Ivan Netuka; Jiří Veselý
Integrální rovnice v teorii potenciálu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 28 (1983), No. 1, 22--38

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138835

Pokud jde o jadernou fyziku, je třeba upozornit na jednu oblast, která se jeví jako nejperspektivnější. Nedávno byla teoreticky odhalena možnost existence anomálních (superhustých, supertěžkých a supernabitých) jader související s pionovou nestabilitou vakua. Přítomnost pionového kondenzátu výrazně mění mnohé důležité charakteristiky jaderné látky. Teoretické výpočty připouštějí možnost existence kondenzátu v obyčejných jádrech. Pionová kondenzace vede k řadě zajímavých jevů i v astrofyzice (neutronové hvězdy).

Vážené soudružky a soudruzi,

pokusil jsem se upozornit na předpokládaný vývoj v některých oblastech fyziky, hlavně v těch, které jsou předmětem výzkumu ve Fyzikálním ústavu ČSAV. Oblast fyziky je přirozeně daleko širší. Předpokládám, že perspektivní rozvoj dalších fyzikálních směrů, důležitých pro naše národní hospodářství, jako je biofyzika a další, bude předmětem jednání v jednotlivých sekcích.

Z toho, co jsem uvedl hlavně v první části svého vystoupení, lze soudit v konfrontaci s perspektivním rozvojem jednotlivých oblastí fyziky, na možné aplikace v inovační politice naší průmyslové i zemědělské výroby.

Snažili jsme se, aby již v této pětiletce výsledky výzkumu ve fyzice vyústily v aplikace, kterým přikládáme mimořádný význam. Některé z nich jsme zařadili mezi cílové projekty základního výzkumu.

Z toho, co jsem zde uvedl při konfrontaci hlavních směrů vědeckotechnického rozvoje s předpokládaným rozvojem fyziky v příštím období s časovým horizontem roku 2000 je patrno, že fyzika může a musí intenzívnějším způsobem přispět k vědeckotechnickému rozvoji a že výsledky bádání v oblasti fyziky mohou výrazným způsobem přispět k inovaci našeho průmyslu tak, jak je uvedeno v heslu naší 7. konference. Jsem přesvědčen, že jednání v plénu i v jednotlivých sekcích to potvrdí.

Integrální rovnice v teorii potenciálu

Ivan Netuka, Jiří Veselý, Praha

Jednou z nejstarších metod řešení okrajových úloh teorie potenciálu je metoda integrálních rovnic. V učebnicích věnovaných rovnicím matematické fyziky patří ke klasickým partiím. Její velký vliv na rozvoj funkcionální analýzy je obecně známý (srv. [3]), méně je však znám rozsah zpětného vlivu, který vedl k renesanci metody integrálních rovnic. S nejdůležitějšími výsledky z této oblasti se pokusíme čtenáře přístupnou formou seznámit.

1. Trochu historie a fyziky

O vznik matematického popisu gravitačního pole se přičinili Euler, Lagrange a Laplace. V osmdesátých letech 18. století se začalo chápat určení gravitačního pole tělesa jako určení funkce, jejíž gradient v bodech vně tělesa popisuje velikost a směr působení gravitační síly. Pro tuto funci se ustálilo jméno *potenciál*. Později se ukázalo, že problémy elektrostatiky a magnetismu vedou též ke studiu potenciálů; toto studium v pracích Greena a Gausse přerostlo ve zrod samostatné matematické disciplíny – teorie potenciálu. Její úzký vztah k rovnicím matematické fyziky se váže k jednomu z prvních poznatků o vlastnostech potenciálů – velmi brzo bylo známo, že gravitační potenciál tělesa vyhovuje v prostoru mimo těleso parciální diferenciální rovnici, kterou v $\mathbb{R}^m$ zapisujeme ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 . \tag{1}$$

Výraz vlevo se píše obvykle zkráceně ve tvaru Δu, kde Δ je tzv. Laplaceův operátor.

Představme si v prostoru umístěný vodič izolovaný od vnějšího prostředí (např. kovovou kouli umístěnou na skleněném podstavci). Nabijeme-li tento vodič nábojem Q, vytvoří tento náboj na povrchu vodiče „nekonečně tenkou vrstvu". Přitom výsledné silové pole bude uvnitř vodiče nulové. Budeme-li mít v blízkosti jiný nabitý vodič, rozloží se Q tak, aby silové působení z druhého vodiče „vyrušil", tj. aby výsledné pole uvnitř koule bylo opět nulové. Tyto poznatky experimentálně odvodil již Coulomb.

Fyzikální intuice nás stejně jako matematický popis přivedou k poznatku, že potenciál vně vodiče závisí nejen na velikosti povrchu vodiče a na velikosti Q, ale též na tvaru vodiče. Určení tohoto potenciálu při daném rozložení náboje na hranici je jedním ze základních problémů. Dalším je tzv. základní problém elektrodynamiky, jehož vyšetřování se již v polovině minulého století věnovali Thompson (lord Kelvin) a Kirchhoff. Jestliže se náboj na vodiči ustáleně pohybuje („teče"), potom intenzitě elektrického pole E odpovídá elektrický potenciál Φ, který na vodiči vyhovuje opět rovnici (1) a závisí samozřejmě na tom, kterou částí hranice a v jakém množství náboj přitéká, resp. odtéká. Určení potenciálu Φ je možné, známe-li – fyzikálně řečeno – velikost náboje protékajícího libovolnou částí povrchu vodiče. Pro nás je podstatné pouze to, že zmíněné fyzikální problémy vedou k formulaci základních okrajových úloh, kterými se budeme zabývat.

2. Základní matematický aparát

Čtenáři postačí k pochopení podstaty problémů jen intuitivní představa o základních pojmech, složitější pojmy se pokusíme přístupnou formou objasnit. Budeme pracovat v $\mathbb{R}^m$, $m \geqq 3$; pro názorné představy je vhodný prostor $\mathbb{R}^3$. Je-li $G \subset \mathbb{R}^m$ otevřená množina, říkáme, že *funkce u je třídy C^k na G* (píšeme $u \in C^k(G)$), má-li na G spojité parciální derivace až do řádu k. Zápis $f \in C(M)$ značí, že f je spojitá funkce na množině M.

Funkce $u \in C^2(G)$, pro kterou je $\Delta u = 0$, se nazývá *harmonická funkce* na G. Na-příklad lineární funkce jsou harmonické na celém prostoru R^m. Existují-li všechny parciální derivace $\partial u / \partial x_i (z)$ funkce u v bodě $z \in \mathbb{R}^m$, nazývá se vektor grad $u(z) := (\partial u / \partial x_1, \ldots, \partial u / \partial x_m)(z)$ *gradientem* funkce u; grad u je tedy vektorová funkce. Je-li Γ jednotková sféra, tj. $\Gamma = \{z; |z| = 1\}$, pak pro pevně zvolený vektor $n \in \Gamma$ a $u \in C^1(G)$ je skalární součin n . grad u roven *směrové derivaci* $\partial u / \partial n$ funkce u ve směru n. Lehce se ověří, že směrová derivace harmonické funkce u je opět harmonická funkce.

