

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Daniela Velichová  
Geometria (Esej)

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 36 (1991), No. 1, 50--53

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/138818>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1991

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

# Geometria

(Esej)

*Daniela Velichová, Bratislava*

Kde bolo, tam bolo, prišlo raz na svet rozkošné dieťa. Volali ho Geometria, dcéra Matematiky. Dcéra najmilovanejšia, a predsa najviac odstrkovaná, podceňovaná, ale prítomná nezastúpiteľne všade. Dieťa úzkostlivo pestované aj zanedbávané, tu ospevované, tu hanené, nepovšimnuté a vzápätí zahrnuté najväčšou priazňou. Geometria. Odmietaná pre svoju príliš „prízemnú“ reálnu podstatu odhaľuje tajomstvá najabstraktnejších teórií. Veda, študujúca ideálne objekty, vytvorené vysoko intelektuálnou abstrakciou najskutočnejšej podstaty materiálneho sveta. Veda, kde sú realita a ideál totožné, model a teória neoddeliteľne splyývajú, konkrétne je abstraktné, a naopak. Geometria, považovaná za nehodnú vstupu do kráľovstva abstraktných matematických teórií, tróni nedotknutá a neprístupná. Čo nám vlastne doteraz poodhalila zo svojej tajuplnej ríše?

V dejinách ľudskej civilizácie patria geometrické pojmy k najstarším. Ale Matematika sa ku svojej najstaršej dcére chová macošsky. Faraóni či starý Babylon, Táles a grécki geometri od Pytagora po Euklida, Archimedes, Ptolemaios, arabskí učitelia a Omar Chajjám alebo stredoveký Regiomontanus, Kepler či piati geometri 18. storočia, ktorí si rozdelili svet matematiky – Clairaut, Euler, D'Alembert, Lagrange a Laplace, rodina Bernoulliovcov, Gauss, Lobačevskij i Bolyai, Riemann ale-

bo Klein, Pasch alebo Hilbert, Angličan Russel či ruskí učitelia Kagan alebo Kolmogorov, francúzski Bourbakisti, Američan Weyl, Cohen, Coons, Španiel Encarnacao a iní a iní, všetci sa jej klaňali a zároveň ju chceli pokoriť, podrobiť zákonom jej ctihodnejších sestier, Aritmetiky, Analýzy, Algebry, Teórie množín či Logiky, ba dokonca i Numeriky a Informatiky.

Milujúci súrodenci sestru vždy milosrdne vzali pod svoju ochranu, pomohli jej dobrotivo nabráť dych, hoci jej dochádzal len zdanlivo. Totiž ona, Geometria, sa im neodmenila podrobením sa, lež sa zajagala zakaždým v novej kráse, intenzívnejšie ako kedykoľvek predtým, ba dokonca ožiarila svojim leskom i svoje dobroprajné sestry a ukázala im ich vlastné, netušené bohatstvá.

Zbytočne sa neverný Pytagoras snažil podrobiť ju vôli čísel. Práve ona, Geometria, otvorila oči Aritmetike a odhalila jej neprebádané polia doposiaľ neznámych čísel, racionálne nepochopiteľných a predsa reálne existujúcich v úsečke dĺžky  $\sqrt{2}$  a hodenou rukavicou v tvare magického  $2\pi$ .

Márne boli snahy Euklida spútať ju axiomatically. Príliš zavčasu chcel prekročiť svoj tieň, opitý jej mocou a krásou chcel spútať nespútateľné. Dve tisícročia sa vysmievala všetkým zo svojho nekonečna, do ktorého sa dalo nazrieť každou priamkou, lenže bolo také nedostupné, ako priesečník dvoch rovnobežiek. Ale rukavica, hodená po druhýkrát, ostala dlho nepovšimnutá. A či bola zámerne ignorovaná s cieľom znevážiť neporaziteľného protivníka?

---

RNDr. DANIELA VELICHOVÁ (1951) pracuje na Katedre matematiky Strojníckej fakulty SVŠT, Nám. Slobody 17, 812 31 Bratislava.

