexní kombinaci $n + 1$ (nebo méně) bodů z M.*

Poslední tři uvedené věty mají těsnou souvislost: každou z nich lze dokázat na základě jakékoli ze dvou zbývajících. Ve skutečnosti je dnes známo mnoho důkazů Hellyovy věty a ještě více je jejích nejrůznějších modifikací a zobecnění (k jednomu zobecnění topologického charakteru se sám Helly vrací v r. 1930 ve své poslední publikované matematické práci). Představu o situaci poskytuje monografie [4] (přeložená z amerického originálu vydaného v r. 1963), v níž je na několik set citací vztahujících se k Hellyově větě. Obrázek dokresluje nahlédnutí do předmětové klasifikace užívané např. v referativním časopise „Mathematical Reviews". Pod kódem 52 A 35 čteme: Helly type theorems.

Z mnoha aplikací uvedeme několik ilustrativních příkladů; všechny budou mít geometrický charakter. Neměli bychom však zatajit, že Hellyova věta přinesla svůj vklad do zdánlivě nesouvisejících partií matematiky: např. sovětský matematik L. G. Šnirelman ji užil k zísání silných výsledků o stejnoměrné aproximaci polynomy.

Začněme zcela neformálně, až pohádkově. Na louce je v daný okamžik několik ovcí a vlků. Za jakých rozumných podmínek se nám rovným plotem podaří oddělit ovce od vlků? Podmínka je překvapivě jednoduchá: Jestliže lze „přímkovým" plotem oddělit každou čtveřici zvířat, pak lze už oddělit všechny ovce od všech vlků.

Nechme však vlky a ovce osudu a vyslovme následující větu dokázanou P. Kirchbergerem v r. 1902 (srv. [4], [13]).

Kirchbergerova věta. *Nechť M a N jsou konečné podmnožiny $\mathbb{R}^n$. Potom lze tyto množiny ostře oddělit nadrovinou, právě když pro každou nejvýše $(n + 2)$-bodovou množinu $S \subset M \cup N$ lze ostře oddělit množiny $M \cap S$ a $N \cap S$.*

Původní Kirchbergerův důkaz je více než dvacetistránkový. Dvanáctiřádkový důkaz založený na Hellyově větě lze nalézt v [4].

To samozřejmě není v matematice řídký případ; z vět zpočátku „těžkých" se časem stávají věty „jednoduché": jejich důkazy se často daří zjednodušit, a tím jsou pak věty průhledné a srozumitelné. Jsou však věty, k jejichž původnímu důkazu se rádi vracíme pro jeho myšlenku nebo krásu. Pěkný je i původní důkaz Hellyovy věty pro svou intuitivní geometrickou povahu. Připomeňme si ho pro formulaci s kompaktními množinami.

Helly postupuje indukcí podle dimenze prostoru. Případ $n = 1$ jsme si již rozmysleli. Předpokládejme, že věta platí pro každý $(n - 1)$-rozměrný prostor, $n > 1$. Nechť $\mathscr{S}$ je systém alespoň $n + 1$ kompaktních konvexních podmnožin v $\mathbb{R}^n$, z nichž každých $n + 1$ má neprázdný průnik. Předpokládejme, že průnik systému $\mathscr{S}$ je prázdný; odvodíme spor. Protože průnik systému $\mathscr{S}$ je prázdný, je také průnik jistého konečného počtu množin z $\mathscr{S}$ prázdný (kompaktnost!). Úvaha o takovém konečném podsystému o nejmenším počtu prvků vede k závěru, že existuje konečný systém $\mathscr{T} \subset \mathscr{S}$ a $T \in \mathscr{T}$ tak, že $\bigcap \mathscr{T} = \emptyset$, ale $\bigcap(\mathscr{T} \setminus \{T\}) \neq \emptyset$. (Poznamenejme, že $\mathscr{T}$ obsahuje více než $n + 1$ množin.) Označme $\mathscr{T}' = \mathscr{T} \setminus \{T\}$ a $T' = \bigcap \mathscr{T}'$. Protože T a T' jsou disjunktní kompaktní konvexní množiny, existuje nadrovina $H \subset \mathbb{R}^n$ ostře oddělující T a T' (to znamená, že T a T' leží v různých otevřených poloprostorech určených nadrovinou H).