Podobně není obtížné nalézt nenulovou sféricky symetrickou funkci harmonickou na $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Tato úloha vede na jednoduchou diferenciální rovnici v jedné proměnné, neboť sféricky symetrická funkce je na každé sféře tvaru $\{z; |z| = r\}$ konstantní. Označíme-li $A_m = A$ plošnou velikost sféry $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$, je vhodné tuto funkci normalizovat a položit

$$h_0(x) = \frac{1}{(m-2)A} |x|^{2-m}, \tag{2}$$

kde $|\ldots|$ značí eukleidovskou normu. Obvykle ještě klademe $h_0(0) = \infty$. Z fyzikálního hlediska je h_0 v podstatě potenciál jednotkového náboje umístěného v počátku (ve smyslu teorie distribucí platí $-\Delta h_0 = \delta_0$, kde δ_0 je Diracova míra soustředěná v počátku – v tom byl smysl prováděné normalizace; funkci $-h_0$ nazýváme též *fundamentální řešení* rovnice (1)).

Klademe-li $h_z(x) := h_0(z - x)$, mají lineární kombinace funkcí h_z fyzikální význam potenciálů soustav konečně mnoha nábojů. Např.

$$p(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j h_{z_j}(x) \tag{3}$$

je potenciál systému nábojů o velikostech α_j umístěných v bodech z_j, $j = 1, \ldots, k$. Vyšetřováním potenciálů tohoto typu v $\mathbb{R}^3$ začínala „prehistorie" teorie potenciálu. Snadno se ověří, že je-li $G \subset \mathbb{R}^m$ otevřená, pak pro všechna $z \notin G$ jsou harmonické na G nejen funkce h_z, ale i jejich směrové derivace (je opět $|n| = 1$)

$$\frac{\partial h_z}{\partial n} : x \mapsto n \,.\, \mathrm{grad}\, h_z(x)$$

a jejich lineární kombinace (tečkou značíme zde i dále skalární součin).

3. Dirichletova a Neumannova úloha

V motivačních úvahách budeme předpokládat, že $G \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a že její hranice $\partial G = B$ je omezená (a tedy kompaktní) hladká plocha třídy C^2; přesněji řečeno, předpokládáme, že ke každému bodu $y \in B$ existuje okolí U_y a prosté zobrazení Ψ množiny $U_y \cap B$ na otevřenou množinu $V \subset \mathbb{R}^{m-1}$ tak, že inverzní zobrazení $\Psi^{-1} : V \to U_y \cap B$ je popsáno $(m - 1)$ funkcemi z $C^2(V)$ a jeho Jacobiho matice má všude na V maximální hodnost (intuitivně: Ψ^{-1} je parametrizace „kousku B kolem y"). Dále se tento předpoklad ještě častěji vyskytne – budeme vždy hovořit stručně o množině G

s hladkou hranicí. Umožňuje nám pracovat s pojmy (zde stačí čtenáři pouze jejich intuitivní chápání) jako je např. povrchová míra, tečná rovina apod. *Vnější normálu* $n(y)$ chápeme vždy jako jednotkový vektor kolmý k tečné (nad)rovině k B s bodem dotyku y a směřující „ven z G“, tj. pro všechna dostatečně malá $t > 0$ je $y + tn(y) \notin G$.

Zformulujme matematicky úlohy, na něž vedou problémy zmíněné v části 1: *K dané funkci $g \in C(B)$ nalezněte funkci $v \in C(G \cup B)$ takovou, že $v|_G$ je harmonická funkce a $v|_B = g$* (užíváme obvyklého označení pro restrikce). Je-li množina G neomezená, požadujeme navíc, aby $\lim\limits_{|x| \to \infty,\, x \in G} v(x) = 0$. I když byla tato úloha formulována (pro $\mathbb{R}^3$) již v Greenově práci z r. 1828, bývá obecně nazývána *Dirichletova úloha*; budeme ji stručně značit (D).

Neumannova úloha (N) žádá *nalézt k dané funkci $g \in C(B)$ harmonickou funkci w na G takovou, aby její normální derivace $\partial w/\partial n$ splývala s g.* (Pro neomezenou množinu G opět žádáme „anulování w u nekonečna“ obdobně jako v případě úlohy (D).) Podrobněji tato podmínka říká, že pro každý bod $y \in B$ platí $n(y) \,.\, \operatorname{grad} w(x) \to g(y)$ při $x \to y$, $x \in G$, kde $n(y)$ je vnější normála ke G v bodě y. Je zde ještě jedna podmínka omezující možnou volbu g: integrál z g přes hranici B vzhledem k povrchové míře je roven 0.

Smysl poslední podmínky osvětlíme pomocí fyzikální interpretace: je-li $C \subset B$ „rozumná“ množina, pak (integrujeme vzhledem k povrchové míře)

$$\int_C \frac{\partial w}{\partial n}(y)\, \mathrm{d}S(y) = v(C) \tag{4}$$

je „tok náboje“ s odpovídajícím elektrickým potenciálem w částí C hranice B. Protože vyšetřujeme ustálený tok, nedochází k růstu nebo poklesu celkového náboje na „vodiči“ G, a tedy celkový tok hranicí $v(B)$ je roven 0.

Je na místě několik vysvětlujících poznámek. Označení „Neumannova úloha“ je z hlediska priority vhodnější než u (D), neboť za definitivní formulaci (N) vděčíme F. Neumannovi. Povšimněme si toho, že při formulaci (D) a (N) hladkost hranice B je pro (D) nepodstatná, zatímco u (N) jsme na ní podstatně závislí: potřebujeme mít definovánu normálu $n(y)$ všude na B. Z fyzikálního hlediska je toto omezení poněkud nepřirozené, stačilo by popsat „určující tok“ z okrajové podmínky přímo pomocí funkce $v(C)$, definované na vhodných podmnožinách $C \in B$ — hladkost je do úlohy zatažena přes formulku (4). Jinak řečeno, místo snadno fyzikálně interpretovatelné množinové funkce v se ve znění (N) objevuje její hustota vzhledem k povrchové míře, která je „fyzikálně nenázorná“.

4. Metoda integrálních rovnic

Zmínili jsme se již o tom, že např. funkce p v (3) je harmonická na G, zvolíme-li body z_i na B nebo obecněji mimo G. Předpokládat, že by pro každou g z okrajové podmínky v (D) a (N) bylo možné vyjádřit řešení těchto úloh ve tvaru (3) by bylo přílišným optimismem. Zkusíme je však hledat ve tvaru obecnějším. Položme pro $f \in C(B)$

$$(5) \qquad Uf(x) = \int_B f(z)\, h_z(x)\, \mathrm{d}S(z)\,, \quad Vf(x) = -\int_B f(z)\, n(z)\,.\, \mathrm{grad}\, h_z(x)\, \mathrm{d}S(z)\,.$$

Funkce Uf a Vf nejsou na rozdíl od p *konečnými* kombinacemi harmonických funkcí na G, jsou to však jakési „nekonečné spojité kombinace" funkcí h_z, resp. jejich směrových derivací. Dá se ukázat, že jsou též harmonické na G. Funkce Uf se nazývá *potenciál jednoduché vrstvy a Vf potenciál dvojvrstvy* (*s hustotou f*). Vzhledem k (2) lze vyjádření Vf uvést na tvar obvyklý v učebnicích matematické fyziky

$$(6) \qquad Vf(x) = \frac{1}{A} \int_B f(z)\, \frac{n(z)\,.\,(z - x)}{|z - x|^m}\, \mathrm{d}S(z)\,.$$

Za našich předpokladů jsou funkce Uf, Vf definovány na $\mathbb{R}^m$ a lze dokázat, že Uf je na celém prostoru spojitá. Zkusme řešit nejprve úlohu (D). Zdánlivě by stačilo nalézt $f \in C(B)$ tak, aby platilo

$$(7) \qquad Uf = g \text{ na } B\,.$$

Ale i při našich předpokladech o G rovnice (7) nemusí mít řešení pro každou $g \in C(B)$ (jde o integrální rovnici prvního druhu). Jinak řečeno, funkcí Uf, $f \in C(B)$, je málo na to, abychom každé řešení (D) pro $g \in C(B)$ mohli vyjádřit jako Uf s vhodnou funkcí f.