Čo skutočne nové už môže priniesť tá ošúchaná, vyblednutá a vyčerpaná Euklidova favoritka?

A predsa sa našli takí, čo opäť ospievali jej krásu. Ale nie hocijako, lež vo veršoch, básnických perlách. Poetický Omar Chajjám bol však príliš konzervatívny. Jeho básnické obrazy, i keď krásne, spúťovali. Ani Boetius či Nikole Oresme nemali dosť síl oživiť tú skostnatelú kolosálnu stavbu storočí.

Bolo treba uviesť svet do pohybu, pomôcť sestre Analýze naštartovať Newtonove fluxie a Leibnizove diferenciály. Na to treba aspoň dvoch gavalierov – Bonaventura Cavalieri a René Descartes – pripravení položiť svoje životy za česť Geometrie, pochopiteľne Analytickej. A tak bolo sestričke Analýze udelené Eulerovo zrýchlenie, ktoré ju vynieslo ako žiarivú kométu nad obzor matematickej slávy. Blahosklonne podala svoj žiariaci chvost popoluške Geometrii, oprášila Apolloniove kuželosečky, ztratila syntézu a s novou silou chcela spútať jej priamky, roviny a plochy svojimi analytickými rovnicami. Dokonca si vzala na pomoc aj Aritmetiku s jej číslami, ktoré v usporiadaných dvojiciach a trojiciach pochodovali na šarmantne roztrúsené body. Geometria sa nemá prečo obávať. S pôvabom vlastným len jej samotnej sa usmeje na Gaspara Mongea a spískajú spolu figliarsky kúsok. Bod, napadnutý usporiadanou trojicou čísel, sa elegantne premietne do roviny, alebo ešte lepšie, do dvoch, a tieto dva obrazy, ohrozené usporiadanými dvojicami súradnicových systémov priemietní, sa s umeleckou ľahkosťou zobrazia späť do priestoru a splynú. Šťastná nevesta Geometria prijíma s novým menom Deskriptívna aj svadobný dar v podobe unikátného umeleckého dedičstva, ktoré dostala do vienka od talianskych

majstrov perspektívy – Vasariho, Pierra dela Francesca, Leonarda da Vinciho. Opúšťa sestru Analýzu, vydáva sa na vlastnú obežnú dráhu, kde podriadená svojským zákonom syntézy prechádza fázami doteraz nevidanými – Projektívna a Diferenciálna. Tá druhá, Diferenciálna, sa galantne poďakuje sestričke Analýze za zveladenie zrýchlenia, ktoré jej kedysi poskytla, na pohonné hmoty priam tryskového motora, zatiaľ čo Poncelletova Projektívna Geometria smelo pozrie do očí nekonečnu, perspektívne roztancuje involúcie s izotropickými priamkami a predstaví svetu cyklické body v nekonečne, Dupinovu indikatrix či Brianchonov bod, duálne prenasledovaný Pascalovou priamkou. Rozkrútil sa kolotoč ľudského umu, až sa z toho točí hlava. Treba sa odpútať od Zeme, zabudnúť na realitu, rozťahnuť krídla, veriť svojim okrídleným myšlienkam, hoci vzlietli príliš prudko, vysoko.

Nekorunovaný kráľ Matematiky, Karl Friedrich Gauss, tušil, cítil, videl, no neveril vlastným zmyslom. Geometria, obdarovaná Theoremou Egregium, mu vo svojej plnej kráse, s poodhaleným závojom, príliš oslepila zrak. Nikolaj Lobačevskij sníval s otvorenými očami, hľadiac na tú neskutočnú krásu. A János Bolyai uvidel, uveril a onemel úžasom i žiarlivosťou zistiť, že nie je sám, prvý. Euklides poznal len tretinu pravdy! Alebo to bola jedna z troch právd? Tajomstvo Geometrie, jej záhadná tvár, je poodhalená. Ktorá z tých troch tvárí se dvakrát zrkadlí? A či Geometria, sama tvary popisujúca, nemá vlastnú tvár? Že by boli jej krehké konštrukcie len snami?