Existence takové nadroviny se dokáže snadno: zvolme $x \in T$ a $x' \in T'$ tak, aby vzdálenost libovolných bodů $y \in T$ a $y' \in T'$ byla větší nebo rovna vzdálenosti bodů x a x' (kompaktnost!). Pak za H lze volit nadrovinu kolmou k úsečce xx' a procházející jejím středem.

Nechť Q je průnik libovolných n množin z $\mathcal{T}'$. Pak ovšem $T' \subset Q$. Avšak $Q \cap T \neq \emptyset$, neboť každých $n + 1$ množin z $\mathcal{S}$ má neprázdný průnik. Protože množina Q je konvexní a protíná T i T', má společný bod s H. Uvažujme nyní systém $\mathcal{T}'_H = \{M \cap H; M \in \mathcal{T}'\}$. Ten obsahuje alespoň n množin a právě jsme zjistili, že každých n množin z $\mathcal{T}'_H$ má neprázdný průnik. Podle indukčního předpokladu (aplikovaného na $(n - 1)$-rozměrný prostor H) je $\bigcap \mathcal{T}'_H \neq \emptyset$ neboli $T' \cap H \neq \emptyset$. Dospěli jsme ke sporu s volbou nadroviny H.

Těm, kteří kromě geometrie mají rádi také analýzu, se patrně zalíbí důkaz založený na tvrzení, které v souvislosti s teorií her dokázali Bohnenblust, Karlin a Shapley v r. 1950 (viz [4], str. 49):

Tvrzení. *Nechť C je kompaktní konvexní podmnožina v $\mathbb{R}^n$ a $\mathcal{F}$ je konečný systém spojitých konvexních funkcí na C mající následující vlastnosti: Pro každý bod $x \in C$ existuje $f \in \mathcal{F}$ tak, že $f(x) > 0$. Pak existuje přirozené číslo $k \leqq n$, kladná čísla $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ a funkce $f_0, \ldots, f_k \in \mathcal{F}$ tak, že funkce $\sum_{j=0}^{k} \alpha_j f_j$ je kladná na C.*

K důkazu Hellyovy věty stačí předpokládat, že $\mathcal{S}$ je konečný systém neprázdných kompkatních konvexních množin v $\mathbb{R}^n$. Předpokládejme, že $\bigcap \mathcal{S} = \emptyset$ a dokažme, že pak jistý konečný podsystém o nejvýše $n + 1$ množinách z $\mathcal{S}$ má prázdný průnik.

Označme C kompaktní konvexní množinu obsahující sjednocení všech mnozin z $\mathcal{S}$. Označme $f_K(x)$ vzdálenost bodu $x \in \mathbb{R}^n$ od množiny $K \in \mathcal{S}$. Protože $\bigcap \mathcal{S} = \emptyset$, splňuje systém $\mathcal{F} = \{f_K; K \in \mathcal{S}\}$ předpoklady tvrzení. Tedy existují $K^0, \ldots, K^k \in \mathcal{S}$, $k \leqq n$, a kladná čísla $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ tak, že na C platí

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j f_{K^j} > 0\,.$$

To znamená, že $\bigcap \{K^j; 0 \leqq j \leqq k\} = \emptyset$.

Další hezkou aplikací Hellyovy věty je „věta o obrazové galérii" pocházející od M. A. Krasnoselského z r. 1946; viz [13],[4].

Představme si obrazovou galérii (nejlépe moderního umění) sestávající se z několika spojených sálů (nejlépe nepravidelných tvarů). Jestliže každou trojici obrazů lze uhlídat jedním pracovníkem galérie (to znamená, že každá trojice obrazů je viditelná ze vhodně voleného místa galérie), pak jediný pracovník uhlídá celou galérii, tedy z vhodného místa jsou všechny obrazy viditelné.

Krasnoselského věta. *Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní podmnožina obsahující alespoň $n + 1$ bodů. Nechť pro každou $(n + 1)$-bodovou podmnožinu množiny S existuje bod, z něhož jsou všechny její body viditelné v rámci S. Pak je množina S hvězdovitá.*

Připomeňme, že bod $y \in S$ je viditelný z bodu x v rámci množiny S, jestliže úsečka

xy je obsažena v S. Množina se nazývá hvězdovitá, jestliže existuje bod, z něhož jsou všechny body z S viditelné v rámci S. Věta tedy udává kombinatorickou podmínku zaručující, že množina je hvězdovitá.