Zkusíme tedy pracovat s funkcemi Vf. První obtíž spočívá v tom, že Vf nemusí být spojitá na $\mathbb{R}^m$ a dokonce ani na $G \cup B$. Lze ji však vždy z G spojitě rozšířit na $G \cup B$ – hodnoty rozšíření v bodech hranice B jsou dány pomocí tzv. *věty o skoku*. Označme $G' = \mathbb{R}^m \setminus \bar{G}$. Potom platí

$$(8) \qquad \lim_{x \to y,\, x \in G} Vf(x) = Vf(y) + \tfrac{1}{2} f(y)\,,$$

$$(8') \qquad \lim_{x \to y,\, x \to G'} Vf(x) = Vf(y) - \tfrac{1}{2} f(y)$$

pro každé $y \in B$, přibližujeme-li se k hranici B „zevnitř" (limita vzhledem ke G) nebo „zvenčí" (limita vzhledem ke G'). Odečteme-li rovnici (8') od (8), je vidět, že při přechodu hranice B má Vf v bodě y „skok" rovný právě $f(y)$; odtud je odvozen název věty. Definujme operátor $V : f \mapsto Vf|_B$. Porovnáním pravých stran v (8), (8') a funkce g z okrajové podmínky v úloze (D) dostaneme po jednoduché úpravě integrální rovnice

$$(9) \qquad (I + 2V) f = 2g\,, \quad (I - 2V) f = -2g\,,$$

na jejichž řešení lze převést řešení úlohy (D) pro G nebo G' (někdy se mluví o vnitřní a vnější úloze). Operátor I je identický operátor na $C(B)$.

Zatímco (7) nemusela mít obecně řešení, první z rovnic v (9) je za našich předpokladů řešitelná pro každou funkci $g \in C(B)$; u druhé je situace o trochu složitější. Poznamenáváme, že to jsou tzv. integrální rovnice druhého druhu. Řešíme-li tedy úlohu (D) pro G, nalezneme nejprve řešení f první z rovnic (9) (je to funkce z $C(B)$) a pak pomocí (5) nebo (6) nalezneme řešení $v \in C(G \cup B)$ úlohy (D) ve tvaru $v = Vf$ na G, resp. $v = g$ na B. Proto se o této metodě někdy mluví jako o *metodě nepřímé*.

Ukazuje se, že k řešení úlohy (N) se naopak hodí potenciál Uf. Pomocí věty o skoku *pro normální derivaci Uf* dojdeme k integrálním rovnicím, na něž lze převést řešení úlohy (N) pro každou z obou oblastí G, G'. Přitom objevíme zajímavou souvislost: řešíme-li úlohu (D) pro jednu z množin G, G' a úlohu (N) pro zbývající množinu, jsou nalezené integrální rovnice velice blízké, vystupují v nich *adjungované integrální operátory* (jádro jednoho dostaneme z druhého jádra záměnou proměnných x, z).

To, že jsme se dohodli na předpokladu hladkosti B („B je třídy C^2"), zaručuje řešitelnost rovnic (9), resp. odpovídajících rovnic pro úlohu (N). Při „méně hladké" B se totiž rovnice „zhorší" – např. věta o skoku pro jednotkovou krychli $G \subset \mathbb{R}^3$ dává pro Vf

$$\lim_{x \to y, x \in G} Vf(x) = Vf(y) + \sigma(y) f(y),$$

kde pro body uvnitř stěn krychle je opět $\sigma(y) = \frac{1}{2}$, avšak uvnitř hran je $\sigma(y) = \frac{3}{4}$ a ve vrcholech dokonce $\sigma(y) = \frac{7}{8}$. Odtud je vidět, že i vyjádření příslušného operátoru bude komplikovanější.

Zhruba lze říci toto: pro G s dosti hladkou hranicí B (např. třídy C^2) má jádro odpovídajícího integrálního operátoru slabou singularitu. V tom případě je operátor, resp. některá z jeho iterací kompaktní a — velmi zhruba řečeno — pro rovnice platí podobné věty jako věty o řešitelnosti soustav lineárních rovnic (tzv. Fredholmova alternativa; srv. [3]).

5. Nehladký případ

Rozdílnost povahy okrajových podmínek u úloh (D) a (N) upozorňuje na diametrálně odlišnou situaci při přechodu k množinám s nehladkou hranicí.

Řekli jsme si již, že úlohu (D) lze formulovat bez jakýchkoli omezení na hranici množiny G. Jsou známy nutné a postačující podmínky zaručující *existenci* řešení pro každou spojitou okrajovou podmínku. Velmi hluboce je propracována např. Perronova metoda, která přiřazuje každé spojité okrajové podmínce zobecněné řešení, které splývá s řešením vždy, pokud existuje. Tato metoda tedy poskytuje důkaz existence – nedává však konkrétní reprezentaci řešení.

Na druhé straně *metoda integrálních rovnic dává vedle existence řešení i jeho integrální reprezentaci* ve formě potenciálů. Je zajímavá i z hlediska numerického řešení úlohy a navíc přitom při její aplikaci vystupují úlohy (D) a (N) pro obory G, G' v jakési symetrii, které lze dát přesný matematický smysl. Je tedy zvládnutí nehladkého případu uvedenou metodou žádoucí a naléhavé zejména pro Neumannovu úlohu, o níž je známo daleko méně než o Dirichletově úloze. Zbývá však principiální otázka: jak na to?

Než stanovíme plán postupu, uveďme opět několik historických poznámek. Na rozhraní minulého a tohoto století prodělala teorie integrálních rovnic rychlý vývoj. Řada matematiků, např. Poincaré, Ljapunov a Fredholm, přispěla k možnosti aplikovat metodu řešení (D) a (N) integálními rovnicemi v případě, kdy G měla hladkou hranici. Dospělo se k poznání závislosti na míře hladkosti: zhruba řečeno, „čím horší hranice, tím horší rovnice". I vyšetřování nehladkého případu pokračovalo, výsledky však přibývaly pomalu a objevovaly se ve velkých časových odstupech (Korn 1902, Zaremba 1904, Carleman 1916, Radon 1919, Magnaradze 1939 aj.). Přitom základní problém byl jasný; formuloval ho již v r. 1911 Plemelj asi takto: *nalézt co možná nejslabší podmínky na kvalitu hranice B zaručující možnost řešení úloh* (D) a (N) *metodou integrálních rovnic.*

Ještě v šedesátých letech převládal názor, že „malá hladkost“ tvoří principiální překážku – metoda integrálních rovnic se chápala ve vztahu k řešení úloh (D) a (N) jako zajímavý klasický, nicméně ne zcela účinný nástroj, kterým nás vybavili přední matematikové minulosti. Různá hodnocení vyjadřují vcelku totéž – citujeme z dnes již klasické učebnice funkcionální analýzy, kterou napsali F. Riesz a Sz. Nagy: „*Jakkoli je tato metoda elegantní, je nevýhodná pro svoji nepoužitelnost bez silně omezujících předpokladů o hranici uvažované oblasti.*“

6. Popis hledaného

Chceme-li metodu integrálních rovnic obhájit proti podobným (a někdy ještě příkřeji formulovaným) odsudkům, musíme ji čtenářům, kteří zde zastupují porotu, náležitě přiblížit a ukázat, že „obžaloba“ nemá v ruce žádné důkazy. Užijeme-li dalších právnických příměrů, je zbytek článku věnován kauze „hladkost versus metoda integrálních rovnic“. Nejde však o nalezení podílu viny, ale o rehabilitaci neprávem odsouzené metody.