Nie, Bernhard Riemann sa nedá len tak ľahko omámiť. Veci treba uviesť na správnu mieru. Myšlienky treba učesať. Najmodernejším algebraickým hrebeňom, účes à la n-rozmerná geometrická varieta.

Prvý model z tohoto salónu videl Eugénio Beltrami a nazval ho pseudosféra s konštantnou zápornou Gaussovou krivosťou.

Sestrička Algebra pritulila obnaženú Geometriu, zaodela ju svojim hávom. Algebraická Geometria, či Geometrická Algebra ?

Arthur Cayley asi netušil, že otvára brány nového sveta, v ktorom sa snúbi projektívna metrika s neeuklidovskou geometriou. Teória grúp a Möbiiov list sú svedkami ich plodnej symbiózy. Na slávnosti v Erlangene nechýbajú gratulanti so svojimi grupami transformácií efektívne pracujúcimi na množinách, ich akcie, reprezentácie a invarianty v rukách autora veľkolepého programu, ktorého zlatým klincom je neobyčajná fľaša v rukách Felixu Kleina, otca syntézy Geometrie s Algebrou.

Zatiaľ čo opustená Analýza húževnato buduje betónové základy svojho zámku na stračej nôžke, tvorivá spolupráca Geometrie a Algebry prináša úrodu. Gaston Darboux – všeobecná teória plôch, teória lineárnych priestorov a transformácií, Hamiltonove kvaterniony, Clifford-Kleinove priestory, Hesseho homogénne súradnice, teória tenzorov, Henri Poincaré – zrod topológie, Albert Einstein – teória relativity s geometrickým modelom fyzikálneho priestoru ako trojrozmernej variety v štvorrozmernom časopriestore.

Geometrie všetkých typov, projektívne, afinné, euklidovské i neeuklidovské, geometrie konečné i nekonečné, priamky ako potenciálne nekonečné množiny bodov, kružnice ako aktuálne nekonečná, všetko spolu a všetko zvlášť, podľa axiómy výberu, tanec a vír Teórie množín. Na scénu prichádza Georg Cantor so svojim parádnyim číslom: štvorec a úsečka v rovine majú rovnakú mohutnosť, Peanova krivka,

ktorá je Jordanovským spojitým zobrazením úsečky, vyplňa celý štvorec, sféru možno rozdeliť na konečnú množinu takých častí, že ich premiestnením získame 2 pôvodné sféry. Teória množín ponorila celú rodinu matematických disciplín do raja (či bludiska) paradoxov. Ako z neho von? Sťa Ariadnina niť sa opäť vynorila tisícročiami sa tiahnuca Euklidova myšlienka axiomatickej výstavby.

Na prelome storočí, po Paschovi a Peanovi, buduje David Hilbert nové základy Geometrie, axiomatiku rozčlenenú natoľko prirodzene, že logická štruktúra Geometrie sa stáva dokonale priehľadnou: axiómy incidencie, usporiadania, kongruencie, Euklidov postulát a axiómy spojitosti. Navyiac, takto formálne vytvorená Geometria nedokazuje svoju neprotirečivosť názorom; nepotrebuje ho. Jej body, priamky, roviny a vzťahy sú „veci“, o ktorých sa vie len to, že spĺňajú požiadavky axióm. Ale pozor! Čo je to za analytický model Geometrie, čo je to za pokus opäť ju podrobiť Aritmetike čísel, tentokrát už reálnych? Neprotirečivosť Geometrie, neprotirečivosť Aritmetiky, neprotirečivosť logiky – poslednej inštancie spoľahlivosti!

Nekonečná Geometria, so svojimi transformáciami vyjadrujúcimi pohyb, zredukovaná na formálnu hru so statickými logickými tautológiami!