Uvedené aplikace Hellyovy věty měly kombinatorickou povahu jako věta sama. Je pozoruhodné, že Hellyova věta se hodí k důkazům tvrzení, která mají výrazně „nekombinatorický" vzhled. (Následující a další příklady jsou uvedeny v [4].)

Jungova věta. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ a nechť průměr množiny M nepřesahuje 2. Potom existuje koule o poloměru nejvýše $[2n/(n+1)]^{1/2}$ obsahující množinu M.*

Číslo uvedené ve větě má dobrý geometrický význam: Udává poloměr koule opsané n-rozměrnému pravidelnému simplexu o délce hrany 2. Je známo, že pokud se množina M nevejde do žádné menší koule než s uvedeným poloměrem, pak uzávěr M obsahuje vrcholy n-rozměrného pravidelného simplexu o délce hrany 2.

Poznamenáváme, že zcela nedávno našla Jungova věta aplikace v nejmodernějších partiích diferenciální geometrie. S její pomocí dokázal M. Katz v r. 1983, že tzv. vyplňující poloměr variety (metricko-topologický invariant pro kompaktní Riemannovy variety zavedený M. Gromovem) je pro jednotkovou sféru $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ roven $1/2$ arccos $(-(n+1)^{-1})$. (Na toto užití Jungovy věty nás upozornil O. Kowalski.)

Jak jsme již uvedli, Hellyova věta udává podmínku pro neprázdnost průniku konvexních množin. Vzniká přirozená otázka: jak „velký" je tento průnik. Následující věta pochází z r. 1953:

Kleeova věta. *Nechť $\mathcal{S}$ je systém alespoň $n+1$ kompaktních konvexních množin v $\mathbb{R}^n$ a nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní konvexní množina. Předpokládejme, že platí tato podmínka: Pro každý systém $n+1$ množin z $\mathcal{S}$ existuje posunutí množiny K obsažené v jeho průniku. Potom existuje posunutí množiny K obsažené ve všech množinách z $\mathcal{S}$.*

Jinou variantu „kvantitativní" Hellyovy věty ohlásil J. Pach z Budapešti na nedávné konferenci o konvexitě (Vídeň, 1981). (Poznámka při korektuře: viz [20].)

Věta. *Existuje konstanta $V(n)$ s touto vlastností: Je-li $\mathcal{S}$ konečný systém konvexních podmnožin prostoru $\mathbb{R}^n$ takový, že průnik každého podsystému o $2n$ množinách má objem větší nebo roven číslu $V(n)$, pak objem průniku všech množin ze systému $\mathcal{S}$ je větší nebo roven 1.*

Poznamenejme, že obecně počet $2n$ nelze zmenšit a autorovi jsou známy odhady čísla $V(n)$.

Tak jsme se zvolna dostali do doby zcela nedávné. Stačí jen dodat, že v „Mathematical Reviews" bylo v letech 1980–82 v položce „Helly type theorems" recenzováno na 30 článků.

Máme-li zvážit Hellyovy zásluhy o vývoj funkcionální analýzy, je třeba se vrátit do její „prehistorie" a – jak jsme se již zmínili – prokopat se k základům různými zobecněními, kosmetickými úpravami a poznatky, které s původními zdánlivě ani nesouvisí.

Začneme odzadu: v r. 1932 vyšla jako první svazek v knižnici Monografie matematyczne ve Varšavě kniha [2] S. Banacha (1892–1945) *Théorie des opérations linéaires.* Je to vlastně první monografie z funkcionální analýzy a obsahuje mnoho výsledků z teorie normovaných lineárních prostorů, mj. též tzv. hlavní principy (lineární) funkcionální analýzy (srovnej [6]). Jsou jimi věta o rozšíření spojitého lineárního funkcionálu z podprostoru na celý prostor se zachováním normy, věta o stejné omezenosti bodově omezeného systému spojitých lineárních funkcionálů na Banachově (tj. úplném normovaném lineárním) prostoru a věta o otevřenosti prostého spojitého lineárního zobrazení Banachova prostoru na Banachův prostor.