Sledovali jsme jisté sblížení úloh (D) a (N) při užití metody integrálních rovnic – pokusíme se proto postihnout jednotlivé kroky řešení v abstraktní podobě. Je třeba:

a) *sestrojit vhodnou třídu harmonických funkcí na G*;
b) *umět pro ni vyšetřit hraniční chování ve smyslu zadané „hraniční podmínky“*;
c) *umět nalézt k třídě hraničních podmínek metodu výběru harmonické funkce s předepsaným hraničním chováním.*

Za těmito jednotlivými body by měl čtenář tušit zavedení jistých „zobecněných“ potenciálů v bodě (a), vytvoření náhražky vět o skoku v bodě (b) a nalezení podmínek řešitelnosti jakýchsi zobecněných integrálních rovnic v rámci (c). Při každém kroku se zřejmě setkáme s jistými omezujícími podmínkami; připustíme-li, že kroky (a)–(c) jsou neoddělitelnou částí hledané metody, pokud má zobecňovat metodu integrálních rovnic, rádi bychom přesně vymezili prostor: chtěli bychom znát podmínky (podle možnosti nutné a postačující), za kterých lze jednotlivé kroky realizovat.

Ještě poznámku ke strategii. Nejprve si připravíme potřebné nástroje, z nichž většina má podstatně širší užití a patří dnes ke standardním prostředkům moderní analýzy. Potom budeme atakovat nejprve úlohu (N) v trochu pozměněné formě. Je pravděpodobné, že řešení této úlohy přinese i řešení úlohy (D); na řešení úlohy (N) nám záleží v jistém směru více; vždyť u ní jsme byli na hladkosti závislí již při formulaci. Je zde tedy určitá naděje, jakož i jistý prioritní zájem ovlivňující další postup.

7. Měření povrchu množiny

Jedním z technických problémů, na který narazíme, bude nutnost nahradit nějak povrchovou míru, kterou jsme v případě množiny *G* s hladkou hranicí považovali za intuitivně známou. Nechť je $M \subset \mathbb{R}^m$ libovolná omezená množina. Potom lze pro každé $\varepsilon > 0$ sestrojit posloupnost množin M_j pokrývajících M, pro něž je diam $M_j \leqq \varepsilon$ pro všechna j (pokrytí je tedy v jistém smyslu „jemné"). Položme pro přirozené $k \leqq m$

$$H_k^\varepsilon(M) = V_k \inf \sum_j \left(\frac{\operatorname{diam} M_j}{2}\right)^k,$$

kde vpravo se bere infimum přes všechna pokrytí $\{M_j\}$, pro něž je diam $M_j \leqq \varepsilon$, $j = 1, 2, \ldots$; konstanta V_k je objem jednotkové koule v $\mathbb{R}^k$.

Užijeme-li monotonie vzhledem k parametru ε, je existence následující limity zřejmá

(10) $$H_k(M) := \lim_{\varepsilon \to 0+} H_k^\varepsilon(M).$$

Číslo $H_k(M)$ je tzv. *(vnější) k-rozměrná Hausdorffova míra* množiny $M \subset \mathbb{R}^m$. Formální definice H_k je srovnatelně složitá se zavedením Lebesgueovy míry. Lze ukázat, že v případě $k = m$ splývá $H_m(M)$ s (vnější) lebesgueovskou mírou množiny M. Pro nás je podstatné to, že v případě, že M je jednoduchá hladká k-rozměrná plocha, splývá $H_k(M)$ s k-rozměrnou mírou známou z geometrie.

Speciálně pro otevřenou množinu G s kompaktní hladkou hranicí splývá $H_{m-1}(B)$ s povrchovou mírou $S(B)$, ale $H := H_{m-1}$ je definována i za mnohem obecnější situace. Ponechme stranou otázky měřitelnosti a spokojme se s konstatováním, že vhodné zobecnění povrchové míry máme k dispozici.

8. Zobecněná normála

Má-li množina G hladkou hranici, lze se snadno přesvědčit o jedné zajímavé vlastnosti vnější normály $n(y)$. Definujme *hustotu množiny M v bodě x*:

(11) $$d_M(x) := \lim_{r \to 0} \frac{\operatorname{vol}(M \cap \Omega_r(x))}{\operatorname{vol}(\Omega_r(x))};$$

zde vol značí m-rozměrnou lebesgueovskou míru a $\Omega_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^m; |x - y| < r\}$. Vnější normála $n(y)$ množiny G v bodě $y \in B$ je zároveň i vnější normálou jednoho z poloprostorů určeného tečnou rovinu k B jdoucí bodem y. Označíme-li tento poloprostor ϱ, pak pro

$$M = (G \setminus \varrho) \cup (\varrho \setminus G)$$

platí $d_M(y) = 0$. Zhruba řečeno: poloprostor ϱ lokálně dobře aproximuje G v bodě y („dobře" zde odpovídá příslušné nulové hustotě).

Tuto vlastnost užijeme k definici zobecněné normály (ve Federerově smyslu). Je-li G libovolná otevřená množina a y bod její hranice B, pak mezi všemi poloprostory $\varrho_n = \{x \in \mathbb{R}^m; n \,.\, (x - y) \leqq 0\}$, kde n probíhá všechny jednotkové vektory (tj. $n \in \Gamma$), existuje *nejvýše* jeden, který dobře aproximuje G v bodě y ve smyslu předchozího odstavce. Pokud takový prostor ϱ_n existuje, definujeme *zobecněnou vnější normálu* $\hat{n}(y)$ jako (vnější) normálu n poloprostoru ϱ_n. Užitečnost tohoto pojmu ilustruje jisté zobecnění Gaussovy-Greenovy věty.

9. Perimetr množiny a Gaussova-Greenova věta

Označme $\mathscr{D}$ systém všech funkcí nekonečně diferencovatelných v $\mathbb{R}^m$, z nichž každá se dosti daleko od počátku anuluje (přesněji: její nosič $\overline{\{x; f(x) \neq 0\}}$ je kompaktní). Je-li $G \subset \mathbb{R}^m$ otevřená množina s hladkou hranicí B a $\Phi = [\Phi_1, \ldots, \Phi_m]$, je vektorová funkce na $\mathbb{R}^m$ se složkami $\Phi_i \in \mathscr{D}$, $i = 1, \ldots, m$, platí

$$\int_G \operatorname{div} \Phi(x)\, \mathrm{d}x = \int_B \Phi(z) \,.\, n(z)\, \mathrm{d}S(z)\,, \tag{12}$$

kde vpravo $n(z)$ označuje jednotkový vektor vnější normály a integruje se vzhledem k povrchové míře. Vzorec (12), převádějící integraci funkce

$$\operatorname{div} \Phi := \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_m}$$

vzhledem k lebesgueovské míře na $\mathbb{R}^m$ na integraci přes B vzhledem k povrchové míře S, bývá spojován se jmény Gausse, Greena a Ostrogradského.