Axiomatiky rastú ako huby po daždi. Pieri, Kagan, Schur pestujú axiómy pohybu, Moor a Veblen axiomatiku vybudovanú na základe jedinej relácie medzi bodmi, relácie „ležať medzi“ a Weyl vektorové priestory. Euklidovský priestor je štruktúra pozostávajúca z neprázdnej množiny prvkov zvaných body, trojrozmerného euklidovského vektorového priestoru s definovaným skalárnym súčinom, a operácie sčítovania bodov a vek-

torov. Skutočne nesmierne dômyselný a premyslený aparát na popísanie takej prirodzenej štruktúry, akou je svet okolo nás.

Decéry matematiky sa ocitli na rázcestí, z ktorého sa každá vydala inou cestou. Analýza stretla na tej svojej algoritmy, teóriu systémov, počítače, informatiku, kybernetiku, zatiaľ čo Algebra, verná svojim nekonečným priestorom a varietam, algebraickú topológiu, Bourbakistov s ich teóriou štruktúr, kategórie a funktory.

A čo Geometria ?

Analytici obsadili svet diskkrétnej matematiky, numerickej analýzy, nekonečné sa zredukovalo na obrovské množstvo konečného. Všetko, čo sa dá algoritmi- zovať, možno prenechať počítaču. Stačí zostaviť algoritmy, schopné rozhodovať o pravdivosti matematických tvrdení, a počítač sa stane absolútnym tvorcom, totálnym intelektom, patentom na rozum. Ale existuje vôbec formálny axiomatický systém Peanovej aritmetiky, ktorý by bol úplný, neprotirečivý a nezávislý? Existuje algoritmus pravdy?

Kurtovi Godelovi stačili dve metavyety, aby spochybnil nádeje formalisticko-logického perpetuum mobile pravdy. Matematika je našťastie oveľa zložitejšia a zaujímavejšia, než aby sa dala vtesnať do nejakej formálnej teórie. Elementárna geometria so svojimi prostými úsečkami bola a je nekonečným nositeľom nezavŕšiteľných problémov od čias Pytagorejcov a Zenona, ktorí dali vznik pojmu spojitosti, až po problém kontinua, geometricky reprezentovaný úsečkou, ako nekonečnou množinou bodov.

Umelá inteligencia dospela ku hraniciam svojich možností. A tu, na tejto hranici, objavil Encarnacao Geometriu, nazval ju Počítačová Geometria a zistil,

že Geometria, práve naopak, ešte hranice svojich možností nepozná. I keď Ivan Southerland považoval za nový úspech počítačovej vedy možnosť algoritmickej a počítačovej tvorby obrázka, nebol vznik počítačovej grafiky zas len jeden z figlov Geometrie? Kto tu vlastne pomohol komu? Počítače Geometrii, a či skôr Geometria počítačom? Neprepašovala Geometria do Informatiky okrem svojho aparátu aj aparát Algebry, Teóriu množín? Transformácie reprezentované maticami a vektorové rovnice interpolačných kriviek a plôch, počítačové modelovanie trojrozmerných scén, štruktúry a reprezentácie dát, množinové operácie, zobrazovacie metódy, teória kriviek a plôch, neeuclidovské geometrie. Nie je snáď každý riadok, či stĺpec obrazovky modelom projektívnej priamky?

V súčasnom stave matematického poznania možno takmer každý problém Geometrie formulovať a riešiť tak metódami Algebry, ako aj Analýzy. A naopak, nebol rozvoj Algebry i Analýzy silne stimulovaný podnetmi Geometrie? Jej zvláštne postavenie medzi ostatnými súrodencami tkvie v jej jedinečnej schopnosti skĺbiť presnú logiku s priestorovou predstavivosťou do organickej symbiózy. Geometria je statická logika, oživená názorovou predstavou. Je to spôsob uvažovania, geometrická intuícia, schopná celostne synteticky analyzovať akýkoľvek predmet, inšpirujúci zdroj Analýzy, Algebry či Informatiky, vnášajúci do týchto disciplín geometrické pojmy, obohacujúc tak ich i sám seba.

Áno, Geometria skutočne naučila človeka myslieť. Vydala sa svojou vlastnou, kráľovskou cestou. Z jej začiatku do konca nedovidno.