Zrod prvních dvou vět, dnes obvykle označovaných jako Hahnova-Banachova věta a Banachova-Steinhausova věta, má delší historii. Již kolem r. 1855 řešil P. L. Čebyšev (1821–1894) problém, zda je (rozumná) funkce x jednoznačně určena svými momenty, tj. hodnotami

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \, x(t) \, \mathrm{d}t \,, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Podobnými problémy se později zabývala řada dalších matematiků (Stieltjes, Hamburger, Hausdorff aj.). Jedno dnes již klasické tvrzení z této oblasti náleží i českému matematikovi M. Lerchovi (1860–1922).

Ve funkcionálně-analytické formulaci v soudobém označení lze momentový problém popsat takto: je-li X (reálný) normovaný lineární prostor a f spojitý lineární funkcionál na X (píšeme $f \in X^*$), má se řešit systém rovnic

$$\text{(M)} \qquad f(x_\alpha) = c_\alpha \,, \quad \alpha \in A \,,$$

vzhledem k „neznámé“ f (prvky $x_\alpha \in X$ a čísla c_α jsou dány, A je libovolná indexová množina, kterou parametr α probíhá). Řešením této úlohy se pro prostor $X = C(\langle a, b \rangle)$ zabýval i Helly v [9], je však třeba si alespoň částečně připomenout širší souvislosti.

Přibližně v době Hellyova příchodu do Göttingen je zásluhou Hilberta, Frécheta, Riesze a Schmidta dokončováno základní studium Hilbertova prostoru l^2, resp. $L^2(a, b)$; (název Hilbertův prostor je zaveden v [17] o něco později, k axiomatickému vybudování teorie došlo až na sklonku dvacátých let). Je nutno si uvědomit, že v tomto případě je prostor X izomorfní se svým duálem X^*.

V r. 1909 popsal Riesz pomocí Stieltjesova integrálu obecný tvar spojitého lineárního funkcionálu na prostoru $C(\langle a, b \rangle)$ všech spojitých funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$. Zde již prvky $C^*(\langle a, b \rangle)$ nejsou reprezentovány pouze funkcemi z $C(\langle a, b \rangle)$, duální prostor je „větší“. O rok později začal Riesz studovat prostory $L^p(a, b)$ těch měřitelných funkcí f na (a, b), pro něž je $|f|^p$ integrovatelná funkce. Za pomoci výsledků o prostorech posloupností l^2, resp. l^p, ke kterým dospěli dříve Hellinger, Toeplitz a E. Landau (1877 – 1938), dokázal řešit zmíněný momentový problém (M) nejprve v kontextu prostorů $L^p(a, b)$ a později v [16] i pro prostor $X = C(\langle a, b \rangle)$. Pro řešitelnost (M) zjistil Riesz tuto podmínku: musí existovat takové číslo $m > 0$, že pro každou konečnou podmnožinu $A' \subset A$ a každý systém čísel $\{\lambda_\alpha; \alpha \in A'\}$ platí

$$(*) \qquad \left|\sum \lambda_\alpha c_\alpha\right| \leqq m . \sup \left\{\left|\sum \lambda_\alpha x_\alpha(t)\right|; t \in \langle a, b \rangle\right\} .$$

Helly ve své práci [9] z r. 1912 atakuje rovněž momentový problém (M) pro prostor $X = C(\langle a, b \rangle)$. Podmínku (*) využívá však na rozdíl od Riesze takto: je-li $\sum \lambda_\alpha x_\alpha = 0$ v $C(\langle a, b \rangle)$, pak je i $\sum \lambda_\alpha c_\alpha = 0$. Označíme-li X_0 podprostor prostoru $C(\langle a, b \rangle)$ generovaný $\{x_\alpha; \alpha \in A'\}$, plyne odtud, že existuje právě jeden lineární funkcionál g na (konečněrozměrném) prostoru X_0 takový, že platí $g(x_\alpha) = c_\alpha$, $\alpha \in A'$. Nalezení funkce s konečnou variací determinující hledaný funkcionál f z $C^*(\langle a, b \rangle)$ interpretuje Helly tak, že tento funkcionál f je rozšířením g z X_0 na X a toto rozšíření je spojité (platí $\|f\|_{X^*} \leqq m$). V [9] je dokázáno následující tvrzení.