Označme $\mathscr{D}^1 = \{\Phi; \Phi_i \in \mathscr{D}, |\Phi|^2 = \sum \Phi_i^2 \leqq 1\}$. Potom pro každou $\Phi \in \mathscr{D}^1$ je integrál ve vzorci (12) vpravo nejvýše roven $S(B)$, tj. povrchové míře hranice B množiny G. Snadno lze ukázat, že číslo

$$P(G) := \sup \left\{ \int_G \operatorname{div} \Phi(x)\, \mathrm{d}x;\ \Phi \in \mathscr{D}^1 \right\} \tag{13}$$

(srovnej s (12)) je definováno i pro obecnější množiny G (s nehladkou hranicí). Toto číslo nazýváme *perimetr množiny* G. V případě G s hladkou kompaktní hranicí je zřejmě $P(G) = S(B)$ a toto číslo je konečné. Dále je např. známo, že perimetr rovinné oblasti ohraničené Jordanovou křivkou je roven délce této křivky. Je-li však $G = Q \setminus \bigcup_{n=2} Z_n$, kde $Q \subset \mathbb{R}^2$ je otevřený jednotkový čtverec a Z_n je „zářez" $\{^1/n\} \times \langle 0, 1/n \rangle$, pak $P(G) = 4$, i když součet délek „zářezů" je $+\infty$. Rozdíl $Q \setminus G$ má dvojrozměrnou míru 0, a proto $P(G) = P(Q)$ podle definice. Všimněme si také, že v žádném bodě ze $Z_n \cap Q$ neexistuje zobecněná normála.

Množiny s konečným perimetrem jsou v jistém smyslu právě ty množiny, pro něž lze vhodně zobecnit Gaussovu-Greenovu větu. Platí totiž: *Je-li $G \subset \mathbb{R}^m$ množina s konečným perimetrem a $\hat{B}$ množina všech bodů y její hranice B, v nichž existuje zobecněná normála $\hat{n}(y)$, pak pro každou Φ se složkami $\Phi_i \in \mathscr{D}$ platí*

$$\int_G \operatorname{div} \Phi(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\hat{B}} \Phi(z) \,.\, \hat{n}(z)\, \mathrm{d}H(z)\,; \tag{14}$$

vpravo se nyní integruje podle $(m - 1)$-rozměrné Hausdorffovy míry z části 7. Za zmínku stojí, že z „nekonečné hladkosti" funkcí Φ_i by bylo možno slevit a věta by zůstala v platnosti.

Samozřejmě že v případě G s hladkou hranicí vzorce (12) a (14) splývají: je totiž $B = \hat{B}$, $n = \hat{n}$ a integrace podle H je totéž co integrace podle S.

10. Cyklická variace

Připomeňme jeden poznatek z reálné analýzy funkcí jedné proměnné. Je-li $f \in C(\langle a, b \rangle)$, $f(\langle a, b \rangle) = \langle c, d \rangle$ a n_α je počet prvků (nemusí být konečný) množiny

$$\{t \in \langle a, b \rangle ; f(t) = \alpha\} ,$$

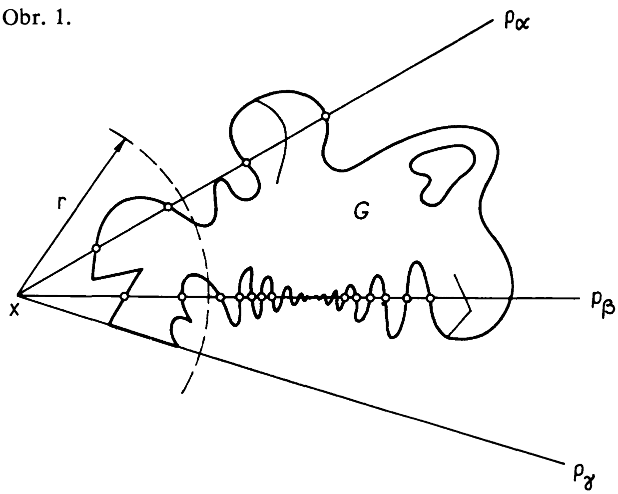
pak n_α je „rozumná“ nezáporná funkce proměnné α (může ovšem nabývat i nekonečných hodnot) a variaci funkce f přes $\langle a, b \rangle$ lze spočíst jako integrál z n_α přes interval $\langle c, d \rangle$. Toto tvrzení pochází od Banacha a čtenáři, který si načrtne graf po částech monotónní funkce, se bude z obrázku zdát „skoro zřejmé“.

Zkonstruujeme nyní v prostoru $\mathbb{R}^m$ podobným způsobem veličinu, které budeme říkat cyklická variace. Představme si otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^m$ a zvolme bod x (připojený obrázek poskytne představu – přirozeně, že však pro $m = 2$). Z bodu x vyšleme paprsek (polopřímku) p_α ve směru jednotkového vektoru α. Některé paprsky mohou protnout hranici B. Nám záleží na „podstatných“ průsečících s B, které budeme nazývat nárazy: řekneme, že $y \in p_\alpha$ je *nárazem* p_α na G, jestliže pro každé $r > 0$ mají obě množiny

$$(p_\alpha \cap \Omega_r(y)) \cap G , \quad (p_\alpha \cap \Omega_r(y)) \setminus G$$

kladnou lineární $(\equiv H_1)$ míru. Jinak řečeno, v každém okolí bodu $y \in p_\alpha$, který je nárazem na G, leží na p_α „hodně“ bodů z G i z $\mathbb{R}^m \setminus G$, přičemž „hodně“ se měří pomocí lineární míry.

Obr. 1.



(Na obrázku 1 leží na p_α čtyři nárazy, na p_γ neleží žádný náraz a na p_β leží nekonečně mnoho nárazů.) Počet nárazů p_α na G, které od x nejsou vzdáleny o více než r, $0 < r \leqq +\infty$, označíme $n_r(\alpha)$. (Na obr. 1 je $n_r(\alpha) = n_r(\beta) = 2$.) Tak získáváme „rozumnou“ nezápornou (a ne nutně všude konečnou) funkci $n_r(\alpha)$ proměnné $\alpha \in \Gamma$, kde Γ je jako obvykle jednotková sféra v $\mathbb{R}^m$.

Průměrný počet nárazů paprsků z bodu x je veličina, která nás zajímá: definujeme

$$(15) \qquad v_r^G(x) := \frac{1}{A}\int_\Gamma n_r(\alpha)\,\mathrm{d}H(\alpha)\,, \quad v(x) := v_\infty^G(x)\,;$$

připomínáme, že A je velikost jednotkové sféry Γ, tj. $A = S(\Gamma) = H(\Gamma)$. Veličina v je *cyklická variace*; chápeme ji jako funkci proměnné x. Pro názornost: zvolíme-li za G libovolnou otevřenou omezenou konvexní množinu v $\mathbb{R}^m$, pak pro $x \in G$ je $v(x) = 1$, zatímco pro $x \notin G$ je $v(x)$ dvojnásobek zorného úhlu, pod nímž „vídíme" G z bodu x (pokud míra „plného úhlu" je rovna 1, což je důsledek násobení faktorem A^{-1}). Toto srovnání s „úhlem viditelnosti hranice" bychom mohli pochopitelně dále rozvinout, ale čtenář již jistě pochopil, jak si má $v(x)$ představit.

11. Potenciál náboje

Zatím jsme v přípravných úvahách mluvili o elektrickém náboji. Nyní však se z něho stane ryze matematický objekt. *Nábojem* rozumíme konečnou σ-aditivní množinovou funkci definovanou na σ-algebře borelovských podmnožin prostoru $\mathbb{R}^m$. Je to v podstatě skoro míra až na fakt, že může nabývat hodnot obojího znaménka (s nábojem se dá pracovat jako s rozdílem dvou nezáporných měr) — někdy se pro náboj užívá označení „*znaménková míra*" (doslovný překlad anglického termínu „*signed measure*").

