Jan Vyšín

Matematická meta olympiáda

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 18 (1973), No. 4, 216--219

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138831

Matematická $^{\text{meta}}$olympiáda

Texty všech dvanácti úloh pro rok 1973 (č. 13 až 24) už byly otištěny; proto zatím neuveřejňujeme další úlohy, ale budeme se zabývat ještě trochu řešením úloh prvního ročníku (čl. 1 až 12). Minule jsme otiskli ukázkové řešení úlohy 2; dnes to bude ukázkové řešení úlohy 10. Zajímavé úloze 12 (věta van der Waerdenova) bude věnován zvláštní článek.

Jak je vidět, nemůžeme publikovat v Pokrocích autorská nebo čtenářská řešení všech soutěžních úloh; tím bychom zabrali polovinu obsahu každého čísla (druhou polovinu by zabrali pravděpodobně fyzikové) a přitom metaolympiády zajímají jen část čtenářů.

Proto jsme se rozhodli, že budeme vydávat řešení autorská i čtenářská v Tiskovém středisku JČSMF, a to vždy asi 24 úloh (dva ročníky) pohromadě. Tak bude vznikat po částech nová sbírka metodicky řešených úloh a domníváme se, že se tím našim čtenářům zavděčíme.*) Pokroky budou nadále přinášet jen texty úloh, vyhodnocování soutěže, informace o soutěži a vybraná zvlášť zajímavá řešení čtenářů.

Dnes tedy ještě autorské řešení úlohy 10. Její text zní: *Zjistěte, zda existuje takových deset bezprostředně po sobě následujících přirozených čísel, že jejich součet je dělitelem součtu jejich druhých mocnin. Je-li úloha řešitelná, najděte všechna její řešení.*

První rozprava o úloze povede žáky asi k domněnce, že počet deseti po sobě následujících přirozených čísel není pravděpodobně podstatný pro způsob řešení a že místo posloupnosti deseti čísel bychom měli zkoumat posloupnost k bezprostředně po sobě následujících čísel, tj. posloupnost

(1) $$n + 1, n + 2, \ldots, n + k$$

a součty

(2) $$s = (n + 1) + (n + 2) + \ldots + (n + k),$$
$$\sigma = (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + \ldots + (n + k)^2 .$$

V této obecnější formulaci má úloha dvě proměnné v oboru přirozených čísel: k (kolik členů) a n (za kterým číslem začít).

Druhý impuls, vhodný zejména pro mladší žáky, bude patrně řešit úlohu pro některá menší k – třeba i experimentálně –, abychom „objevili" metodu řešení. Zvolíme $k = 3$ a zapíšeme v novém, pro tento případ vhodnějším označení

(3) $$s = (v - 1) + v + (v + 1), \quad \sigma = (v - 1)^2 + v^2 + (v + 1)^2,$$

tj.

$$s = 3v, \quad \sigma = 3v^2 + 2, \quad v \geqq 2 .$$

Protože podle (3) s je násobek tří a σ nikoli, není číslo σ násobkem čísla s *pro žádné*

*) První sešit zamýšlíme vydat ještě v kalendářním roce 1973.

přirozené číslo v. V celém průběhu řešení budeme žáky ostražitě hlídat, aby úplně a správně užívali kvantifikátorů.

Obdobný pokus mohou provést žáci ještě pro $k = 5$. Zde bude podle (2) při změněném označení

$$s = 5v\,, \quad \sigma = 5v^2 + 10\,, \quad v \geqq 3\,.$$

Číslo σ bude násobkem čísla s, právě když bude číslo $v^2 + 2$ násobkem čísla v, tj. číslo 2 násobkem čísla v. To však je vzhledem k podmínce $v \geqq 3$ nesplnitelné. Úloha je tedy pro $k = 3, 5$ neřešitelná.

Dáme žákům prozkoušet ještě případ $k = 4$. Zde bude

$$\begin{aligned}(4)\qquad s &= (v-1) + v + (v+1) + v + 2 = 4v + 2 = 2(2v+1)\,,\\ \sigma &= (v-1)^2 + v^2 + (v+1)^2 + (v+2)^2 =\\ &= 4v^2 + 4v + 6 = (2v+1)^2 + 5\end{aligned}$$

a zároveň $v \geqq 2$. Číslo σ je podle (4) násobkem čísla s, právě když je číslo 5 násobkem čísla $2v + 1$. Vzhledem k tomu, že je $v \geqq 2$, je $2v + 1 \geqq 5$, tj. $2v + 1 = 5$, $v = 2$.