Hellyovo lemma. *Jsou-li x_k, $k = 1, \ldots, l$, funkce z $C(\langle a, b \rangle)$ a c_k, $k = 1, \ldots, l$, jsou reálná čísla taková, že platí (*) pro $A' = \{1, \ldots, l\}$ a každou volbu λ_k, $k \in A'$, pak pro další funkci $x_{l+1} \in C(\langle a, b \rangle)$ lze nalézt c_{l+1} tak, že (*) platí i pro $A' = \{1, \ldots, l + 1\}$ a každou volbu λ_k, $k = 1, \ldots, l + 1$.*

Použijeme-li dnešního označení, je klíčovým bodem důkazu zjištění podmínky

$$-m\left\|\sum_1^l \mu_k x_k + x_{l+1}\right\| - \sum_1^l \mu_k c_k \leqq c_{l+1} \leqq m \left\|\sum_1^l \mu'_k x_k + x_{l+1}\right\| - \sum_1^l \mu'_k c_k$$

a odůvodnění existence takového čísla c_{l+1}, pro něž tato podmínka je splněna pro všechny možné volby čísel μ_k, μ'_k, $k = 1, \ldots, l$. Z hlediska standardního důkazu Hahnovy-Banachovy věty je Hellyovo lemma (pro speciální případ $X = C(\langle a, b \rangle)$) prvním a dá se říci též hlavním krokem — zbývá totiž jen dnes již zcela obvyklá aplikace Zornova lemmatu nebo užití jiného obdobného obratu a důkaz je hotov.

V r. 1927 se Hahn v [8] vrací k problému existence rozšíření spojitého lineárního funkcionálu. Při důkazu tvrzení z prvního hlavního principu (ve formě zmíněné na str. 308) používá v podstatě Hellyův postup z r. 1912, který kombinuje s vtipným použitím transfinitní indukce.

Všimněme si ještě krátce historie Banachovy-Steinhausovy věty. Je poměrně málo známo, že pro speciální prostor $C(\langle a, b \rangle)$ ji dokázal již Helly v práci [9] z r. 1912. Abychom mohli čtenáři přiblížit „tradiční" důkazovou metodu použitou Hellym i později Hahnem (říká se jí zpravidla „metoda klouzavého hrbu"), připomeňme nejprve podrobné znění věty:

Je-li X Banachův prostor a $f_n \in X^*$, $n = 1, 2, \ldots$, jsou funkcionály takové, že pro každé $x \in X$ existuje $M(x)$ tak, že platí

$$(**) \qquad |f_n(x)| \leqq M(x) < \infty$$

pro všechna $n = 1, 2, \ldots$, potom existuje $M < \infty$ tak, že pro všechna přirozená čísla n je

$$\|f_n\| \leqq M .$$

Princip důkazu použitého Hellym lze popsat takto: předpokládá se, že $\sup_n \|f_n\| = + \infty$; pak se sestrojí posloupnost $\{x_n\}$ bodů z X a posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ tak, aby platilo

$$\sum x_n = x \in X\,, \quad \sum_{j=k+1}^{\infty} |f_{n_k}(x_j)| \leqq 1\,,$$

$$|f_{n_k}(x_k)| \geqq k + \sum_{j=1}^{k-1} |f_{n_k}(x_j)|\,.$$

Snadno se ukáže, že je

$$|f_{n_k}(x)| \geqq k - 1\,,$$

což vede ke sporu s (**). Trochu neobvyklý název metody souvisí s tím, že každá z funkcí f_{n_k} má v bodě x_k „hrb".

Před Hellym použil tuto metodu Lebesgue při důkazu existence spojité funkce, jejíž Fourierova řada v nějakém bodě diverguje. Teprve Helly metodu použil k důkazu obecného principu, i když pouze pro speciální prostor $C(\langle a, b\rangle)$. Dnešní standardní důkaz věty založený na elegantním použití věty Baireovy pochází od Steinhause a Banacha.

Zmíněným přínosem k nalezení dvou ze tří základních principů však Hellyovy zásluhy o budování funkcionální analýzy nekončí. Lze dokumentovat, že již v období 1910—1920 uvažoval Riesz o vybudování axiomatického systému zobecňujícího dosud známé funkční prostory. V r. 1913 vyšla jeho kniha [17], převážně věnovaná prostorům l^p, avšak ani tam, ani v dalších pracích se Riesz o uvažovanou axiomatizaci nepokusil. Jeden z prvních kroků v tomto směru podnikl Helly: s devítiletým odstupem se v r. 1921 vrátil opět k problematice související s momentovým problémem. J. Dieudonné ve své knize [5] označuje Hellyho práci [10] za mezník ve vývoji funkcionální analýzy. K popisu výledků z [10] použijeme dnešního označení včetně pojmů zavedených po r. 1921.