Snad neuškodí trocha filozofie na téma, proč do hry právě nyní vstupuje náboj. V hladkém případě měly úlohy (D) a (N) speciální souvislost — operátory v odpovídajících integrálních rovnicích (srovnej část 4) byly adjungované. Z funkcionální analýzy je známo, že „adjungovaný operátor působí na adjungovaném prostoru". Pracujeme-li u úlohy (D) s prostorem $C(B)$, měli bychom pracovat u úlohy (N) s adjungovaným prostorem, tj. s prostorem spojitých lineárních funkcionálů na $C(B)$. Zkušenější vědí, že jej lze v jistém smyslu ztotožnit s prostorem nábojů „sedících na hranici B". Další důvod záleží ve zkoumání hraničního chování — veličina $v(C)$ ze vzorce (4) není nic jiného než náboj v právě zavedeném smyslu a „rozumnost" množiny C je v tom, že půjde o borelovskou podmnožinu hranice B.

Pro každý náboj μ na $\mathbb{R}^m$ definujeme (srovnej s první formulkou v (5)) funkci

$$(16) \qquad U\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^m} h_z(x)\,\mathrm{d}\mu(z)\,,$$

kterou nazveme potenciálem náboje μ. Že nejde o nic nového, plyne ze srovnání (5) a (16); v (5) se totiž integruje podle náboje $\mathrm{d}\mu = f\,\mathrm{d}S$ (poslední rovnosti lze dát docela rozumný smysl).

12. Nová formulace úlohy (N)

Pokud nebude řečeno něco jiného, předpokládáme dále, že *G je otevřená množina v $\mathbb{R}^m$ s kompaktní hranicí B*. Vzniká problém: jak definovat normální derivaci funkce h harmonické na G, není-li o normále (dokonce ani zobecněné) ani řeči?

Je-li tedy h harmonická na G a je-li $|\mathrm{grad}\, h|$ funkce integrovatelná přes každou omezenou otevřenou podmnožinu množiny G, položme pro každou $\varphi \in \mathscr{D}$ (viz počátek části 9)

$$(17) \qquad (Nh)(\varphi) := \int_G \operatorname{grad} \varphi(x) \,.\, \operatorname{grad} h(x) \,\mathrm{d}x \,.$$

Není těžké nahlédnout, že vzorcem (17) je určen lineární funkcionál na $\mathscr{D}$ (tj. distribuce). O tomto funkcionálu Nh budeme říkat, že je to *zobecněná normální derivace* funkce h. To vyžaduje objasnění: představme si na okamžik, že omezená množina G má hladkou hranici B a že h je harmonická funkce v okolí G. Pomocí Gaussovy-Greenovy věty (srv. např. (12)) dostaneme

$$(18) \qquad (Nh)(\varphi) = \int_B \varphi(z)\,(n(z) \,.\, \operatorname{grad} h(z))\,\mathrm{d}S(z) = \int_B \varphi(z)\,\frac{\partial h(z)}{\partial n(z)}\,\mathrm{d}S(z)\,.$$

Hodnota posledního integrálu je známa pro každou $\varphi \in \mathscr{D}$. Odtud vidíme, že funkcionál Nh lze přirozeným způsobem „ztotožnit" s normální derivací $\partial h/\partial n$. Přesněji říkáme, že funkcionál Nh *slabě charakterizuje* $\partial h/\partial n$. Mimochodem, jsme velmi blízko „fyzikálního pojetí": je-li $C \subset B$ a umíme-li nalézt $\varphi \in \mathscr{D}$ tak, aby $\varphi|_C = 1$ a mimo C byla $|\varphi|$ co nejmenší, dává (18) přibližně $v(C)$ z formulky (4), píšeme-li místo h funkci w. Nová formulace (zobecněné) úlohy (N) je nyní nasnadě, zavedeme-li poslední potřebný pojem: je-li v náboj na $\mathbb{R}^m$, pak nejmenší uzavřená množina M, pro kterou platí $v(C) = v(C \cap M)$ pro každou borelovskou množinu $C \subset \mathbb{R}^m$, se nazývá *nosič* náboje v; značívá se zpravidla spt v. Slíbená *zobecněná Neumannova úloha* vypadá takto:

K danému náboji v s nosičem spt $v \subset B$ *máme najít takovou (integrovatelnou přes omezené otevřené množiny) harmonickou funkci w na množině G tak, aby platilo*

$$(19) \qquad (Nw)(\varphi) = \int \varphi \,\mathrm{d}v$$

pro každou funkci $\varphi \in \mathscr{D}$. Tuto úlohu budeme značit ($\mathbb{N}$).

Posun při zobecňování (N) na ($\mathbb{N}$) nenastal: v případě hladké hranice a náboje v speciálního tvaru (s hustotou g vzhledem k povrchové míře S) lze zapsat (19) s přihlédnutím k (18) ve tvaru

$$\int_B \varphi \frac{\partial w}{\partial n} \mathrm{d}S = \int_B \varphi g \mathrm{d}S$$

pro každou funkci $\varphi \in \mathscr{D}$ — odtud srovnáním dostáváme podmínku slabé rovnosti „$\partial w/\partial n = g$" z (N).

13. Řešení modifikované Neumannovy úlohy

Při řešení úlohy ($\mathbb{N}$) si připomeňme kroky (a)–(c) z části 6. Ještě však terminologickou poznámku: platí-li pro lineární funkcionál Nw na $\mathscr{D}$ (distribuci) rovnost (19) pro každou $\varphi \in \mathscr{D}$, říkáme, že funkcionál Nw *je reprezentován nábojem* v. Místo (19) pak stručně píšeme $Nw = v$.

Krok (a) lze provést tak, že budeme pracovat s potenciály $U\mu$ nábojů μ, jejichž nosiče leží v hranici B oblasti G. Množina všech těchto nábojů, jak jsme již připomněli, tvoří adjungovaný prostor k prostoru $C(B)$, který budeme značit $C^*(B)$. Lze ukázat, že pak $U\mu$ jsou harmonické funkce na G, pokud jsou na této množině konečné.

Inspirováni klasickým případem hledáme tedy řešení $(\mathbb{N})$ ve tvaru $w = U\mu$, kde $\mu \in C(B)$. Realizace kroku (b) z části 6 znamená nalézt podmínky, kdy je $NU\mu$ náboj pro všechna $\mu \in C^*(B)$. Bude-li $NU\mu$ náboj, bude to též náboj z $C^*(B)$ a tím převedeme $(\mathbb{N})$ na řešení „zobecněné integrální rovnice"

$$NU\mu = v \tag{20}$$

na prostoru $C^*(B)$.

Prvním krokem ke zjištění, kdy je $NU\mu$ náboj, je rozřešení této otázky pro $\mu = \delta_z$ (Diracova míra) při $z \in B$. (Z (16) vyplývá, že $U\mu$ je jakousi kombinací funkcí $h_z = U\delta_z$.)

Lze ukázat, že pro $z \in B$ platí

$$Nh_z = NU\delta_z \textit{ je náboj, právě když je } v(z) < \infty \tag{21}$$

(kde v je funkce definovaná formulí (15)). Hezkou aplikací principu stejnoměrné omezenosti známého z funkcionální analýzy se již dostane výsledek: *$NU\mu$ je náboj pro každé $\mu \in C^*(B)$, právě když*

$$V^G = \sup\{v(z); z \in B\} < \infty\,. \tag{22}$$

Máme tedy podmínku, kdy lze převést řešení úlohy $(\mathbb{N})$ na řešení rovnice (20) a je to podmínka nutná a postačující.