Posloupnost

$$1, 2, 3, 4$$

dává skutečně *jediné* řešení úlohy, neboť v tomto případě je $s = 10$, $\sigma = 30$. Naproti tomu např. posloupnost 2, 3, 4, 5 *není* řešením úlohy ($s = 14$, $\sigma = 54$).

Předcházejícími pokusy jsou žáci mentálně připraveni k tomu, aby řešili úlohu obecně. Podle vzorců pro součty $\sum_1^n j$, $\sum_1^n j^2$ vyjádří $s = \sum_1^{n+k} j - \sum_1^n j$, $\sigma = \sum_1^{n+k} j^2 - \sum_1^n j^2$ a dostanou po úpravách

$$(5)\qquad 2s = k(2n + k + 1)\,,$$

$$(6)\qquad 6\sigma = 6n^2k + 6nk^2 + 6nk + 2k^3 + 3k^2 + k\,.$$

Podíl $\sigma/s = r$ je přirozené číslo, právě když platí

$$(7)\qquad 6\sigma = 3r\,.\,2s \quad (r \text{ přirozené})\,.$$

Dosadíme do (7) z (5), (6) a dělíme číslem k; vyjde

$$(8)\qquad 6nk + 6n^2 + 6n + 2k^2 + 3k + 1 = 3r(2n + k + 1)\,.$$

Až posud mohli provádět žáci všechny úpravy zcela samostatně; k další úpravě rovnice (8) však potřebují podnět. Výraz na její levé straně je třeba upravit v součet dvou členů, z nichž jeden bude násobkem trojčlenu z pravé strany rovnice (proč asi?). Po nedlouhém výpočtu dostaneme

$$3(2n + k + 1)^2 + (k^2 - 1) = 6r(2n + k + 1)$$

neboli

$$3(2n + k + 1) + \frac{k^2 - 1}{2n + k + 1} = 6r\,. \tag{9}$$

Rovnice (9) je východiskem pro zpola deduktivní, zpola experimentální řešení zobecněné úlohy.

Při řešení zadané úlohy 10 položíme $k = 10$. Řešení *můžeme* dostat jen v případě, že

$$\frac{k^2 - 1}{2n + k + 1} = \frac{99}{2n + 11} \tag{10}$$

je celé číslo kladné (a dokonce dělitelné třemi – viz (9)). Rozhodně nebudeme problém řešit ekvivalentními úpravami, ale metodou inkluze, tj. budeme formulovat *nutné* podmínky pro řešení; o jejich postačitelnosti se nakonec přesvědčíme zkouškou. Pokud nemá číslo $k^2 - 1$ příliš mnoho dělitelů, je tento postup nejjednodušší. V našem případě je $2n + 11 \geqq 13$, tj. $2n + 11$ je dělitelem čísla 99, který je větší nebo rovný 13. Je tedy $2n + 11 = 33$ nebo $2n + 11 = 99$. Odtud dostaneme $n = 11$ nebo $n = 44$. Při dosazení do (9) dostaneme $r = 17$ nebo $149/3$. Může tedy vyhovovat jen $n = 11$ (nikoli 44). Posloupnost

$$12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21$$

je skutečně *jediným* řešením úlohy, jak se přesvědčíme zkouškou. Závěr řešení, které mohou provést žáci pomocí (9) zcela samostatně, je jistou školou metody inkluze.

I když snad by bylo obtížné řešit s žáky střední školy zobecněnou úlohu bez jakéhokoli omezení, bylo by možné omezit se na užší okruh úloh (jde vlastně o problémovou situaci) a vyslovit tento problém:

Je dáno liché prvočíslo p. Zjistěte, zda existuje $p - 1$ bezprostředně po sobě následujících přirozených čísel tak, aby jejich součet byl dělitelem součtu jejich druhých mocnin.

Řešení této varianty zní: daná úloha je řešitelná, právě když je $p \geqq 11$ a $p \equiv 2$ (mod. 3).