Helly zde uvažuje dosti obecný případ: nejprve volí lineární podprostor Y prostoru všech komplexních posloupností $y = \{y_n\}$ s obecnou normou $y \mapsto \|y\|$ (pro ni užívá dnes běžných axiómů). Dále uvažuje „duál" Y' (pozor, nemusí splývat s dnes užívaným pojmem duálního prostoru zavedeného Hahnem později) jako lineární prostor všech $z = \{z_n\}$, pro něž je

$$\langle z, y\rangle = \sum z_n y_n$$

konvergentní pro všechna $y \in Y$. Kromě zobecnění výsledků, kterých dosáhl o vztahu norem a omezených uzavřených symetrických okolí počátku v konečněrozměrném prostoru Minkowski (zdá se, že Helly jako jeden z prvních pochopil význam konvexity v souvislosti s normou), zabýval se řešením systému rovnic

(M′) $$\langle z_\alpha, y\rangle = c_\alpha\,, \quad \alpha \in A\,,$$

s konečnou, resp. spočetnou indexovou množinou A. Zavede-li se norma na Y' tak, jak jsme zvyklí („singulární případ", kdy by vycházelo $\|z\| = 0$ pro $z \neq 0$, Helly vylučuje), lze Hellyho výsledky popsat takto: Je-li množina A konečná, např. $A = \{1, \ldots, l\}$, $z_k \in Y'$, $k = 1, \ldots, l$, a rovnice v (M′) jsou ve zřejmém smyslu nezávislé a bezesporné, pak existence $m > 0$ s vlastností

$$\left|\sum \lambda_k c_k\right| \leqq m.\ \left\|\sum \lambda_k z_k\right\|$$

(pro všechny možné volby λ_k, $k = 1, \ldots, l$) je nutná a stačí k tomu, aby pro každé $\varepsilon > 0$ existovalo řešení $y \in Y$ systému (M') s vlastností $\|y\| \leqq m + \varepsilon$. Pro nekonečnou množinu $A = \{1, 2, \ldots\}$ příslušná analogická věta neplatí bez dodatečných předpokladů.

Na závěr ještě poznamenejme, že „dnešní" věty o řešitelnosti systémů (M), (M') se prakticky neliší od výsledků, ke kterým dospěl Helly. Analogická tvrzení platí i pro systémy nerovnic.

Malý počet publikací nesnižuje Hellyovy zásluhy o rozvoj funkcionální analýzy. Spolu s Banachem, Rieszem, Hahnem, Wienerem, Hilbertem, Schmidtem a dalšími je počítán k jejím tvůrcům v řadě obsáhlých studií významných autorů (jmenujme některé: M. Kline, A. F. Monna, J. Dieudonné, M. Bernkopf, E. Hellinger a O. Toeplitz; podrobněji viz [3]) a je dodnes citován v řadě učebnic a monografií.

Eduard Helly nepatřil mezi matematiky, kteří se mohou pyšnit rozsáhlým seznamem prací nebo jmény věhlasných časopisů, v nichž publikují. Nebyl nikdy zvolen členem žádné učené společnosti, nebyly vydány jeho sebrané spisy a s výjimkou [3] o něm nebylo mnoho napsáno. Z. W. Birnbaum v dopise z r. 1979 (viz [3]) poznamenává: „Je skutečně dosti smutné, že takovému člověku je věnováno tak málo pozornosti, ačkoliv věty nesoucí jeho jméno jsou již polovinu století považovány za klasické. (...) Nelze se zbavit dojmu, že to byl dobrý člověk, který neměl v životě štěstí."

Přesto všechno patří dílo E. Hellyho k trvalým a přitom stále živým hodnotám matematického poznání. Mohl by si kdokoli z matematiků přát více?

Literatura

[1] S. Banach: *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales.* Fund. Math. *3* (1922), 133—181.

[2] S. Banach: *Théorie des opérations linéaires.* Monografje Matematyczne 1, Warszawa, 1932.