Tím je realizován pro $(\mathbb{N})$ krok (b) – ten další poněkud odložíme. Zde je namístě prozradit lákavou možnost zjednodušení: stačí totiž uvažovat pouze „podstatné body B" tvořící množinu B_e definovanou předpisem

$$B_e = \{x \in \mathbb{R}^m; \operatorname{vol}(\Omega_r(x) \cap G) > 0\,,\\ \operatorname{vol}(\Omega_r(x) \setminus G) > 0 \text{ pro všechna } r > 0\}\,.$$

Množina B_e je tedy B zmenšená o izolované body, zářezy atp. Dá se ukázat, že umíme-li řešit úlohu $(\mathbb{N})$ pro hranice splňující rovnost $B = B_e$, umíme ji řešit i v případě obecné hranice. Proto se dále *omezíme na množiny G, pro které platí $B_e = B$.*

14. Řešení Dirichletovy úlohy (D)

Vzhledem k důležité souvislosti úloh (D) a $(\mathbb{N})$, o níž se zmíníme v odstavci 15, předpokládejme, že $G \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina s kompaktní hranicí B, pro kterou je $B = B_e$.

Položme pro $z \in \mathbb{R}^m$

$$W_z(\varphi) = \int_G \operatorname{grad} \varphi(x) \,.\, \operatorname{grad} h_z(x)\, dx - \chi_G \varphi(z)\,, \tag{23}$$

kde χ_G je charakteristická funkce množiny G. Lze ukázat, že $W_z(\varphi)$ závisí pouze na hodnotách φ v okolí hranice B (to se dokáže pomocí aproximace množinami s hladkou hranicí); můžeme proto uvažovat pro každé $z \notin B$ pouze ta φ, která se anulují v okolí bodu z; tím se při $z \in G$ eliminuje vliv nepříjemné singularity funkce h_z v bodě z.

Budeme-li na okamžik předpokládat, že G má hladkou hranici, pak lze užít (12) a převést $W_z(\varphi)$ na tvar (pozor: užíváme toho, že $z \notin B$ a φ se anuluje v okolí z)

$$W_z(\varphi) = -\int_B \varphi(y)\,[n(y)\,.\,\mathrm{grad}\, h_z(y)]\,\mathrm{d}S(y)\,.$$

Srovnání s formulí (5) dává $W_z(\varphi) = V\varphi(z)$, má tedy dobrý smysl mluvit o $W_z(\varphi)$ jako o *zobecněném potenciálu dvojvrstvy*, považujeme-li ho při pevném φ za funkci proměnné z. Předpokladu hladkosti jsme se zbavili za cenu, že lze pracovat jen s nekonečně hladkými funkcemi $\varphi \in \mathcal{D}$; nyní je třeba tento systém nějak rozšířit. Postupujeme takto: Je-li $x \in \mathbb{R}^m$ a zobrazení $W_x : \varphi \to W_x(\varphi)$ je náboj, tj. platí-li pro nějaké $\omega_x \in C^*(B)$ a pro všechna $\varphi \in \mathcal{D}$

$$W_x(\varphi) = \int_B \varphi\,\mathrm{d}\omega_x\,,$$

stačí *definovat* pro každou $f \in C(B)$ hodnotu příslušného zobecněného potenciálu dvojvrstvy předpisem

(24) $$Wf(x) = \int_B f\mathrm{d}\omega_x\,.$$

Odpověď na otázku, kdy je W_x náboj, je podobná (21):

(25) $$W_x \textit{ je náboj, právě když je } v(x) < \infty\,.$$

Hodnota v jediném bodě nám nebude mnoho platná. Potřebujeme pracovat s Wf jako s funkcí na množině G. Zde se ukazuje zajímavá věc: konečnost cyklické variace v na G je ekvivalentní s její konečností *na mnohem menší podmnožině* (dokonce stačí konečná množina o $(m+1)$ bodech, které neleží v jedné nadrovině). Zároveň odtud plyne $P(G) < \infty$ (viz odst. 9).

Za předpokladu $P(G) < \infty$ je Wf dobře definovaná (harmonická) funkce na $\mathbb{R}^m \setminus B$, tj. na G i G'. Její hraniční chování však nemusí být „dobré" — není zaručena její spojitá rozšiřitelnost z G nebo G' na B. Zde se ukazuje, že *zobecněný potenciál dvojvrstvy je spojitě rozšiřitelný z G na $G \cup B$ a též z G' na $G' \cup B$, právě když platí* (22); tím máme proveden i krok (b) našeho obecného postupu z části 6.

Podmínka (22) zaručuje jak *omezenost* cyklické variace na celém $\mathbb{R}^m$, tak i *konečnost* $P(G)$. Za těchto předpokladů jde analogie původního a nového potenciálu dvojvrstvy ještě dále: pro všechna $x \in \mathbb{R}^m \setminus B$ platí obdoba formule (6)

(26) $$Wf(x) = \frac{1}{A}\int_B f(z)\,\frac{\hat{n}(z)\,.\,(z-x)}{|z-x|^m}\,\mathrm{d}H(z)\,.$$

(viz konec odstavce 9). Srovnáme-li tuto formulku s (6), vidíme, že zaměníme-li hladkost např. konečným perimetrem, stačí užít zobecněnou normálu a restrikci povrchové míry na „podstatnou" část hranice a vzoreček platí dál.

15. Sestavení rovnic ...

Čtenář se může ptát, proč jsme zavedli nové označení pomocí W a proč se omezujeme v (26) na body mimo B. Připomínáme, že jsme definovali $Wf(x)$ pro všechny body $x \in \mathbb{R}^m$ pomocí (24) a ne např. pomocí (26); na hranici B nedávají oba postupy totéž a analogie s Vf již mizí. Definici pomocí (24) jsme však nezvolili z obou možných náhodně – volba totiž zjednodušuje „větu o skoku". Pro $y \in B, f \in C(B)$ totiž platí

$$\lim_{x \to y,\, x \in G} Wf(x) = Wf(y) - f(y)\,, \qquad \lim_{x \to y,\, x \in G'} Wf(x) = Wf(y)\,. \tag{27}$$

Odtud a z (20) vyplývá, že řešení úloh ($\mathbb{N}$) a (D) lze převést na řešení operátorových rovnic (úlohu ($\mathbb{N}$) řešíme pro G, úlohu (D) pro G') v prostorech $C^*(B)$ a $C(B)$

$$NU\mu = \nu\,, \quad Wf = g\,, \tag{28}$$

právě když platí (22).

K souvislosti rovnic v (28) dodáme pro informovanější: označíme-li pro $f \in C(B)$, $\mu \in C^*(B)$

$$W : f \mapsto Wf|_B\,, \quad NU : \mu \mapsto NU\mu$$

(je $NU\mu \in C^*(B)$ vzhledem k (22)), jsou takto definované operátory duální, tj. $(NU)^* = W$. Toho se též využívá při vyšetřování rovnic (28): je-li jednodušší vyšetřit např. operátor W než NU a využít vět o souvislosti duálních operátorů z funkcionální analýzy, je to výhodné. Tak se ze současného řešení úlohy (D) při řešení ($\mathbb{N}$) stává více než „vedlejší produkt" – je nástrojem, který nám při řešení ($\mathbb{N}$) velmi podstatně pomáhá.

Rovnice (28) lze přepsat ve tvaru

$$[I + (2NU - I)]\,\mu = 2\nu\,, \quad [I + (2W - I)]\,f = 2g\,, \tag{29}$$

kde I je identický operátor na příslušném prostoru. Řešení těchto rovnic bychom dobře zvládli v případě, že by operátory $(2NU - I)$, resp. $(2W - I)$ byly kompaktní; to však u „nehladkého" případu zdaleka nenastává ani v případě, že předpokládáme (22).