Také při řešení této varianty je východiskem rovnice (9), která se tak žákům prezentuje jako algebraické jádro celého řešení. Mimo odvození této rovnice pak potřebují žáci jen několik málo vět z teorie čísel.

Za zmínku stojí snad ještě jiné možnosti zobecnění, např. nahradit součet prvních či druhých mocnin součtem mocnin s jiným exponentem. Tak např. úloha: *Zjistěte čtyři bezprostředně po sobě následující přirozená čísla, jejichž součet je dělitelem součtu jejich třetích mocnin*, má nekonečně mnoho řešení, jak vyplývá z jednoduchého výpočtu:

$$s = (v - 1) + v + (v + 1) + (v + 2) = 4v + 2\,,$$

$$\sigma = (v - 1^3 + v^3 + (v + 1)^3 + (v + 2)^2\,,$$

tj.

$$\sigma = 4v^3 + 6v^2 + 18v + 8 = 2(2v^3 + 3v^2 + 9v + 4) = 2(2v + 1)(v^2 + v + 4)\,,$$

tj.

$$\sigma = s \, . \left(v^2 + v + 4\right).$$

Řešením úlohy jsou tedy všecky posloupnosti čtyř bezprostředně po sobě následujících přirozených čísel.

Jak je vidět, úloha 10 náleží do problémové situace, ze které lze čerpat mnoho úloh od nejjednodušších až po dosti složité.

Jan Vyšín

Poznámka k „metaolympiádě“

Zbyněk Nádeník, Praha

Pro účelnost „metaolympiády“ [8] bez výhrad svědčí krátká historie její 12. úlohy (Pokroky *17* (1972), 159).

Uzavřené lomené čáře v prostoru, která se skládá z n stejných stran, a která má všechny úhly stejné, říkejme (podle V. I. ARNOLDA [1]) pravidelný n-úhelník. Podle 12. úlohy se má dokázat: (*) *Pravidelný pětiúhelník je rovinný.*

Na podzim 1970 dostal K. HAVLÍČEK z redakce referativního časopisu *Zentralblatt für Mathematik* VAN DER WAERDENOVU práci [10] z července 1970, se kterou mě seznámil. Nejdříve se mě však otázal, zda bych čekal, že platí (*). Odpověděl jsem záporně, protože jsem si představil z hran pravidelného čtyřstěnu a krychle pravidelný nikoliv rovinný čtyřúhelník a šestiúhelník. Van der Waerdenovým výsledkem (*) z [10] jsem byl velmi překvapen. V [10] je navíc dodatek, že (**) *pravidelný pětiúhelník je buďto konvexní* (s úhly 108°), *anebo hvězdicový* (s úhly 36°).

Van der Waerden pojal práci [10], kterou přednesl již v únoru 1970 v curyšském matematickém kolokviu, jako příspěvek k psychologii matematického myšlení. O něm už v roce 1968 vydal knížku [9], která spolu s [10] významně doplňuje seznam literatury, uvedený J. Vyšínem v úvodním článku [8] k „metaolympiádě“. Van der Waerden píše, jak užasl, když v prosinci 1969 mu chemik J. D. DUNITZ tvrdil, že podle jistých chemických poznatků musí platit (*). Pak van der Waerden obsáhle líčí svůj postup při ověření. J. D. Dunitz sdělil v únoru 1970 své tvrzení i G. PÓLYOVI*), který vyloučil jakoukoliv dřívější známost věty (*) a připojil: „Když van der Waerden o tom nevěděl, pak to nebylo známo v matematice“ ([3], pozn. [1]), str. 25).

V únoru 1971 jsem navrhl K. MALEČKOVI, aby se zamyslil nad vlastnostmi pravidelných n-úhelníků při $n > 5$. Referoval o tom v geometrickém semináři v květnu 1971 spolu o van der Waerdenově práci [10] a dalších odůvodněních věty (*) od W. LÜSSYHO a E. TROSTA [6] z července 1970 a H. IRMINGERA [5] z listopadu 1970. Na příštím semináři uvedl T. JANČAR, že V. I. Arnold ([1]) už v roce 1957 vyslovil úlohu: Pro která n existují pravidelné

*) Viz jeho krátkou biografii (Pokroky *17* (1972), 237) před jeho přetištěným proslovem „Matematikové, které jsem znal“ (tamtéž, 237—244).