[3] P. L. Butzer, S. Gieseler, F. Kaufmann, R. J. Nessel und E. L. Stark: *Eduard Helly (1884 — 1943). Eine nachträgliche Würdigung.* Jber. d. Dt. Math.-Verein. *82* (1980), 128—151.

[4] L. Dancer, B. Grjunbaum, V. Kli: *Těorema Chelli i jejo priměněnija.* Mir, Moskva, 1968.

[5] J. Dieudonné: *History of Functional Analysis.* North Holland, Amsterdam, 1981.

[6] N. Dunford, J. T. Schwartz: *Linear Operators. Part I: General Theory.* Interscience Pub., New York, 1958. (existuje ruský překlad)

[7] B. Fuchssteiner, J. Horváth: *Die Bedeutung der Schnitteigenschaften beim Hahn-Banachschen Satz.* Jb. Überblicke Math. 1979, 107—121.

[8] H. Hahn: *Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen.* J. Reine Angew. Math. *157* (1927), 214—229.

[9] E. Helly: *Über lineare Funktionaloperationen.* Sitzber. Akad. Wiss. Wien *121* (1912), 265—297.

[10] E. Helly: *Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten.* Monatsh. Math. Phys. *31* (1921), 60—91.

[11] E. Helly: *Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten.* Jber. d. Dt. Math.-Verein. *32* (1923), 175—176.

[12] H. Hochstadt: *Eduard Helly, Father of the Hahn-Banach Theorem.* The Math. Intelligencer *2* (1980), 123—125.

[13] S. R. Lay: *Convex Sets and their Applications.* Wiley, New York, 1982.

[14] I. Netuka, J. Veselý: *Ivar Fredholm a počátky funkcionální analýzy.* Pokroky MFA *22* (1977), 10—21.

[15] I. Netuka, J. Veselý: *F. Riesz a matematika dvacátého století.* Pokroky MFA *25* (1980), 128 — 138.
[16] F. Riesz: *Sur certain systèmes singuliers déquations intégrales.* Ann. École Norm. Sup. *28* (1911), 33—62.
[17] F. Riesz: *Les systèmes déquations linéaires à une infinité dinconnues.* Gautheir-Villars, Paris, 1913.
[18] W. Rudin: *Analýza v reálném a komplexním oboru.* Academia, Praha, 1977.
[19] A. E. Taylor: *Úvod do funkcionální analýzy.* Academia, Praha, 1973.
[20] I. Bárány, M. Katchalski, J. Pach *Helly's theorem with volumes.* Amer. Math. Monthly *91* (1984), 362—365.

BDF neboli věta o hlavních osách v nekonečné dimenzi*)

*P. R. Halmos***)

Nejslavnější výsledek z konečněrozměrné lineární algebry je tzv. věta o hlavních osách: reálné symetrické matice lze diagonalizovat. Nekonečněrozměrné zobecnění se nazývá spektrální větou; to je stará věc. Mnohem hlubší a okázalejší nekonečná verze je současně mnohem novějšího data; byla objevena v roce 1973 Brownem, Douglasem a Fillmorem (BDF). Jejich příspěvek má dvě části: proniknutí do struktury a konstrukci důkazu. Proniknutí je důvtipné a krásné; důkaz je komplikovaný a obtížný. Domnívám se, že důkaz se jednoho dne zjednoduší. Dokud tomu tak nebude, každý příspěvek podobný našemu může pouze popsat proniknutí.

Diagonalizace

Pro danou reálnou symetrickou matici A nalezněme její vlastní čísla (kořeny charakteristické rovnice) a příslušnou ortogonální bázi vlastních vektorů délky 1. Proces diagonalizace lze popsat dvěma ekvivalentními způsoby: geometricky a algebraicky. (1) Vyjádřete lineární zobrazení, které matice A definuje, jako matici vzhledem k výše

*) Tento článek je zápisem přednášky na pozvání na denverském zasedání MAA 7. ledna 1983. Název přednášky byl *Jak se zbavit malých matic neboli Co vlastně udělali Brown, Douglas a Fillmore v roce 1973?*

**) Údaje o autorovi viz PMFA *27*, č. 5 (1982), str. 280—281.

Reprinted from the "Notices of the American Mathematical Society", *BDF or the Infinite Principal Axis Theorem*, P. R. Halmos, June, 1983, pages 387—391, by permission of the American Mathematical Society.