16. ... a jejich řešení

Na rovnice (29) lze aplikovat Rieszovu-Schauderovu teorii i v případě, že příslušné operátory sice nejsou kompaktní, ale nejsou od kompaktních operátorů v jistém smyslu „příliš daleko". Položme

$$V_0^G = \lim_{r \to 0+} \sup \{v_r^G(z);\, z \in B\}\,, \tag{30}$$

kde $v_r^G(z)$ je definováno pomocí (15). Tato veličina nám poslouží v souvislosti s tzv. *Fredholmovým poloměrem operátoru* $(2W - I)$, který určitým způsobem měří vzdálenost tohoto operátoru od podprostoru kompaktních operátorů na $C(B)$.

Bude-li tento poloměr větší než 1, budou obě rovnice v (29) „pěkné" a lze na ně aplikovat zmíněnou teorii. To nastane, *právě když je* $V_0^G < \frac{1}{2}$. Potom je možná kompletní diskuse úloh $(\mathbb{N})$ a (D) a je znám i celkem jednoduchý popis řešení.

Důkazy příslušných tvrzení nejsou zdaleka již jednoduché, v této části už analogie s hladkým případem není rozumným vodítkem. Např. vyšetření homogenní rovnice je nesrovnatelně obtížnější než v klasickém případě a vyžaduje zcela nové metody.

Čtenáře napadne: jak vlastně obecné mohou tedy být množiny G, pro něž lze nalézt řešení $(\mathbb{N})$ a (D) pomocí modernizované metody integrálních rovnic? Ukazuje se, že podmínka $V_0^G < \frac{1}{2}$ zaručuje již splnění podmínky (22) se všemi důsledky. Lze však říci více: „povrch" G musí již být konečný a platí jak $H(B) < \infty$, tak i $H(B \setminus \hat{B}) = 0$. Dále lze dokázat, že G musí již mít konečný počet omezených komponent. Konečně o hranici B lze v tomto případě dokázat, že existuje uzavřená množina $F \subset B$ s $H(F) = 0$ tak, že „zbytek" $B \setminus F$ je plocha lokálně lipschitzovská.

17. Začátek na závěr

Počátky metody integrálních rovnic jsou ve skutečnosti též spojeny s množinami s obecně nehladkými hranicemi, i když velice speciálními. Předpokládejme, že G' je konvexní množina; připomeňme, že obecně body „nehladkosti" její hranice mohou tvořit množinu hustou v této hranici, nejde tedy zdaleka o množinu s hranicí po částech hladkou. Definujme operátor $T = 2W - I$ na $C(B)$ a připomeňme, že pak lze úlohu (D) pro G' převést na rovnici

$$(I + T)f = 2g\,. \tag{31}$$

Tuto rovnici v podstatě vyšetřoval před více než 100 lety C. Neumann. Pokud je $\|T\| < 1$ (tedy T je *kontrahující operátor* na $C(B)$), lze (31) vyřešit pomocí iterací:

$$f = 2\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j T^j g \tag{32}$$

(je to tzv. Neumannova řada — s tímto označením se dodnes setkáváme ve funkcionální analýze při vyjádření inverzního operátoru k operátoru $(I + T)$, resp. $(I - T)$ za předpokladu, že T je nějaký operátor s vlastností $\|T\| < 1$). V našem případě je však $\|T\| = 1$, neboť $T1 = 1$, a tedy řada v (32) nám k řešení (31) není zdánlivě nic platná. Přejdeme-li však k faktorprostoru podle konstantních funkcí a položíme pro $f \in C(B)$

$$\|f\|_0 := \operatorname{osc}(f) = \max f(B) - \min f(B)\,,$$

je T kontrakce pro každou konvexní G' s jedinou výjimkou, kdy G' je průnikem kuželů (s vrcholy na hranici $\partial G'$ (v každém případě je však iterovaný operátor T^2 kontrakce pro každou konvexní G'). Neumann řešil úlohu (D) pro případ konvexních množin (se zmíněnou výjimkou) právě s využitím zmíněné kontraktivity.

Není obtížné řešit $(\mathbb{N})$ i (D) pro obě množiny G, G', kde G' je konvexní množina s kompaktní hranicí, to je ale již novější výsledek. Tento příklad nám ukázal, že množiny, pro něž lze popsanou metodu aplikovat, jsou hodně vzdáleny od těch, které mají po částech hladkou hranici.

Metody popsané v tomto článku mají obecnější použitelnost, soustředili jsme se jen na základní poznatky. Pokud by se čtenář chtěl s touto problematikou seznámit hlouběji, odkazujeme ho na text [2]. Jeho autor svými výsledky a pracemi významně přispěl k vyšetřování oblastí s nehladkými hranicemi.

Poznámka: Článek je upraveným a rozšířeným textem jedné z přednášek uspořádaných odbornou skupinou pro teorii potenciálu MVS JČSMF a katedrou matematické analýzy MFF UK v Praze v rámci „harmonického odpoledne" 14. 12. 1981. Rádi bychom na tomto místě poděkovali doc. O. Kowalskému za cenné připomínky, které přispěly ke zlepšení srozumitelnosti tohoto článku.

Literatura

[1] H. Burkhardt, F. Meyer: *Potentialtheorie*. Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften *IIA 7b*, 464—503, B. G. Teubner, Leipzig 1899—1916.
[2] J. Král: *Integral Operators in Potential Theory*. Lecture Notes in Mathematics *823*, Springer Verlag, Berlin 1980.
[3] I. Netuka, J. Veselý: *Ivar Fredholm a počátky funkcionální analýzy*. PMFA *22* (1977), 10—21.
[4] V. S. Sologub: *Rozvitije těorii elliptičeskich uravněnij v XVIII i XIX stoletijach*. Naukova dumka, Kiev 1975.

Slapové deformace a rotace Země

Milan Burša, Praha

Zmenšování úhlové rychlosti rotace Země je faktem prokázaným pozorováním astronomických úkazů, zejména zatmění Měsíce a Slunce za dobu více než dvou tisíciletí, a potvrzeným nejpřesnějším astrometrickým měřením v posledním čtvrtstoletí. Od dob Darwinových [1, 2] je zdůvodňováno slapovým působením Měsíce v důsledku viskózních vlastností zemského tělesa, tj. disipací energie slapových vln. Viskozita způsobuje, že slapové deformace (reakce) nenastávají okamžitě, nýbrž s určitým časovým zpožděním.

Maximální slapová deformace zemského tělesa od Měsíce nenastane tedy v obecném bodě M zemského povrchu v okamžiku, kdy těžiště (hmotnostní střed) Měsíce O' je v poledníku tohoto místa, tj. kdy $T_{O'} = -\Lambda$, nýbrž nastane až po pootočení Země o úhel ε (obr. 1), který je roven

$$\varepsilon = \omega_{\oplus} \, \Delta t \; ; \tag{1}$$

$\omega_{\oplus} = 2\pi/T_{\oplus}$ je úhlová rychlost rotace Země ($T_{\oplus}$ perioda rotace), Δt je časový interval, nutný k pootočení Země o ε; $T_{O'}$ je hodinový úhel těžiště O', počítaný od základního poledníku $\Lambda = 0°$; Λ je východní délka bodu M.

Je třeba vzít v úvahu i vlastní pohyb Měsíce za čas Δt, takže

$$\varepsilon = (\omega_{\oplus} - n_{☾}) \, \Delta t \, , \tag{2}$$

když $n_{☾}$ je střední pohyb Měsíce ($n_{☾} = 2\pi/T_{☾}$; $T_{☾}$ je siderická doba oběhu).